Chapter 3
Hellinger's 1913 encyclopedia article on the fundamentals of the mechanics of continua

Simon R. Eugster

3.1 Translator's preface

Ernst Hellinger (*September 30, 1883 - †March 28, 1950), who was born in Striegau, formerly Germany, enjoyed his scientific education at the Universities of Heidelberg, Breslau and Göttingen, [109]. As a pupil of D. Hilbert, he received his doctoral degree from the University of Göttingen in 1907. After two more years in Göttingen, as assistant of Hilbert, he moved to Marburg where he accepted a position as "Privatdozent". During that time, Hellinger had written his masterpiece on the foundations of continuum mechanics and finished in 1913 his fundamental review article *Die Allgemeinen Ansätze der Mechanik der Kontinua*, which appeared in the "Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen", Bd. IV-4, Hft. 5. As it used to be, Hellinger wrote the article in German. More than a hundred years had to pass, until recently, the author of this chapter together with F. dell'Isola have published an exegetic series about Hellinger's encyclopedia article, see [59, 61, 62, 60]. Besides a complete annotated translation into English, these articles give a critical analysis about the advancement of science. Then, due to the establishment of English as the upcoming scientific language and due to the refusal of a variational formulation of continuum mechanics in the subsequent period, Hellinger's contribution to the foundations of continuum mechanics had been ignored for decades and had almost fallen into oblivion. Solely, the Hellinger-Reissner principle has made its way directly into theoretical and numerical mechanics.

The work of Hellinger covers an incredible amount of still contemporary topics in modern continuum mechanics and testifies how advanced theoretical mechanics was at the beginning of the twentieth century. Even though Hellinger focused on the fundamentals of continuum mechanics, he presented within the very same variational framework the physics of optics, electrodynamics, thermodynamics and the theory of relativity. Accordingly, Hellinger's paper can be understood as a contribution to

Simon R. Eugster
University of Stuttgart, Stuttgart, Germany, e-mail: eugster@inm.uni-stuttgart.de

continuum physics in general. In the same spirit, one has to consider the contribution given by [111].

With a side-by-side translation of Hellinger's article, also non-German speaking people should get the possibility to enjoy the reading of a crystal-clear and still topical article whose content has some enlightening parts. To make the reading as authentic as possible, the typesetting remains as close as possible to the original, the old-fashioned mathematical notation is left untouched and the original page-numbering is kept. The comparison of the translation with the original allows the reader to directly review the quality of the translation[1]. Despite the risk of some translated sentences being a bit clunky, a word-by-word translation has been carried out to avoid any implicit interpretation of the original text. Any additional word that has no correspondence in the German text is included in square brackets as follows: [xxxx].

The reader will immediately observe almost everywhere the antiquated mathematical notation, which can be viewed as an an intermediate notation towards index notation established by Ricci and Levi-Civita for tensor algebra and tensor calculus. However, the reader will also notice that Hellinger internalized the tensorial character of the introduced mathematical objects better than many contemporary scientists who are using the even more fashionable algebraic notation, which avoids the use of components but which requires the definitions of a myriad of operations. Moreover, the used notation is clarified at the very beginning for the vectorial equation

$$\bar{x} = x + \xi(x, y, z; \sigma) \qquad \begin{pmatrix} x, y, z \\ \xi, \eta, \zeta \end{pmatrix}$$

with the following explanation: «This signature and the analogous ones which follow, denote that besides the equation being written-out also those [equations] are valid, which arise by simultaneous cyclic permutation of x, y, z and ξ, η, ζ.» In index notation, one prefers denoting x, y, z and ξ, η, ζ by x_1, x_2, x_3 and ξ_1, ξ_2, ξ_3, respectively, in order to write

$$\bar{x}_i = x_i + \xi_i(x_j; \sigma) \ .$$

In an algebraic notation, very commonly, lower case bold symbols are used to denote elements of the tree-dimensional Euclidean vector space resulting in

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}; \sigma) \ .$$

The internal virtual work appearing on p. 615 in Eq. (4) is another example for which we want to give a notational translation. In the expression

$$-\iiint\limits_{(V)} \sum_{\left(\substack{x\,y\,z \\ XYZ}\right)} \left(X_x \frac{\partial \delta x}{\partial x} + X_y \frac{\partial \delta x}{\partial y} + X_z \frac{\partial \delta x}{\partial z} \right) dV$$

[1] Some translated excerpts of Hellinger's paper can also be found in Maugin [106].

Hellinger used the notation of Kirchhoff to denote the stress components of the stress tensor in the actual configuration, nowadays mostly referred to as the Cauchy stress and often denoted by $\boldsymbol{\sigma}$. Hence one can relate the components with respect to an orthonormal frame by

$$\sigma_{11} = X_x,\ \sigma_{12} = X_y,\ \dots\ , \sigma_{33} = Z_z.$$

With the virtual displacement field $\delta\boldsymbol{x}$ defined over the current configuration, the components of its gradient $\nabla(\delta\boldsymbol{x})$ translate as

$$\frac{\partial\delta x_1}{\partial x_1} = \frac{\partial\delta x}{\partial x},\ \frac{\partial\delta x_1}{\partial x_2} = \frac{\partial\delta x}{\partial y},\ \dots\ , \frac{\partial\delta x_3}{\partial x_3} = \frac{\partial\delta z}{\partial z}.$$

Using index notation together with Einstein's summation convention, which tacitly assumes summation over the range of the indices that appear twice in a term, we obtain the following compact form of the internal virtual work

$$-\iiint\limits_{(V)} \sum_{i,j=1}^{3} \sigma_{ij}\frac{\partial\delta x_i}{\partial x_j}dV = -\iiint\limits_{(V)} \sigma_{ij}\frac{\partial\delta x_i}{\partial x_j}dV = -\iiint\limits_{(V)} \sigma_{ij}\delta x_{i,j}dV.$$

Note, in the last equality, we have used the quite common notation to abbreviate partial derivatives. After a coordinate independent definition of the double contraction, often denoted by a colon, the internal virtual work can also be written as

$$-\iiint\limits_{(V)} \boldsymbol{\sigma} : \nabla(\delta\boldsymbol{x})dV.$$

Every notation has its advantages and disadvantages and it is rather a matter of taste which notation one prefers. While Hellinger's notation doesn't require any education in tensor algebra and tensor calculus, the much more compact algebraic notation requires many conventions and can sometimes be even cryptic, if the operations are not introduced adequately. Nevertheless, notation is just notation and without the corresponding piece of prose the equations decompose into a collection of meaningless symbols. As a mathematical physicist, Hellinger mastered this difficulty brilliantly and presented in a unified way all field theories which had already been formulated at his times, assuming as fundamental paradigm for physics the concept of field. It is remarkable that the work of Hellinger seems to have given the starting point to the works of Paul Germain, Richard Toupin, and Leonid I. Sedov [39, 78, 77, 14, 38]. In a sense, the effort by Hellinger in framing continuum mechanics by using variational principles opened the way to the modern theory of metamaterials [37, 20, 142, 88]: in fact, the problem of synthesis of tailored metamaterials can be confronted more successfully when continuum models are introduced to describe the desired mechanical behavior [51].

Following the side-by-side translation, the chapter closes with a section in which several interesting parts of the work are analyzed and are set into context with more modern sources.

3.2 Die allgemeinen Ansätze der Mechanik der Kontinua

IV 30. DIE ALLGEMEINEN ANSÄTZE DER MECHANIK DER KONTINUA.

Von

E. Hellinger

IN MARBURG A. L.

Inhaltsübersicht.

IV 30. FUNDAMENTALS OF THE MECHANICS OF CONTINUA.

By

E. Hellinger

IN MARBURG A. L.

Contents.

Litteratur.

Spezielle den vorliegenden Gegenstand betreffende Lehrbücher und Monographien liegen z. Z. in der Litteratur nicht vor. Von den wiederholt zu nennenden Werken seien hier folgende besonders zusammengestellt:

A. v. Brill, Vorlesungen zur Einführung in die Mechanik raumerfüllender Massen, Leipzig 1909.

E. und F. Cosserat, Théorie des corps déformables, Paris 1909. Ursprünglich als Appendix zur französischen Ausgabe von *O. D. Chwolson,* Traiteé de physique, t. II, Paris 1909 erschienen. Ein Auszug ist als Note an *P. Appell,* Traité de mécanique rationelle, t. III, 2. éd. (Paris 1909) beigefügt.

P. Duhem, Traité d'énergétique ou de thermodynamique générale, 3 vols, Paris 1911.

G. Hamel, Elementare Mechanik, Leipzig u. Berlin 1912.

J. L. Lagrange, Mécanique analytique, 4. éd. = Oeuvres complètes, Bd. 11 u. 12, (éd. par *G. Darboux*), Paris 1888/89.

W. Voigt, Kompendium der theoretischen Physik. Bd. 1 u. 2. Leipzig 1895/96.

Vgl. ausserdem die entsprechenden Abschnitte in den Lehrbüchern der Mechanik (s. die Übersichten in IV 1, *Voss*, IV 6 *Stäckel*, IV 11, *Heun*, IV 23, *Müller-Timpe*).

1. Einleitung. Das vorliegende Referat soll unter einheitlichem Gesichtspunkte einen zusammenfassenden Überblick über die verschiedenen *Formen* der Ansätze geben, durch die man in den einzelnen Gebieten der „Mechanik der Kontinua" im weitesten Sinne, d. h. der Mechanik und Physik kontinuierlicher ausgedehnter Medien, den zeitlichen Ablauf oder auch den Gleichgewichtszustand der zu untersuchenden Vorgänge bestimmt; dabei wird immer nur an solche Kontinua gedacht, die nicht vermöge irgendwelcher einschränkender

---

Literature.

Specific textboooks and monographs on the topic at hand are in the literature at the moment not available. From the repeatedly referred works, the following are listed in particular:

A. v. Brill, Vorlesungen zur Einführung in die Mechanik raumerfüllender Massen, Leipzig 1909.

E. und F. Cosserat, Théorie des corps déformables, Paris 1909. Appeared originally as appendix to the french edition of *O. D. Chwolson,* Traiteé de physique, t. II, Paris 1909. An extract is added as a note to *P. Appell,* Traité de mécanique rationelle, t. III, 2. éd. (Paris 1909) beigefügt.

P. Duhem, Traité d'énergétique ou de thermodynamique générale, 3 vols, Paris 1911.

G. Hamel, Elementare Mechanik, Leipzig u. Berlin 1912.

J. L. Lagrange, Mécanique analytique, 4. éd. = Oeuvres complètes, Bd. 11 u. 12, (éd. par *G. Darboux*), Paris 1888/89.

W. Voigt, Kompendium der theoretischen Physik. Bd. 1 u. 2. Leipzig 1895/96.

Cf. furthermore the corresponding sections in the textbooks of mechanics (for reviews see IV 1, *Voss*, IV 6 *Stäckel*, IV 11, *Heun*, IV 23,
Müller-Timpe).

---

1. Introduction. With respect to a consistent point of view, the paper at hand shall give a recapitulatory overview on various *forms* of the axiomatic foundations, which in the particular fields of the "mechanics of continua" in the broadest sense, i. e. the mechanics and physics of continuously extended media, enable the determination of the time behavior or also the state of equilibrium of the analyzed processes; thereby these continua are kept in mind, which, due to any restricting

Bedingungen speziell endlich viele Freiheitsgrade besitzen. Die Möglichkeit, die Grundgleichungen verschiedener Disziplinen in analoge Formen zu bringen, hat man früh bemerkt: die „mechanischen" Theorieen der Physik, die das physikalische Geschehen auf Bewegungserscheinungen der Materie zurückführen wollen, haben formal-mathematisch betrachtet geradezu den Inhalt, dass sie die Gleichungen der Physik als Sonderfälle der Gleichungen eines allgemeinen Systems bewegter Massen bzw. Massenpunkte erscheinen lassen; sie müssen also jene Analogien in Evidenz treten lassen.

Neben den eigentlichen mechanischen Theorien, die mehr oder weniger detaillierte Bilder vom Aufbau der Materie voran stellen, hat man zum Teil schon in den Anfängen, besonders aber seit der Mitte des 19. Jahrhunderts einen anderen an *J. L. Lagrange*s analytischer Mechanik orientierten Weg eingeschlagen; so wie dort sämtliche zur Untersuchung kommenden Probleme wenigen sehr allgemeinen Prinzipien untergeordnet werden, so bemühte man sich die Grundansätze immer weiterer physikalischer Disziplinen in die Formen jener Prinzipien zu bringen, indem man die in ihnen auftretenden Grössen — Energie, Kräfte, usw. — von rein phänomenologischen Gesichtspunkten aus mit gewissen physikalischen Grössen identifizierte. Für Systeme mit endlich vielen Freiheitsgraden knüpft diese Entwicklung namentlich an die von *W. Thomson* (*Lord Kelvin*), *J. J. Thomson* und *H. v. Helmholtz* inaugurierten Untersuchungen über zyklische Systeme und deren Anwendungen und über die Reziprozitätssätze der Mechanik an.

Nun wendete bereits Lagrange seine Prinzipien direkt auf gewisse kontinuierliche Systeme (Flüssigkeiten, biegsame Fäden und Platten u. dgl.) an[1]); im Anschluss an die weitere Ausbildung dieser Ansätze, besonders durch die an *A. L. Cauchy*[2]) anknüpfende Entwicklung der Elastizitätstheorie, sowie unter der Einwirkung des Ausbaues anderer physikalischer, speziell optischer Theorien gewöhnte man sich immer mehr, auch ein kontinuierliches System als ein selbständiges Objekt der Mechanik (mit unendlich vielen Freiheitsgraden) zu betrachten, das sich seinerseits zwar in formaler Analogie zu der altbekannten Punktmechanik, aber doch völlig unabhängig von ihr behandeln lässt. Die so als selbständige Disziplin entwickelte „Mechanik des deformierbaren Kontinuums" umfaßt den formalen Ansätzen nach neben der gewöhnlichen Elastizitätstheorie und Hydrodynamik sämtliche hier in

[1] Vgl. insbesondere 1. part., sect. IV, § II der „Mécanique analytique".

[2] Entscheidend waren hier seine Untersuchungen über den Spannungsbegriff vom Jahre 1822 (Bull. de la Soc. philom. 1823, p. 9). Nähere Angaben s. in IV 23, Nr. **3**a, *Müller-Timpe*.

conditions, in particular are not reduced to continua with finitely many degrees of freedom. The possibility, to bring the fundamental equations of various theories into similar forms, has been noticed soon: the "mechanical" theories of physics, which try to explain the physical phenomena only by the motion of matter, contain from a formal-mathematical point of view the essence that the equations of physics appear as special cases of equations of a general system with moving masses or mass points; thus such [mechanical] theories must generate those analogies.

Besides the intrinsic mechanical theories, which put more or less detailed images of the constitution of matter at the basis [of their formulation], one has, partially in the beginning, but in a wider extent in the mid-19th-century, developed a new path following *J. L. Lagrange*'s analytical mechanics; indeed as in there all analyzed problems are based on a few very general principles, one has tried to bring the foundations of more and more physical disciplines into the form of those principles, by identifying the appearing quantities — energy, forces, and so on — with certain physical quantities [previously introduced] from a purely phenomenological point of view. For systems with finitely many degrees of freedom this development is presented in particular in the analysis inaugurated by *W. Thomson* (*Lord Kelvin*), *J. J. Thomson* and *H. v. Helmholtz* on cyclic systems with its applications and on the reciprocity theorems of mechanics.

Already Lagrange applied his principles directly to certain continuous systems (fluids, flexible wires and plates and similar ones)[1]); in connection with the further developments of these fundamentals, particularly with that one concerning the development of the theory of elasticity by following *A. L. Cauchy* [2]), as well as under the influence of the extension of other physical, especially optical theories, one got increasingly accustomed to consider a continuous system as an independent object of study in mechanics (with infinitely many degrees of freedom), which has to be in formal analogy to the well-known point mechanics, but which can be treated independently. This "mechanics of the deformable continuum" developed as an independent discipline, contains, due to the formal approaches [used], in addition to the common theory of elasticity and hydrodynamics all

[1] cf. especially 1. part., sect. IV, § II of "Mécanique analytique".

[2] Crucial were his analyses on the notion of stress from 1822 (Bull. de la Soc. philom. 1823, p. 9). For further details see IV 23, No. **3**a, *Müller-Timpe*.

Betracht zu ziehende physikalischen Erscheinungen in kontinuierlich ausgedehnten Medien. Die Fortbildung dieser Betrachtungen wurde wesentlich beeinflusst durch die *Thermodynamik*, die prinzipiell das Gesamtgebiet der Physik zu umfassen strebt, und die dadurch, daß sie überall die Energiefunktion bzw. das Potential voranstellt, naturgemäss die Grundgleichungen der verschiedenen Einzelgebiete in analogen Formen liefert.

Alle diese Beziehungen sind in der mechanischen und physikalischen Literatur vielfach behandelt worden; vieles, was ausdrücklich nur in der Punktmechanik bzw. für Systeme von endlich vielen Freiheitsgraden ausgesprochen ist, lässt sich unmittelbar auf kontinuierliche Systeme ausdehnen. Es seien hier vorweg nur die Namen einiger Autoren genannt, die die hier in Betracht kommenden Beziehungen besonders berücksichtigt haben und die daher auch im folgenden häufig zur Geltung kommen: *W. Voigt* [3]), *P. Duhem* [4]) und *E.* und *F. Cosserat*.[5]) [6])

Der Zweck dieses Referates bedingt es, dass im folgenden das rein *formal*-mathematische Moment im Vordergrund steht: die Formulierung des *Ansatzes* der verschiedenen Probleme sowie ihre Zusammenfassung in eine einheitliche möglichst einfache und bequeme Formel. Sowohl die Untersuchung der *mechanischen* und *physikalischen* Bedeutung der Grössen und Gleichungen als auch die eigentlich *analytisch*-mathematische Theorie ist in den verschiedenen Referaten der Bände IV und V über die besonderen Disziplinen enthalten.

Als einheitliche *mathematische* Form, der sich die sämtlichen Einzelansätze am leichtesten einfügen, wird die des *Variationsprinzipes* verwendet. Allerdings genügt nicht die Gestalt, die in der eigentlichen Variationsrechnung in der Regel betrachtet wird, wo die unbekannten Funktionen so zu bestimmen sind, dass ein gewisses sie enthaltendes bestimmtes Integral einen Extremwert annimmt. Vielmehr handelt es sich hier vorzugsweise um diejenige Form, die die Variationsrechnung als notwendiges Kriterium des Extremums ergiebt, und in

---

[3] Neben vielen einzelnen Arbeiten besonders in seinem Kompendium der theoretischen Physik, 2 Bde., Leipzig 1895/96.

[4] In zahlreichen späterhin zu zitierenden Arbeiten; vgl. auch seinen Traité d'énergétique ou de thermodynamique générale, t. I. II, Paris 1911.

[5] Vgl. die als Appendix zur französischen Ausgabe von *O. D. Chwolson*, Traité de physique erschienene „théorie des corps déformables" (Paris 1909), von der ein Auszug der 2. Aufl. des 3. Bds. von *P. Appell* Traité de mécanique rationelle (Paris 1909) als Note beigefügt ist.

[6] Auch von Entwicklungen ähnlicher Art die *D. Hilbert* in einigen seiner Göttinger Vorlesungen gab, ist das folgende vielfach beeinflusst.

physical phenomena which are accounted for in [the theory of] continuously extended media. The advancement of this theory has been influenced significantly by *thermodynamics*, which aims to cover the entire field of physics, and by considering the energy function or rather the potential as the most fundamental concept, naturally yields the fundamental equations of various specific fields in similar forms.

All these equations have been treated in the mechanics and physics literature in many cases; much that has been stated explicitly in point mechanics or for systems with finitely many degrees of freedom, can immediately be extended to continuous systems. At a preeminent place, just the names of a few authors are mentioned, which have especially considered the relations treated here which often show to be useful in the following: *W. Voigt* [3]), *P. Duhem* [4]) and *E.* and *F. Cosserat*.[5]) [6])

The objective of this paper requires that the purely *formal*-mathematical aspect must have priority in what follows: The formulation of the *ansatz* of various problems as well as their collection to a unified and at most simple and convenient formula. Both the analysis of *mechanical* and *physical* interpretation of the quantities and equations as well as the essential *analytic*-mathematical theory of the particular disciplines are covered by various papers in the volumes IV and V.

As unifying *mathematical* form, in which all individual [methodological] fundamentals are included the easiest, the *variational principle* is applied. Although, the form commonly considered in the calculus of variations, in which the unknown function has to be determined such that a certain definite integral, containing the function, has an extremum, is not adequate. On the contrary, it concerns here particularly the form, which the calculus of variations yields as the necessary criterion of the extremum, and the form in

[3] Besides many individual works especially in his compendium of theoretical physics, 2 Bde., Leipzig 1895/96.

[4] In numerous works to cite later on; cf. also his Traité d'énergétique ou de thermodynamique générale, t. I. II, Paris 1911.

[5] Cf. "théorie des corps déformables" (Paris 1909), appearing as appendix to the french edition of *O. D. Chwolson*, Traité de physique, and which is added partially as a note to the 2. Edn. of the 3. vol. of *P. Appell* Traité de mécanique rationelle (Paris 1909).

[6] The following is influenced in many ways also from similar developements treated in some of the Göttinger lectures of *D. Hilbert*.

der man von altersher *das Prinzip der virtuellen Arbeit* ausdrückt: „Gegeben sind eine Reihe von Grössen $X, \dots, X_a, \dots$ in ihrer Abhängigkeit von den unbekannten Funktionen $x, \dots$ von $a, \dots, c$ und deren Ableitungen; diese Funktionen sollen der Bedingung genügen, dass ein bestimmtes Integral einer mit jenen $X, \dots, X_a, \dots$ als Koeffizienten gebildeten linearen Form der willkürlichen Funktionen $\delta x, \dots$ von $a, \dots c$ und ihrer Ableitungen

$$\int \cdots \int \left\{ X\delta x + \cdots + X_a \frac{\partial \delta x}{\partial a} + \cdots \right\} da \cdots dc$$

— oder eine Summe solcher Integrale — identische für alle (oder doch für alle gewissen Nebenbedingungen genügenden) $\delta x, \dots$ verschwindet.“

Der Vorteil, den die Verwendung eines solchen Variationsprinzipes als Grundlage gegenüber anderen möglichen Formulierungen oder auch der direkten Inbetrachtnahme der Grundgleichungen gewährt, besteht ganz besonders darin, dass das Variationsprinzip im Stande ist, in *einer* Formel das Verhalten des betrachteten Mediums an allen Stellen und zu *jedem* Zeitpunkt zu bestimmen, speziell also auch neben den Gleichungen für das Innengebiet die *Randbedingungen* und die *Anfangsbedingungen* zu umfassen. Es ist zudem in seiner prägnanten Kürze in gewisser Hinsicht übersichtlicher als die Gleichungen und hat infolgedessen für die Behandlung neuer Gebiete, für die Aufstellung weiterer Verallgemeinerungen u. dgl. wesentliche *heuristische* Bedeutung; diese wird besonders betont durch die innige Beziehung des Variationsprinzipes zur Thermodynamik, durch deren Anspruch auf Allgemeingültigkeit es für die Begründung physikalischer Theorien beweisenden Wert bekommt. Auch bei der Durchführung von *Koordinatentransformationen* ist das Variationsprinzip gegenüber den expliziten Gleichungen im Vorteil; es lässt vielfach die *invariantentheoretische Natur* des betrachteten Problems, die Frage nach den Transformationsgruppen, die es ungeändert lassen, bequemer erkennen, ohne daß es der Einführung einer besonderen Symbolik bedarf. —

Nach einigen einleitenden Erörterungen über den Begriff des Kontinuums und seine Kinematik werden in dem *ersten* Abschnitt des Referates die Grundansätze der *Statik*, im *zweiten* die der *Kinetik* behandelt, jedesmal ohne Rücksicht darauf, was für Kraftwirkungen im einzelnen es sind, die das Kontinuum beeinflussen. Die Natur dieser Kraftwirkungen, speziell ihre Abhängigkeit von der Lage und Bewegung des Kontinuums (*Dynamik*) wird im *dritten* Abschnitt erörtert, wobei dann die einzelnen Disziplinen einzuordnen sind; hierbei kommen schliesslich auch in einer kurzen Skizze einerseits die Beziehungen zu den Ansätzen der *Thermodynamik*, andererseits das Verhalten der ein-which *the principle of virtual work* is expressed of old: "Given a series of quantities $X, \ldots, X_a, \ldots$ depending on the unknown functions $x, \ldots$ on $a, \ldots, c$ and on the derivatives thereof; these functions shall satisfy the condition, that a definite integral of a linear form on the arbitrary functions $\delta x, \ldots$ of $a, \ldots c$ and their derivatives composed with those [functions] $X, \ldots, X_a, \ldots$ as coefficients

$$\int \cdots \int \left\{ X\delta x + \cdots + X_a \frac{\partial \delta x}{\partial a} + \cdots \right\} da \cdots dc$$

— or the sum of such integrals — vanishes identically for all (or however for all constraint satisfying) $\delta x, \ldots$.

The advantage, which the application of such a variational principle as foundation allows versus other possible formulations or also the direct consideration of the fundamental equations, consists especially therein that the variational principle is capable to determine the behavior of the considered media in all points and to *every* instant of time in a *single* formula, in particular to contain besides the equations for the interior also the *boundary conditions* and the *initial conditions*. Furthermore from a certain point of view, it is in its concise brevity clearer as the equations and consequently it is [more suitable] for the treatment of new fields, for the formulation of further generalizations and it is therefore of essential *heuristic* relevance; this [circumstance] is emphasized especially through the profound relation of the variational principle to thermodynamics, as through requirement of generality it gains evident value for the foundations of physical theories. Also for the evaluation of *coordinate transformations* the variational principle is in advantage versus the explicit equations; in many cases it is possible to identify the *invariance* of the considered problem, i. e. the question of the transformation group letting the problem unchanged, easier and without the requirement to introduce a specific symbolism. —

Subsequent to some introductory discussions about the notion of a continuum and the kinematics thereof, in the *first* section of the paper the foundations of *statics*, in the *second* the foundations of *kinetics* are treated, each time without any consideration of what classes of force effects influence the continuum in particular. The nature of these force effects, especially their dependence on the position and the motion of the continuum (*dynamics*) is discussed in the *third* section, whereat the individual disciplines are classified; in this connection, on the one hand the relation to the methods of thermodynamics, on the other hand the behavior of the zelnen Wirkungsgesetze gegen Transformationen der Raum-und Zeitkoordinaten und damit auch die Auffassungen der *Relativitätstheorie der Elektrodynamik* zur Geltung.

2. Der Begriff des Kontinuums.

2a. Das Kontinuum und seine Deformation. Das allgemeine *dreidimensional ausgedehnte kontinuierliche Medium*, auf das sich die folgenden Betrachtungen beziehen, bedeutet — unter Abstraktion von allen individuellen Eigenschaften der Materie — eine Gesamtheit von materiellen Teilchen, die erstens voneinander *unterscheidbar* sein und zweitens den Raum bzw. einen stetig begrenzten Raumteil *stetig ausfüllen* sollen. Die erste Eigenschaft kommt darin zum Ausdruck, dass jedes Teilchen durch Angabe dreier Parameterwerte a, b, c identifiziert wird, derart, dass verschiedene Teilchen in jedem Zustand, in dem man das Kontinuum etwa betrachtet, stets verschiedene Lagen haben; der von stetigen geschlossenen Flächen S_0 begrenzte Variabilitätsbereich V_0 dieser a, b, c charakterisiert das Quantum der Materie, das in Betracht gezogen wird. Die zweite Forderung besagt, dass die Lagen aller Teilchen einen von stetigen geschlossenen Flächen S begrenzten Raumteil V erfüllen. Bestimmt man die Lage eines Teilchens durch seine kartesischen Koordinaten, so wird ein solcher Zustand analytisch gegeben durch drei Funktionen von a, b, c

$$x = x(a, b, c), \quad y = y(a, b, c), \quad z = z(a, b, c), \tag{1}$$

die V_0 auf V abbilden, und deren Funktionaldeterminante

$$\Delta = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(a, b, c)} \tag{2}$$

innerhalb V_0 von Null verschieden, etwa positiv, ist. Man kann für a, b, c die Koordinaten einer fest gewählten Ausgangslage nehmen; dann sind $x - a$, $y - b$, $z - c$ die Komponenten der Verschiebung, die jedes Teilchen beim Übergang zur Lage (1) erleidet, und die Funktionen (1) werden *stetige* Funktionen von a, b, c, sofern man die übliche Annahme macht, dass ursprünglich benachbarte Teile stets benachbart bleiben. Wir werden darüber hinaus stets voraussetzen, dass die Funktionen (1) hinreichend viele stetige Differentialquotienten nach ihren Argumenten haben; nur an einzelnen Punkten, Linien oder Flächen sollen Unterbrechungen dieser Stetigkeit stattfinden können (vgl. IV 1, Nr. **9**, *Voss*). Die gleichen Voraussetzungen werden wir im allgemeinen stillschweigend für die weiterhin auftretenden, physikalische Vorgänge darstellenden Funktionen zu machen haben.

Jedes Funktionensystem (1) beschreibt vollständig einen bestimmten *Deformationszustand* des Kontinuums; im allgemeinen gilt *jeder* De-individual constitutive laws with respect to transformations of space-time-coordinates and thereby the concept of the *theory of relativity of electrodynamics* eventually are profitably presented together in a short outline.

2. The notion of a continuum.

2a. The continuum and its deformation. The general *three-dimensional extended continuous medium*, on which the following presentation relates to, stands — under abstraction of all more specific properties of matter — for an aggregate of material particles, which first of all are *distinguishable* from each other and second which *continuously occupy* the space or rather a continuously bounded part of the space. The first property finds its expression [by assuming] that every particle is identified by the specification of three variable values a, b, c such that different particles always have different positions in every state in which the continuum can be considered by any chance; [and that] the domain of variability V_0 of these a, b, c, bounded by the continuous and closed surfaces S_0, characterizes the portion of matter, which is taken into consideration. The second requirement states, that the positions of all particles occupy a part of the space V bounded by a continuous and closed surface S. Determining the position of a particle by cartesian coordinates, analytically such a state is given by three functions of a, b, c,

$$x = x(a, b, c), \quad y = y(a, b, c), \quad z = z(a, b, c), \tag{1}$$

mapping V_0 to V, and by their Jacobian

$$\Delta = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(a, b, c)} \tag{2}$$

being different from zero within V_0, for instance positive. For a, b, c one can take the coordinates of a fixed chosen initial position; then $x - a$, $y - b$, $z - c$ are the components of the displacement, which every particle undergoes by shifting them to the position (1), and the functions (1) become *continuous* functions of a, b, c, as long as the common assumptions are taken, that initially neighboring particles always remain neighboring. Moreover, we will always assume the functions (1) to have sufficiently many continuous difference quotients with respect to their arguments; only at individual points, lines or surfaces, discontinuities may occur (cf. IV 1, No. **9**, *Voss*). In general, we will have to make the same assumptions tacitly for the upcoming functions which describe physical processes.

Every system of functions (1) describes entirely a certain *state of deformation* of the cotinuum; in general *every* formationszustand, d. h. jedes Funktionentripel (1), das nur den soeben charakterisierten Stetigkeitsvoraussetzungen genügt, als zulässig; Be-schränkungen in der Art der möglichen Funktionen werden besondere Eigenschaften spezieller Medien zum Ausdruck bringen. In jedem Falle bestimmen die partiellen Ableitungen der Funktionen (1) in bekannter Weise die Verschiebungen, Verdrehungen und Formänderungen, die jedes sehr kleine Quantum (Volumelement) bei der Deformation erleidet (vgl. IV 14, Nr. **16**, *Abraham*).

Die Grundlage für die Untersuchung der Gleichgewichtsverhältnisse irgendeines Deformationszustandes (1) erhalten wir, wenn wir ihn mit einer sog. *unendlichkleinen virtuellen Verrückung* überlagern, die *virtuell* heisst, insofern sie willkürlich zu dem reell stattfindenden Deformationszustand hinzutritt.[7]) Um diesen Begriff in mathematisch präziser Form zu erhalten, ohne die bequeme übliche Bezeichnung und Verwendung der „unendlichkleinen" Grössen aufzugeben, betrachte man zunächst eine der Deformation (1) übergelagerte noch von einem Parameter σ abhängige und mit $\sigma = 0$ verschwindende Deformation, die das ursprünglich an der Stelle (x, y, z) befindliche Teilchen an die Stelle

$$\bar{x} = x + \xi(x, y, z; \sigma) \qquad \begin{pmatrix} x, y, z \\ \xi, \eta, \zeta \end{pmatrix}^{8)}$$

überführt; dabei sind ξ, η, ζ gegebene Funktionen von x, y, z und von dem Parameter σ, der in einem (beliebig kleinen) $\sigma = 0$ umgebenden Bereich variieren kann. Vermöge (1) kann man auch unter Elimination von x, y, z die so entstehenden neuen Deformationen in der alten Gestalt schreiben:

$$\bar{x} = \bar{x}(a, b, c; \sigma), \quad \text{wo} \quad \bar{x}(a, b, c; 0) = x \qquad (x, y, z). \tag{3}$$

Ist f irgendein von den Deformationsfunktionen (1) und ihren Ableitungen abhängiger Ausdruck, so bezeichnen wir allgemein als seine „Variation" den Ausdruck

$$\delta f(x, \ldots, x_a, \ldots) = \left\{ \frac{\partial}{\partial \sigma} f(\bar{x}, \ldots, \bar{x}_a, \ldots) \right\}_{\sigma=0}, \text{ wo } x_a = \frac{\partial x}{\partial a}, \ldots;$$

---

[7] So in Übereinstimmung mit der Terminologie von Voss (IV 1, Nr. **30**), die auch in den Lehrbüchern vielfach üblich ist. Andere (z. B. *Voigt*, Kompendium I, p. 27) sprechen von „virtuellen" Verrückungen erst dann, wenn die sonst beliebigen Verrückungen mit den für das System etwa bestehenden Bedingungen verträglich sind; *C. Neumann* (Ber. Ges. Wiss. Leipzig 31 (1879), p. 53 ff.) hat gelegentlich den Vorschlag von *Gauss* aufgenommen, dann von *fakultativen* Verrückungen zu reden.

[8] Diese Signatur und die analogen in der Folge bedeuten, dass neben der angeschriebenen Gleichung auch diejenigen gelten, die durch gleichzeitige zyklische Vertauschung von x, y, z und ξ, η, ζ aus ihr entstehen.

state of deformation, i. e. every triple of functions (1), which satisfies the just characterized continuity assumptions, is admissible; Restrictions on the kind of possible functions express particular properties of special media. In any case, the partial derivatives of the functions (1) assign in the well-known manner the displacements, the rotations and the shape change, which each very little portion (volume element) undergoes during its deformation (cf. IV 14, No. **16**, *Abraham*).

We obtain the basis for the analysis of the equilibrium conditions of an arbitrary state of deformation (1), by superimposing it with a so-called *infinitesimal virtual displacement*, called *virtual*, since it is added arbitrarily to the actually occurring state of deformation.[7]) To obtain this notion in a mathematical rigorous way, without dropping the convenient and common expression and application of "infinitesimal" quantities, one considers at first a deformation, depending on a parameter σ, superimposed on the deformation (1) which vanishes for $\sigma = 0$ and shifts the particle being at the initial position (x, y, z) to the position

$$\bar{x} = x + \xi(x, y, z; \sigma) \qquad \begin{pmatrix} x, y, z \\ \xi, \eta, \zeta \end{pmatrix};$$ [8])

thereby ξ, η, ζ are known functions of x, y, z and of the parameter σ, which varies in an (arbitrary small) surrounding of $\sigma = 0$. Using (1) for the elimination of x, y, z, one can also write these new arising deformations in the old form:

$$(3) \qquad \bar{x} = \bar{x}(a, b, c; \sigma), \quad \text{where} \quad \bar{x}(a, b, c; 0) = x \qquad (x, y, z).$$

Let f be any expression depending on the deformation functions (1) and their derivatives, then we generally denote its "variation" by the expression

$$\delta f(x, \dots, x_a, \dots) = \left\{ \frac{\partial}{\partial \sigma} f(\bar{x}, \dots, \bar{x}_a, \dots) \right\}_{\sigma=0}, \text{ with } x_a = \frac{\partial x}{\partial a}, \dots;$$

[7] Thus in coincidence with the terminology of Voss (IV 1, No. **30**), which is also often common in textbooks. Others (e. g. *Voigt*, Kompendium I, p. 27) speak of "virtual" displacements only when the otherwise arbitrary displacements are admissible with respect to any constraints of the system; *C. Neumann* (Ber. Ges. Wiss. Leipzig 31 (1879), p. 53 ff.) occasionally has adopted the suggestion of *Gauss*, to speak then of *optional* displacements.

[8] This signature and the analogous ones which follow, denote that besides the equation being written-out also those [equations] are valid, which arise by simultaneous cyclic permutation of x, y, z and ξ, η, ζ.

dabei bleiben während der Differentiation a, b, c konstant; die Operation δ ist daher mit der Differentiation nach a, b, c vertauschbar:

$$\delta \frac{\partial f}{\partial a} = \frac{\partial \delta f}{\partial a}.$$

Verschwinden die 3 Funktionen

$$\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial \sigma}\right)_{\sigma=0} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial \sigma}\right)_{\sigma=0} = \delta x(x, y, z) \qquad (x, y, z),$$

die vermittels (1) als Funktionen von x, y, z angesehen werden können, nicht identisch in x, y, z, so kann man unter den üblichen Stetigkeitspostulaten setzen

$$\bar{x} = x + \sigma \delta x(x, y, z) \qquad (x, y, z), \tag{3'}$$

falls σ so klein gewählt ist, dass σ^2 hinreichend klein gegenüber σ wird; die so gegebene unendlich kleine virtuelle Verrückung des Kontinuums ist also bis auf den Faktor σ durch die 3 Funktionen $\delta x, \delta y, \delta z$ bestimmt. Man kann diese Verrückung unmittelbar dem Begriff der in der Kinematik elastischer Medien betrachteten „unendlichkleinen Deformationen“ einordnen (vgl. IV 14, Nr. **18**, *Abraham*) und findet insbesondere, dass die durch sie bedingte „*virtuelle Formänderung*“ jedes Volumelements durch die 6 Grössen

$$\frac{\partial \delta x}{\partial x}, \ \frac{\partial \delta y}{\partial y}, \ \frac{\partial \delta z}{\partial z}, \ \frac{\partial \delta y}{\partial z} + \frac{\partial \delta z}{\partial y}, \ \frac{\partial \delta z}{\partial x} + \frac{\partial \delta x}{\partial z}, \ \frac{\partial \delta x}{\partial y} + \frac{\partial \delta y}{\partial x}, \tag{4}$$

ihre „*virtuelle Rotation*“ durch

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta z}{\partial y} - \frac{\partial \delta y}{\partial z}\right), \ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta x}{\partial z} - \frac{\partial \delta z}{\partial x}\right), \ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta y}{\partial x} - \frac{\partial \delta x}{\partial y}\right) \tag{4'}$$

bestimmt wird — jedesmal abgesehen von dem Faktor σ.

Eine *Bewegung des Kontinuums* wird als eine vom Zeitparameter t abhängige Folge von Deformationszuständen aufgefasst und demgemäss durch die drei nun noch von t abhängigen Deformationsfunktionen

$$x = x(a, b, c; t), \quad y = y(a, b, c; t), \quad z = z(a, b, c; t) \tag{5}$$

dargestellt, die als Funktionen aller vier Variablen im notwendigen Umfange stetig und differenzierbar sind; bei festem a, b, c stellt (5) die Bahn eines bestimmten Teilchens dar.

Ganz wie oben betrachtet man dann, indem man in die Formeln nur die Variable t hineinnimmt, neben der Bewegung (5) noch die für $\sigma = 0$ in (5) übergehende Schar von Bewegungen

$$\bar{x} = \bar{x}(a, b, c; t; \sigma) = x + \sigma \delta x(x, y, z; t) \qquad (x, y, z) \tag{6}$$

für kleine Werte des Parameters σ und bezeichnet $\delta x, \delta y, \delta z$ als Bestimmungsstücke dieser der Bewegung (5) übergelagerten *virtuellen Verrückung*.

thereby a, b, c remain constant during the differentiation; thus, the operation δ commutes with the differentiation with respect to a, b, c:

$$\delta \frac{\partial f}{\partial a} = \frac{\partial \delta f}{\partial a}.$$

When the 3 functions

$$\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial \sigma}\right)_{\sigma=0} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial \sigma}\right)_{\sigma=0} = \delta x(x, y, z) \qquad (x, y, z),$$

which, due to (1), can be seen as functions of x, y, z do not vanish identically in x, y, z, then one can set according to the common continuity postulates

$$\bar{x} = x + \sigma \delta x(x, y, z) \qquad (x, y, z), \tag{3'}$$

provided σ is so small, that σ^2 becomes sufficiently small with respect to σ; up to the factor σ, the infinitesimal virtual displacement of the continuum as given is determined by the 3 functions $\delta x, \delta y, \delta z$. One can immediately bring these displacements into line with the notion of "infinitesimal deformations" considered in the kinematics of elastic media (cf. IV 14, No. **18**, *Abraham*) and finds particularly, that the "*virtual shape change*" of each volume element is determined by the 6 quantities

$$\frac{\partial \delta x}{\partial x}, \ \frac{\partial \delta y}{\partial y}, \ \frac{\partial \delta z}{\partial z}, \ \frac{\partial \delta y}{\partial z} + \frac{\partial \delta z}{\partial y}, \ \frac{\partial \delta z}{\partial x} + \frac{\partial \delta x}{\partial z}, \ \frac{\partial \delta x}{\partial y} + \frac{\partial \delta y}{\partial x}, \tag{4}$$

and its "*virtual rotation*" is determined by

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta z}{\partial y} - \frac{\partial \delta y}{\partial z}\right), \ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta x}{\partial z} - \frac{\partial \delta z}{\partial x}\right), \ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta y}{\partial x} - \frac{\partial \delta x}{\partial y}\right) \tag{4'}$$

caused [by the virtual displacement] — in each case apart from the factor σ.

A *motion of the continuum* is considered as a sequence of states of deformations depending on a time parameter t and is hence represented by the three [following] deformation functions which are now also depending on t

$$x = x(a, b, c; t), \quad y = y(a, b, c; t), \quad z = z(a, b, c; t)\ , \tag{5}$$

which as functions of all four variables are sufficiently continuous and differentiable; for fixed a, b, c, (5) represents the trajectory of a certain particle.

As above by taking the variable t into the formulas, one considers then besides the motion (5) also the family of motions

$$\bar{x} = \bar{x}(a, b, c; t; \sigma) = x + \sigma \delta x(x, y, z; t) \qquad (x, y, z) \tag{6}$$

holding for small values of the parameter σ and implying (5) for $\sigma = 0$ and [one] denotes $\delta x, \delta y, \delta z$ as the characteristic quantities of the *virtual displacements* being superimposed on the motion (5).

2b. Adjunktion physikalischer Parameter, insbesondere Dichte und Orientierung. Jede physikalische Eigenschaft eines Mediums wird durch eine oder mehrere Funktionen von a, b, c, t beschrieben, die zu den Deformationsfunktionen hinzutreten.

Von einer solchen Eigenschaft wird im folgenden allgemein Gebrauch gemacht werden: der Existenz einer *unveränderlichen Masse* m für jedes Quantum V_0' des Mediums, die sich als über V_0' erstrecktes Integral einer für das Medium charakteristischen *Dichtefunktion* $\varrho_0 = \varrho_0(a, b, c)$ ausdrückt. Durch Übergang zur deformierten Lage (1) ergibt sich als *wirkliche Massendichte* ϱ der Verteilung des Mediums

$$\varrho = \frac{\varrho_0}{\Delta}, \tag{7}$$

und die Masse im Teil V' von V ist

$$m = \iiint\limits_{(V')} \varrho \, dx \, dy \, dz = \iiint\limits_{(V_0')} \varrho_0 \, da \, db \, dc.$$

Veränderungen der Lage des Kontinuums legen an sich bezüglich des Verhaltens eines solchen adjungierten physikalischen Parameters noch nichts fest; man lässt indessen stets die Masse eines jeden Quantums, d. h. die Funktion $\varrho_0(a, b, c)$ bei einer virtuellen Verrückung ungeändert und ersetzt daher die Dichte ϱ derart durch

$$\bar{\varrho} = \bar{\varrho}(x, y, z; \sigma) = \varrho + \sigma \delta \varrho(x, y, z), \tag{8}$$

dass (entsprechend der Kontinuitätsbedingungen, vgl. IV 15, Nr. **7**, p. 59 f. *A. E. H. Love*):

$$\delta \varrho_0 = \delta(\varrho \Delta) = 0 \quad \text{oder} \quad \delta \varrho + \varrho \frac{\partial(\delta x)}{\partial x} + \varrho \frac{\partial(\delta y)}{\partial y} + \varrho \frac{\partial(\delta z)}{\partial z} = 0. \tag{8'}$$

Entsprechendes soll bei einer Bewegung gelten, d. h. $\varrho_0(a, b, c)$ soll von t unabhängig und ϱ alsdann durch (7) gegeben sein.

Noch von einer hierhin gehörigen Begriffsbildung wird häufig Gebrauch zu machen sein, der Annahme nämlich, *dass für jedes Teilchen des Kontinuums die verschiedenen von ihm ausgehenden Richtungen charakteristisch verschiedene Bedeutung besitzen, und dass daher die Angabe seiner Orientierung wesentlich zur Beschreibung der Situation des Kontinuums gehört*. Solche Vorstellungen sind in der Molekulartheorie entstanden, indem man sich Körper von kristallinischer Struktur als Moleküle dachte, und bereits *S. D. Poisson* [9]) hat sie zur Gewinnung einer besseren Molekulartheorie der Elastizität zu verwenden versucht. Neuerdings haben *E.* und *F. Cosserat* [10]) ohne Heranziehung von Mole-

[9] Paris, Mém. de l'Acad. 18 (1842), p. 3, sowie in einigen vorangehenden Arbeiten; vgl. die ausführlichen Angaben in IV 23, Nr. **4**c, p. 39 (*Müller-Timpe*).

[10] Paris C. R. 145 (1907), p. 1409; 146 (1908), p. 68. Eine zusammen-

2b. Introduction of physical parameters, in particular density and orientation. Every physical property of a medium is described by one or more functions of a, b, c, t, which [may need to be] added to the deformation functions.

Subsequently, it will be generally made use of the following property: the existence of a *fixed mass m* for any portion V_0' of the medium, expressed by the integral over the domain V_0' with the integrand being a *density function* $\varrho_0 = \varrho_0(a, b, c)$ which is characteristic for the medium. By transition to the deformed position (1) the *actual mass density* ϱ of the distribution of the medium appears as

$$\varrho = \frac{\varrho_0}{\Delta}, \tag{7}$$

and the mass within the part V' of V is

$$m = \iiint_{(V')} \varrho\, dx\, dy\, dz = \iiint_{(V_0')} \varrho_0\, da\, db\, dc.$$

Changes in the position of the continuum determine nothing with regard to the behavior of such an introduced physical parameter; the mass of any portion, i. e. the function $\varrho_0(a, b, c)$ is in the meanwhile left unchanged for virtual displacements and one exchanges therefore the density ϱ by

$$\bar{\varrho} = \bar{\varrho}(x, y, z; \sigma) = \varrho + \sigma\delta\varrho(x, y, z), \tag{8}$$

such that (analogous to the continuity conditions, cf. IV 15, No. **7**, p. 59 f. *A. E. H. Love*):

$$\delta\varrho_0 = \delta(\varrho\Delta) = 0 \;\text{ or }\; \delta\varrho + \varrho\frac{\partial(\delta x)}{\partial x} + \varrho\frac{\partial(\delta y)}{\partial y} + \varrho\frac{\partial(\delta z)}{\partial z} = 0. \tag{8'}$$

The same shall hold for a motion, i. e. $\varrho_0(a, b, c)$ shall be independent of t and ϱ is consequently determined by (7).

Additionally, it will be frequently made use of a conceptualization which must be presented here, namely the assumption, *that for any particle of the continuum different directions radiating from these particles may present characteristically different behavior, and that therefore the specification of its orientation is essential in the description of the state of the continuum*. Such perceptions have been developed in the molecular theories, in which the bodies of crystalline structure are thought of as molecules, and already *S. D. Poisson* [9]) has tried to use [such perceptions] to arrive at a better molecular theory of elasticity. Recently, without referring to molecular perceptions, *E.* and *F. Cosserat* [10])

[9] Paris, Mém. de l'Acad. 18 (1842), p. 3, as well as some preceding works; cf. the detailed citations in IV 23, No. **4**c, p. 39 (*Müller-Timpe*).

[10] Paris C. R. 145 (1907), p. 1409; 146 (1908), p. 68. They have given a sum-

kularvorstellungen solche in jedem Teilchen mit einer bestimmten Orientierung behafteten Kontinua weitgehend behandelt.

In allgemeinster Weise kann dieser Begriff der orientierten Teilchen des Kontinuums analytisch formuliert werden[11]), indem man sich jedem Teilchen a, b, c des Kontinuums ein *rechtwinkliges Axenkreuz* angeheftet denkt, dessen 3 Axen jeweils die Richtungskosinus $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ ($i = 1, 2, 3$) haben; drei unabhängige Parameter λ, μ, ν (z. B. die Eulerschen Winkel), die die Orientierung eines solchen Dreikants in bezug auf das $x-y-z$-Koordinatensystem bestimmen, müssen neben den Funktionen (1) als Funktionen von a, b, c bekannt sein:

$$\lambda = \lambda(a, b, c), \quad \mu = \mu(a, b, c), \quad \nu = \nu(a, b, c), \tag{9}$$

um den Zustand eines solchen Mediums völlig zu beschreiben.

Mit jeder virtuellen Verrückung des Kontinuums wird man jetzt eine *virtuelle Drehung* dieser Dreikante verbinden, indem man eine von einem Parameter σ abhängige und für $\sigma = 0$ verschwindende Schar von Drehungen aus der Lage (9) heraus zugrunde legt und λ, μ, ν unter Beschränkung auf hinreichend kleine Werte von σ durch

$$\bar{\lambda} = \bar{\lambda}(a, b, c; \sigma) = \lambda + \sigma\delta\lambda(a, b, c) \qquad (\lambda, \mu, \nu) \tag{10}$$

ersetzt. Dabei kann man übrigens sowohl λ, μ, ν als $\delta\lambda, \delta\mu, \delta\nu$ stets entweder als Funktionen von a, b, c oder mit Hilfe von (1) als solche von x, y, z auffassen. Die Variationen $\delta\alpha_1, \dots, \delta\gamma_3$ der Richtungskosinus der 3 Axen selbst sind lineare homogene Funktionen der $\delta\lambda, \delta\mu, \delta\nu$ die man aus den expliziten Ausdrücken von $\alpha_1, \dots, \gamma_3$ durch Differentiation nach σ erhält; die Komponenten $\delta\pi, \delta\kappa, \delta\varrho$ der Winkelgeschwindigkeit der virtuellen Drehung nach den 3 Axen, die mit $\delta\alpha_1, \dots, \delta\gamma_3$ durch die Formeln

$$\delta\pi = \beta_1\delta\gamma_1 + \beta_2\delta\gamma_2 + \beta_3\delta\gamma_3 = -(\gamma_1\delta\beta_1 + \gamma_2\delta\beta_2 + \gamma_3\delta\beta_3) \begin{pmatrix} \pi, \kappa, \varrho \\ \alpha, \beta, \gamma \end{pmatrix}, \tag{11}$$

$$\delta\alpha_i = \gamma_i\delta\kappa - \beta_i\delta\varrho \qquad \left(i = 1, 2, 3;\ \begin{matrix} \alpha, \beta, \gamma \\ \pi, \kappa, \varrho \end{matrix}\right) \tag{11'}$$

zusammenhängen und die übrigens, im Gegensatz zu dem bisherigen Gebrauch des Zeichens δ, nicht Variationen bestimmter Funktionen von a, b, c sind, werden also gleichfalls lineare homogene Funktionen von $\delta\lambda, \delta\mu, \delta\nu$, wir setzen

$$\delta\lambda = l_1\delta\pi + m_1\delta\kappa + n_1\delta\varrho \qquad \begin{pmatrix} \lambda, \mu, \nu \\ 1, 2, 3 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

---

fassende Darstellung haben sie in ihrer „théorie des corps déform.“[5]) gegeben. Vgl. auch IV 11, II. Teil, *K. Heun*.

[11] Vgl. eine Bemerkung von *P. Duhem*, Ann. Éc. Norm. (3) 10 (1893), p. 206.

have extensively treated continua in which any particle is given a certain orientation.

In the most general way such a notion of oriented particles of the continuum can be formulated analytically[11]), by thinking that every particle a, b, c of the continuum is endowed with an attached *orthonormal triad*, whose 3 axes have the directional cosines $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ $(i = 1, 2, 3)$; besides the functions (1), three independent parameters λ, μ, ν (e. g. Euler angles) must be given as functions of a, b, c to determine the orientation of such a triad with respect to the x-y-z-coordinate system:

$$\lambda = \lambda(a, b, c), \quad \mu = \mu(a, b, c), \quad \nu = \nu(a, b, c), \tag{9}$$

in order to describe the state of such a medium completely.

With every virtual displacement of the continuum a *virtual rotation* comes along by taking a family of rotations with respect to the orientation of the triads (9) depending on a parameter σ which vanishes for $\sigma = 0$ and by exchanging λ, μ, ν for sufficiently small values of σ by

$$\bar{\lambda} = \bar{\lambda}(a, b, c; \sigma) = \lambda + \sigma\delta\lambda(a, b, c) \qquad (\lambda, \mu, \nu). \tag{10}$$

Thereby, incidentally one can consider both λ, μ, ν and $\delta\lambda, \delta\mu, \delta\nu$ always either as functions of a, b, c, or with the help of (1) as functions of x, y, z. The variations $\delta\alpha_1, \ldots, \delta\gamma_3$ of the directional cosines of the three axes are themselves linear homogeneous functions of $\delta\lambda, \delta\mu, \delta\nu$ being obtained by differentiation of the explicit expression of $\alpha_1, \ldots, \gamma_3$ with respect to σ; the components $\delta\pi, \delta\kappa, \delta\varrho$ of the angular velocity of the virtual rotation with respect to the 3 axes, which are connected to $\delta\alpha_1, \ldots, \delta\gamma_3$ by the formulas

$$\delta\pi = \beta_1\delta\gamma_1 + \beta_2\delta\gamma_2 + \beta_3\delta\gamma_3 = -(\gamma_1\delta\beta_1 + \gamma_2\delta\beta_2 + \gamma_3\delta\beta_3) \begin{pmatrix} \pi, \kappa, \varrho \\ \alpha, \beta, \gamma \end{pmatrix}, \tag{11}$$

$$\delta\alpha_i = \gamma_i\delta\kappa - \beta_i\delta\varrho \qquad \left(i = 1, 2, 3;\ \begin{matrix} \alpha, \beta, \gamma \\ \pi, \kappa, \varrho \end{matrix}\right) \tag{11'}$$

and which by the way, in contrast to the former application of the symbol δ, are not variations of a particular function of a, b, c, are in the same way linear homogeneous functions of $\delta\lambda, \delta\mu, \delta\nu$, and we set

$$\delta\lambda = l_1\delta\pi + m_1\delta\kappa + n_1\delta\varrho \qquad \begin{pmatrix} \lambda, \mu, \nu \\ 1, 2, 3 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

marizing version in their "théorie des corps déform."[5]). Cf. also IV 11, II. Teil, *K. Heun*.

[11] Cf. a note of *P. Duhem*, Ann. Éc. Norm. (3) 10 (1893), p. 206.

Daher bestimmen auch $\delta\pi, \delta\kappa, \delta\varrho$ (als Funktionen von a, b, c oder x, y, z gegeben) die virtuelle Verdrehung des Kontinuums.[12])

Alle diese Formeln lassen sich durch Aufnahme des Zeitparameters t sofort auf den Fall der *Bewegung* ausdehnen.

2c. Zwei- und eindimensionale Kontinua. Durch Unterdrückung eines bzw. zweier der drei Parameter a, b, c erhält man endlich unmittelbar auch die Ansätze zur Behandlung *zwei- und eindimensionaler Kontinua*, die *im dreidimensionalen Raume* gelegen sind.[13]) Ihre Lage in jedem Zustand wird gegeben durch

$$x = x(a, b) \quad \text{bzw.} \quad x = x(a) \qquad (x, y, z); \tag{13}$$

die Parameter variieren in einem Bereich S_0 bzw. C_0 der a-b-Ebene bzw. der a-Axe, welcher durch (13) auf eine Fläche S bzw. eine Kurve C abgebildet wird. Auch hier kann man jedem Teilchen ein Axenkreuz aus *drei* zueinander senkrechten Richtungen zugeordnet denken [14]), das durch die Funktionen bestimmt wird

$$\lambda = \lambda(a, b) \quad \text{bzw.} \quad \lambda = \lambda(a) \qquad (\lambda, \mu, \nu). \tag{14}$$

I. Die Grundansätze der Statik.

3. Das Prinzip der virtuellen Verrückungen.

3a. Kräfte und Spannungen. Um auf diesem kinematischen Schema die dynamischen Eigenschaften des Kontinuums aufzubauen, knüpfen wir an den *Arbeitsbegriff* an. Der Gesamtheit der auf das Kontinuum infolge seines gegenwärtigen Deformationszustandes, infolge seiner Lage im Raume oder infolge irgendwelcher äusserer Umstände wirkenden Kräfte und Spannungen aller möglichen Arten — zunächst als Ganzes ohne Rücksicht auf ihren Ursprung betrachtet — ist gemeinsam, dass sie bei jeder virtuellen Verrückung eine *„virtuelle Arbeit“* δA leisten; diese sehen wir als primär an und bestimmen sie folgendermassen: *δA sei als lineare homogene Funktion der Gesamtheit der Werte der Verrückungskomponenten $\delta x, \delta y, \delta z$ innerhalb des Kontinuums gegeben und sei eine skalare, von der Wahl des Koordinatensystems unab-*

[12] Es sind die bekannten kinematischen Methoden der Flächentheorie (vgl. etwa III D 3, Nr. **10**, *R. v. Lilienthal* und *G. Darboux*, Leçons sur la théorie générale des surfaces), die *E.* und *F. Cosserat* hier zur Anwendung bringen (s. die ausführliche Darstellung in den „corps déform.“).

[13] In gewissem Sinne sind diese Probleme einfacher als die dreidimensionale Medien betreffenden; in der Tat gehören einzelne von ihnen zu den am frühesten eingehend behandelten Aufgaben der Mechanik der Kontinua (vgl. IV, 6, Nr. **22—24**, *P. Stäckel* und IV 11, Nr. **19, 20**, *K. Heun*).

[14] Vgl. die bei den in 10) zitierten Pariser Noten von *E.* u. *F. Cosserat* und Cap. II, III ihrer „corps déform.“

Thus $\delta\pi, \delta\kappa, \delta\varrho$ (given as functions of a, b, c or x, y, z) determine the virtual rotation of the continuum.[12])

By adding the time parameter t, all these formulas can immediately be extended to the case of a *motion*.

2c. Two- and one-dimensional continuua. By suppressing one or two of the three parameters a, b, c, one obtains immediately the basis for the treatment of *two- and one-dimensional continua*, which are embedded *in the three-dimensional space*.[13]) The position in every state is given by

$$x = x(a, b) \quad \text{or} \quad x = x(a) \qquad (x, y, z); \tag{13}$$

the parameters vary in the domains S_0 and C_0 of the a-b-plane and the a-axis, respectively, which are mapped by (13) onto a surface S and a curve C, respectively. Here, too, one can think of every particle with an attached triad consisting of *three* orthogonal directions[14]), which is determined by the functions

$$\lambda = \lambda(a, b) \quad \text{or} \quad \lambda = \lambda(a) \qquad (\lambda, \mu, \nu). \tag{14}$$

I. The foundations of statics.

3. The principle of virtual displacements.

3a. Forces and stresses. To build the dynamic properties of the continuum on this kinematic scheme, we take up the *notion of work*. The collection of forces and stresses of any kind which act on the continuum due to the current state of deformation, due the position in space or due to any external circumstances — for the moment in its entirety without considering its cause — they have in common, that for any virtual displacement they expend a *"virtual work" δA*; we see this [virtual work] as primitive and determine it as follows: *Let δA be a linear homogeneous function of the entirety of values of the displacement components $\delta x, \delta y, \delta z$ within the continuum and let it be a scalar quantity, independent of the choice of the coordinate system.*

---

[12] There are the known kinematic methods of the geometry of surfaces (cf. for instance III D 3, No. **10**, *R. v. Lilienthal* and *G. Darboux*, Leçons sur la théorie générale des surfaces), which are applied here by *E.* and *F. Cosserat* (see for the detailed version in "corps déform.").

[13] In a certain manner these problems are easier than the ones for three-dimensional media; In fact, a few of them belong to the earliest problems which have been treated thoroughly in the mechanics of continua; (cf. IV, 6, No. **22**—**24**, *P. Stäckel* and IV 11, No. **19, 20**, *K. Heun*).

[14] Cf. the notes of Paris referred to in 10) of *E.* and *F. Cosserat* and Cap. II, III of their "corps déform."

hängige Grösse. Die Koeffizienten, mit denen die Einzelwerte von $\delta x, \ldots$ in δA eingehen, sind die Bestimmungsstücke der einzelnen wirkenden Kraftsysteme; dass sie von den virtuellen Verrückungen selbst unabhängig sind (d. h. die Linearität des δA), bringt die Annahme zum Ausdruck, dass diese Verrückungen ihrer Kleinheit halber die auf jedes Teilchen ausgeübten Kraftwirkungen nicht modifizieren.

Um die sämtlichen Ansätze der Mechanik der Kontinua zu umfassen, ist es nicht notwendig, von dem allgemeinsten Ausdruck der beschriebenen Art für δA auszugehen, der aus einer Summe von linearen Funktionen der Werte von $\delta x, \delta y, \delta z$ und ihren Ableitungen an irgendwelchen einzelnen Stellen des Kontinuums sowie von Linien-, Flächen- und Raumintegralen solcher Ausdrücke bestehen würde. Wir betrachten vielmehr zunächst einen Ausdruck — den wir später noch erweitern werden —, der aus einem über das ganze Gebiet V des Kontinuums erstreckten Raumintegral sowie einem über seine Oberfläche S erstreckten Flächenintegral besteht und dabei in dem ersteren noch eine Linearform der 9 Ableitungen der $\delta x, \delta y, \delta z$ nach x, y, z enthält[15]):

$$(1)\qquad \begin{aligned}
\delta A = &\iiint\limits_{(V)} \varrho(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)dV && = \delta A_1\\
&- \iiint\limits_{(V)} \Big(X_x \frac{\partial \delta x}{\partial x} + X_y \frac{\partial \delta x}{\partial y} + \cdots + Z_z \frac{\partial \delta z}{\partial z}\Big)dV && + \delta A_2\\
&+ \iint\limits_{(S)} (\overline{X}\delta x + \overline{Y}\delta y + \overline{Z}\delta z)dS && + \delta A_3
\end{aligned}$$

Die 15 hier auftretenden und sogleich näher zu diskutierenden Koeffizienten der Verrückungsgrössen sollen nun für jede Deformation des betrachteten Mediums bestimmte *überall endliche und nebst ihren Ableitungen, event. mit Ausnahme einzelner Flächen, stetige Funktionen* von

[15] Solche Ansätze für die virtuelle Arbeit sind als naheliegende Verallgemeinerungen der Formeln der Punktmechanik bei vielen speziellen Problemen früh entwickelt worden. Fast selbstverständlich war die Form der Summanden δA_1, δA_3, die ja nur das Summenzeichen der Punktmechanik durch das Integral ersetzen (vgl. etwa *Lagrange, Méc. an.*, 1. part, IV, 11); aber auch Terme von der Form δA_2 nur sehr spezialisiert, hat *Lagrange* schon z. B. bei der Behandlung der ausdehnbaren Fadens und der kompressiblen Flüssigkeit benutzt, Terme nämlich, die der Variation der Länge bzw. der Variation der Dichte proportional sind (s. *Méc. an.*, 1. part, V, 42; VIII,1). Darüber hinaus ist die Ausbildung des allgemeinen Ansatzes (5) jedenfalls durch die Auffassung der virtuellen Arbeit als Variation eines „Potentiales" (s. Nr. **7**) angeregt worden, wie sie *C. L. Navier* in die Elastizitätstheorie einführte (s. IV 23, Nr. **5**, *Müller-Timpe*).

The coefficients, which enter δA together with the values of $\delta x, \dots$, are the characteristic quantities of the individual acting force systems; the independence of these components of the virtual displacements (i. e. the linearity of δA), expresses the assumption that these displacements, due to their smallness, do not modify the force effects exerted on every particle.

In order to include all fundamental equations of the mechanics of continua, it is not necessary to begin with the most general expression of the described form of δA, which would consist of a sum of linear functions of values of $\delta x, \delta y, \delta z$ and their derivatives at certain locations of the continuum as well as line, surface and volume integrals of such expressions. Instead, we consider at first an expression — which we will extend later on —, which consists of a volume integral over the whole domain V of the continuum as well as a surface integral of its surface S and thereby the former includes in addition a linear form of the 9 derivatives of $\delta x, \delta y, \delta z$ with respect to x, y, z[15]):

$$
\begin{aligned}
\delta A = &\iiint\limits_{(V)} \varrho(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)dV && = \delta A_1 \\
&- \iiint\limits_{(V)} \Big(X_x\frac{\partial \delta x}{\partial x} + X_y\frac{\partial \delta x}{\partial y} + \cdots + Z_z\frac{\partial \delta z}{\partial z}\Big)dV && + \delta A_2 \\
&+ \iint\limits_{(S)} (\overline{X}\delta x + \overline{Y}\delta y + \overline{Z}\delta z)dS && + \delta A_3
\end{aligned}
\tag{1}
$$

The 15 coefficients of the displacement quantities, which appear in here and which are going to be discussed immediately in more detail, shall be, for any deformation of the considered medium, definite functions of x, y, z or a, b, c being *along with their derivatives everywhere bounded and, possibly with exceptions at individual surfaces, continuous*;

[15] Such fundamental equations for the virtual work have early been developed as obvious generalization to the formulas of point mechanics for many special problems. Almost naturally was the form of the summands δA_1, δA_3, which replaces merely the sigma sign from point mechanics with the integral (cf. for instance *Lagrange, Méc. an.*, 1. part, IV, 11); but also terms of the form δA_2 only in very special form have been used by *Lagrange* e. g. for the treatment of the extensible wire and the compressible fluid, namely terms, which are proportional to the variation of the length or density, respectively (see *Méc. an.*, 1. part, V, 42; VIII,1). Moreover, the development of the generalized approach (5) has been initiated by the opinion to consider the virtual work as variation of a "potential" (see No. **7**), as introduced by *C. L. Navier* in the theory of elasticity (see IV 23, No. **5**, *Müller-Timpe*).

x, y, z oder a, b, c sein; dann ist der anschauliche Sinn des Ansatzes (1), dass lediglich im allgemeinen stetig über den Raum sowie über einzelne Oberflächen verteilte *Kräfte* und stetig verteilte *Spannungen* berücksichtigt werden.

Zunächst sind nämlich der erste und letzte Summand von δA den bekannten Arbeitsausdrücken der Punktmechanik ganz analog gebaut, nur dass als Faktor die Masse eines Volumelementes ϱdV bzw. das Flächenelement dS auftritt; daher sind X, Y, Z als Komponenten der auf die Masseneinheit des Mediums und $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ als Komponenten der auf die Flächeneinheit der Oberfläche berechneten an der betr. Stelle wirkenden Kraft zu deuten. Da $\delta x, \delta y, \delta z$ Axenprojektionen eines polaren Vektors sind, und da δA als Skalar bei Koordinatentransformationen invariant bleibt, substituieren sich diese Kraftkomponenten bei Änderungen des rechtwinkligen Koordinatensystemes wie $\delta x, \delta y, \delta z$[16]): *diese Kräfte sind polare Vektoren.*

Eigentlich für die Mechanik der Kontinua charakteristisch ist der Summand δA_2. Die 9 Koeffizienten $X_x, X_y, \ldots, Z_z$ — in der bekannten *Kirchhoff*schen[17]) Bezeichnung —, die die Einwirkung der einzelnen Bestimmungsstücke der virtuellen Deformation auf die Arbeitsleistung messen, wird man als die *Komponenten des Spannungszustandes (stress)* an der betr. Stelle deuten, berechnet nach seiner Wirkung auf die Volumeneinheit. Ihr Verhalten bei Koordinatentransformationen ergiebt sich aus der Bemerkung, dass die 9 Ableitungen $\frac{\partial \delta x}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial \delta z}{\partial z}$ von Vektorkomponenten sich bei orthogonalen Koordinatentransformationen wie die 9 Produkte aus den Komponenten zweier Vektoren (eine sog. *Dyade*[18]))

$$X_1 \cdot X_2, \quad X_1 \cdot Y_2, \quad \ldots, \quad Z_1 \cdot Z_2$$

[16] Vgl. IV 14, Nr. **2**, *Abraham*.

[17] J. f. Math. 56 (1858) = *G. Kirchhoff* Ges. Abhandl. (Leipzig 1882), p. 287.

[18] Die hiermit angedeutete Definition der Dyade als Komplex von Grössen mit bestimmtem Verhalten gegenüber den rechtwinkligen Koordinatentransformationen („Hauptgruppe" der räumlichen Änderungen), die durchaus im Kreise der *F. Klein*schen Auffassung der Geometrie, Vektoranalysis usw. liegt (vgl. insbesondere Zeitschr. f. Math. Phys. 47 (1902), p. 237 und Math. Ann. 62 (1906), p. 419, die Darstellung in IV 14, *Abraham* sowie *F. Klein*, Elementarmath. v. höh. Standp. aus, Bd. 2, 2. Aufl., Leipzig 1913, p. 90 ff., p. 534) scheint bisher noch nicht zur Grundlage einer selbständigen Darstellung gemacht zu sein. Der Name „dyadics" stammt von *J. W. Gibbs* (s. *Gibbs* und *Wilson*, Vektor Analysis, New York 1901, p. 260 ff.), der sie aus sog. linearen Vektorfunktionen entstehen lässt; von hier aus sind sie auch in die deutsche Litteratur übergegangen (vgl. IV 11, Nr. **1**c, *K. Heun*). Fasst man eine Dyade als Matrix von $3 \cdot 3$ Elementen auf, so ist der Dyadenkalkul in dem *Cayley*schen Matricenkalkul enthalten (vgl. über diesen I A 4, Nr. **10** [19]), *Study*).

in that case, the concrete meaning of the ansatz (1) is that we merely consider *forces*, which are in general continuously distributed on spatial domains as well as on individual surfaces, and [that we only take] continuously distributed *stresses* [into account].

To begin with, the first and the last summand of δA are similar to the familiar work expressions of point mechanics, besides the appearance of the mass of a volume element ϱdV and the surface element dS as factor, respectively; thus X, Y, Z and $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ are to be interpreted as components of forces per unit mass of the medium and per unit area, respectively, acting at their corresponding position. Since $\delta x, \delta y, \delta z$ are the components of a polar vector, and since δA remains as scalar invariant under coordinate transformations, for a change of the orthogonal coordinate system these force components transform like $\delta x, \delta y, \delta z$[16]): *these forces are polar vectors.*

Rather characteristic for the mechanics of continua is the summand δA_2. The 9 coefficients $X_x, X_y, \dots, Z_z$ — in the familiar notation of *Kirchhoff*[17]) —, which measure the influence of the individual characteristic quantities of the virtual deformation on the expended work, can be interpreted as *components of the stress state* at the corresponding position, computed by their action per unit volume. Their behavior under coordinate transformation follows from the remark, that the 9 derivatives $\frac{\partial \delta x}{\partial x}, \dots, \frac{\partial \delta z}{\partial z}$ of vector components transform under an orthogonal coordinate transformation in the same way as the 9 products of the components of two vectors (a so called *dyad*[18]))

$$X_1 \cdot X_2, \quad X_1 \cdot Y_2, \quad \dots, \quad Z_1 \cdot Z_2$$

[16] Cf. IV 14, No. **2**, *Abraham*.

[17] J. f. Math. 56 (1858) = *G. Kirchhoff* Ges. Abhandl. (Leipzig 1882), p. 287.

[18] The herewith indicated definition of the dyad as complex of quantities with a particular behavior with respect to an orthogonal coordinate transformation ("basic group" of spatial transformations), which lies definitively within the notion of *F. Klein*'s geometry, vector analysis and more (cf. in particular Zeitschr. f. Math. Phys. 47 (1902), p. 237 and Math. Ann. 62 (1906), p. 419, the presentation in IV 14, *Abraham* as well as *F. Klein*, Elementarmath. v. höh. Standp. aus, Bd. 2, 2. Aufl., Leipzig 1913, p. 90 ff., p. 534) seems hitherto not to be the basis of an independent presentation. The name "dyadics" originates from *J. W. Gibbs* (see *Gibbs* and *Wilson*, Vektor Analysis, New York 1901, p. 260 ff.), who gives rise to them starting with so called linear vector functions; from here they have been transmitted to the German literature (cf. IV 11, No. **1**c, *K. Heun*). If one considers a dyad as a matrix of $3 \cdot 3$ elements, then the dyadic calculus is included within *Cayley*'s matrix calculus (cf. for this I A 4, No. **10**[19]), *Study*).

verhalten, während das bilineare Aggregat $X_x \cdot \frac{\partial \delta x}{\partial x} + \cdots$ invariant bleibt; daher müssen sich die Spannungskomponenten selbst wiederum wie Dyadenkomponenten transformieren, so dass man von einer *Spannungsdyade* spricht. Man kann diese, wie jede Dyade, zerspalten in einen (symmetrischen) Bestandteil von 6 Komponenten (ein *Tensortripel*[19]))

$$X_x, Y_y, Z_z, \tfrac{1}{2}(Y_z + Z_y), \tfrac{1}{2}(Z_x + X_z), \tfrac{1}{2}(X_y + Y_x) \tag{2}$$

und einen (schiefsymmetrischen) Bestandteil von 3 Komponenten

$$Z_y - Y_z,\ X_z - Z_x,\ Y_x - X_y, \tag{2'}$$

der einen *axialen Vektor* darstellt. Diese Zerlegung entspricht der in Nr. **2** angegebenen Hervorhebung zweier gesonderter Bestandteile (4), (4′) der virtuellen Deformation des Kontinuums, und ist aus ihr direkt zu entnehmen, wenn man den Integranden von δA_2 so zerlegt:

$$\sum_{\left(\substack{x\,y\,z\\ X\,Y\,Z}\right)} \left\{ X_x \frac{\partial \delta x}{\partial x} + \tfrac{1}{2}(Y_z + Z_y)\left(\frac{\partial \delta y}{\partial z} + \frac{\partial \delta z}{\partial y}\right) + (Z_y - Y_z)\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta z}{\partial y} - \frac{\partial \delta y}{\partial z}\right)\right\}.^{20)}$$

(Vgl. die Entwicklung in IV 14, Nr. **19**, *Abraham.*)

Insbesondere folgt hieraus, dass die 6 Grössen (2) denjenigen Teil des Spannungszustandes bestimmen, der bei einer unendlichkleinen reinen Formänderung des Kontinuums Arbeit leistet, also die *eigentlichen elastischen Wirkungen*, der Vektor (2′) aber denjenigen, der bei einer virtuellen Drehung der Volumenelemente, auch ohne Formänderung, in Betracht kommt, also die durch den Spannungszustand bedingten *Drehmomente*. Aus dem negativen Vorzeichen in (1) ergibt sich weiter, dass bei positivem X_x positive Arbeit bei negativem $\frac{\partial \delta x}{\partial x}$ geleistet wird, dass also *Druck positiv* gemessen ist.

Um endlich die Bedeutung der Spannungskomponenten als *Flächen-kräfte* aus dem Ansatz (1) zu gewinnen[21]), denke man sich den Teil der virtuellen Arbeit berechnet, den die Spannungen innerhalb eines von der geschlossenen Fläche S_1 begrenzten Teilbereiches

[19] In der Bezeichnung von *W. Voigt*; vgl. darüber IV 14, Nr. **17** *M. Abraham*.

[20] Die Indizes am Summenzeichen und die analogen in der Folge bedeuten, daß die zu summierenden Ausdrucke durch gleichzeitige zyklische Vertauschung von x, y, z und X, Y, Z entstehen

[21] Das Folgende enthält die Überlegungen, die man seit *C. L. Navier* und *G. Green* macht, um aus dem Ansatz des elastischen Potentiales die Grundgleichungen nebst ihrer anschaulichen Bedeutung zu erhalten; man vergleiche das historische Referat in IV 23, Nr. **5** (*Müller-Timpe*) sowie z. B. die Darstellung in *H. v. Helmholtz*, Vorles. über theoret. Phys. II (Leipzig 1902), § 23.

while the bilinear aggregate $X_x \cdot \frac{\partial \delta x}{\partial x} + \cdots$ remains invariant; hence the stress components must also transform like the components of a dyad, with the result that one speaks of a *stress dyadic*. One can compose it, as any dyad, into a (symmetric) part with 6 components (a *tensor triple*[19]))

$$(2) \qquad X_x, Y_y, Z_z, \tfrac{1}{2}(Y_z + Z_y), \tfrac{1}{2}(Z_x + X_z), \tfrac{1}{2}(X_y + Y_x)$$

and a (skew-symmetric) part with 3 components

$$(2') \qquad Z_y - Y_z,\ X_z - Z_x,\ Y_x - X_y,$$

representing an *axial vector*. This decomposition corresponds to the two separate parts (4), (4′) of the virtual deformation of the continuum considered in No. **2**, and is obtained directly by decomposing the integrand of δA_2 as follows:

$$\sum_{\binom{x\,y\,z}{X\,Y\,Z}} \left\{ X_x \frac{\partial \delta x}{\partial x} + \tfrac{1}{2}(Y_z + Z_y)\left(\frac{\partial \delta y}{\partial z} + \frac{\partial \delta z}{\partial y}\right) + (Z_y - Y_z)\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta z}{\partial y} - \frac{\partial \delta y}{\partial z}\right)\right\}.^{20)}$$

(Cf. the derivation in IV 14, No. **19**, *Abraham*.)

In particular it follows, that the 6 quantities (2) determine this part of the stress state, which expends work for an infinitesimally pure shape change of the continuum, i. e. the *actual elastic action*, the vector (2′) on the other hand determines that part, which can be considered for a virtual rotation of the volume element, also without shape change, i. e. *torques* induced by the stress state. From the negative sign of (1) it follows furthermore, that for positive X_x and negative $\frac{\partial \delta x}{\partial x}$ positive work is expended, such that *pressure* is consequently measured *positive*.

To obtain from the ansatz (1) finally the interpretation of the stress components as *surface forces* [21]), one considers the virtual work contribution expended by a subdomain V_1 bounded by a closed surface S_1,

[19] In the notation of *W. Voigt*; cf. in addition IV 14, No. **17** *M. Abraham*.

[20] The indices of the sigma sign and similar ones in the following denote that the expressions to be summed arise by simultaneous cyclic permutation of x, y, z and X, Y, Z

[21] The following includes the ideas, which are set since *C. L. Navier* and *G. Green*, to obtain from the ansatz concerning the elastic potential the fundamental equations in addition with its intuitive explanation; one should compare the historical presentation in IV 23, No. **5** (*Müller-Timpe*) as well as e. g. the presentation in *H. v. Helmholtz*, Vorles. über theoret. Phys. II (Leipzig 1902), § 23.

V_1 des Kontinuums leisten, d. i. das über V_1 erstreckte Teilintegral von δA_2; sind die Spannungskomponenten innerhalb V_1 ausnahmslos stetig, so geht dies durch partielle Integration (Anwendung des „Gaussschen Satzes“, s. IV 14, p. 12) über in

$$\iiint\limits_{(V_1)} \sum_{\binom{x\,y\,z}{X\,Y\,Z}} \Big(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\Big)\delta x \cdot dV$$
$$+ \iint\limits_{(S_1)} \sum_{\binom{x\,y\,z}{X\,Y\,Z}} (X_x \cos nx + X_y \cos ny + X_z \cos nz)\delta x \cdot dS_1,$$

wo n die nach V_1 hin gewendete Normalenrichtung der Fläche S_1 an der Stelle des Elementes dS_1 bedeutet. Durch Vergleich mit (1) folgt also, dass der Spannungszustand in V_1 die gleiche virtuelle Arbeit leistet, d. h. gerade so wirkt, als ob neben Volumenkräften in V_1 auf das Flächenelement dS_1 von S_1 pro Flächeneinheit berechnet die Kraft

$$X_n = X_x \cos nx + X_y \cos ny + X_z \cos nz, \qquad (X, Y, Z) \tag{3}$$

wirkt. Dieses *Cauchy*sche „Drucktheorem“ liefert dann bekanntlich durch Spezialisierung der Richtung von n unmittelbar die Bedeutung der 9 Komponenten (vgl. IV 23, Nr. **3**a, *Müller-Timpe*).

3b. Aufstellung des Prinzips der virtuellen Verrückungen. Auf Grund dieser Begriffsbildungen lässt sich das *Prinzip der virtuellen Verrückungen*, das die Statik der diskontinuierlichen mechanischen Systeme beherrscht[22]), unmittelbar auf die Mechanik der Kontinua übertragen: *In einem bestimmten Deformationszustand ist ein kontinuierliches Medium, in dem gewisse Volumen- und Oberflächenkräfte $X, \ldots$ und $\overline{X}, \ldots$ und ein gewisser Spannungszustand $X_x, \ldots$ bestehen, dann und nur dann im Gleichgewicht, wenn die gesamte virtuelle Arbeit dieser Kräfte und Spannungen für jede virtuelle Verrückung, die mit den dem Kontinuum etwa auferlegten Nebenbedingungen verträglich ist, verschwindet:*

$$\iiint\limits_{(V)} \Big\{\varrho \sum_{\binom{x\,y\,z}{X\,Y\,Z}} X\delta x - \sum_{\binom{x\,y\,z}{X\,Y\,Z}} \Big(X_x \frac{\partial \delta x}{\partial x} + X_y \frac{\partial \delta x}{\partial y} + X_z \frac{\partial \delta x}{\partial z}\Big)\Big\} dV$$
$$+ \iint\limits_{(S)} \sum_{\binom{x\,y\,z}{X\,Y\,Z}} \overline{X}\delta x \cdot dS = 0. \tag{4}$$

Diese Übertragung hat tatsächlich bereits *J. L. Lagrange* [23]) vollzogen, nachdem er das *Bernoulli*sche Prinzip der virtuellen Verrückungen

[22] Vgl. IV 1, Nr. **30**, *Voss*.

[23] Mécan. anal., 1. part., sect. IV. § II, sowie bei einer Reihe spezieller Probleme in sect. V—VIII.

which is the integral over the part V_1 of δA_2; for continuous stress components within V_1, [this virtual work contribution] is transformed further by integration by parts (using the "Theorem of Gauss", s. IV 14, p. 12), to

$$\iiint\limits_{(V_1)} \sum_{\binom{x\,y\,z}{X\,Y\,Z}} \Big(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\Big)\delta x \cdot dV \\ + \iint\limits_{(S_1)} \sum_{\binom{x\,y\,z}{X\,Y\,Z}} (X_x \cos nx + X_y \cos ny + X_z \cos nz)\delta x \cdot dS_1,$$

where n denotes the normal of the surface S_1 at the position of the element dS_1 pointing in direction of V_1. By comparison with (1) it follows consequently, that the stress state in V_1 expends the same virtual work, i. e. acts equally as if besides volume forces in V_1 the force per area

$$X_n = X_x \cos nx + X_y \cos ny + X_z \cos nz, \qquad (X, Y, Z) \tag{3}$$

were acting on the surface element dS_1 of S_1. This "pressure theorem" of *Cauchy* provides then, by specializing the directions of n, immediately the interpretation of the 9 components (cf. IV 23, No. **3**a, *Müller-Timpe*).

3b. Formulation of the principle of virtual displacements. Due to these conceptualizations the *principle of virtual displacements*, dominating the statics of discrete mechanical systems[22]), can be adopted immediately for the mechanics of continua: *A continuous medium in a particular state of deformation, for certain volume and surface forces* $X, \dots$ *and* $\overline{X}, \dots$, *respectively, and for a certain stress state* $X_x, \dots$, *is in equilibrium if and only if the total virtual work of these forces and stresses vanish for every virtual displacement, which is admissible with respect to the possibly imposed constraints of the continuum:*

$$\iiint\limits_{(V)} \Big\{\varrho \sum_{\binom{x\,y\,z}{X\,Y\,Z}} X\delta x - \sum_{\binom{x\,y\,z}{X\,Y\,Z}} \Big(X_x \frac{\partial \delta x}{\partial x} + X_y \frac{\partial \delta x}{\partial y} + X_z \frac{\partial \delta x}{\partial z}\Big)\Big\} dV \\ + \iint\limits_{(S)} \sum_{\binom{x\,y\,z}{X\,Y\,Z}} \overline{X}\delta x \cdot dS = 0. \tag{4}$$

This adoption has been implemented in fact already by *J. L. Lagrange* [23]), after postulating *Bernoulli*'s principle of virtual displacements

[22] Cf. IV 1, No. **30**, *Voss*.

[23] Mécan. anal., 1. part., sect. IV. § II, as well as for a series of particular problems in sect. V—VIII.

zur Grundlage seiner analytischen Mechanik gemacht hatte; für ihn ist eine selbstverständliche Folge der Gültigkeit dieses Prinzips in der Punktmechanik seine Anwendbarkeit auf die ihm zugänglichen Probleme der Mechanik der Kontinua, wo immer er den Arbeitsausdruck durch einen Grenzübergang von diskontinuierlichen Systemen aus oder durch direkte Intuition aufzustellen vermag. Man hat seither auch auf den weiteren der Behandlung erschlossenen Gebieten der Mechanik der Kontinua das Prinzip der virtuellen Verrückungen zur Geltung gebracht und hat sich dabei häufig, wie *Lagrange*, auf die Vorstellung gestützt, dass man das Kontinuum durch Systeme von endlichvielen Massenpunkten, und gleichzeitig alle physikalischen Vorgänge im Kontinuum durch entsprechende Vorgänge in diesen approximierenden Systemen annähern kann; freilich scheint eine axiomatische Präzisierung dieses Zusammenhanges, die vor allem die zur Umwandlung jener Analogisierungen in strenge Deduktionen notwendigen Stetigkeitsforderungen zu postulieren hätte, bisher nicht gegeben worden zu sein. Man mag es daher inzwischen vorziehen, für die Mechanik der Kontinua das eingangs formulierte Prinzip selbst als *oberstes Axiom* an die Spitze zu stellen (vgl. IV I, p. 72, *Voss*); man wird diesen Standpunkt um so lieber einnehmen, wenn man die Vorstellung kontinuierlich ausgedehnter Medien für naturgemässer hält als die abstrahierten „Massenpunkte“ der Punktmechanik.[24]) Die Gewissheit der Richtigkeit dieses Axioms liegt einerseits darin begründet, dass ein solcher Ansatz unsern allgemeinen physikalischen Anschauungen und Denkgewohnheiten entspricht, vor allem aber darin, dass er anpassungsfähig genug ist, um die Erfahrungstatsachen hinreichend gut darzustellen.

3c. Anwendung auf stetig deformierbare Kontinua. Die bekannten formalen Operationen der Variationsrechnung gestatten es in jedem Falle leicht, das Prinzip der virtuellen Verrückungen in eine Anzahl von Gleichungen zwischen den Kräften und Spannungen umzusetzen.[25]) Betrachten wir zunächst nur als typisch das in keiner Weise durch Nebenbedingungen beschränkte *beliebig stetig deformierbare Medium*, so muß die Bedingung (4) für jedes System stetiger Funktionen $\delta x, \delta y, \delta z$ erfüllt sein. Die Umformung von (4) durch

[24] Diese Anschauung hat neuerdings besonders *G. Hamel* (Math. Ann. 66 (1908), p. 350 und Jahresb. d. Math.-Ver. 18 (1909), p. 357; vgl. auch sein Lehrbuch „Elementare Mechanik“, Leipzig 1912) vertreten; er giebt dort eine vollständige Axiomatik der Mechanik der Kontinua, die das eine Grundprinzip, wie es hier benutzt ist, in eine Reihe unabhängiger Sätze auflöst

[25] So ist schon *Lagrange* in der Méc. an. bei den dort behandelten Probleme vorgegangen; s. Anm. 23.

as foundation of his analytical mechanics; for him the natural consequences of the validity of this principle of point mechanics is its applicability to problems of the mechanics of continua accessible for himself, whenever he is able to obtain the work expression by a limit process of discrete systems or by direct intuition. Since then one has also applied the principle of virtual displacements to further fields of the mechanics of continua, and has, like *Lagrange*, often based oneself on the perception, to be able to approximate the continuum by a system of finitely many mass points and that at the same time all physical processes in the continuum can be approximated by corresponding processes in these approximated systems; however it does not seem that such an axiomatic clarification of this connection have already been given, [a clarification] concerning the transformation of those intuitions into rigorous deductions would particularly have to postulate the necessary continuity requirements. Thus one may prefer in the meantime for the mechanics of continua, to choose the principle formulated at the beginning as the *highest axiom* (cf. IV I, p. 72, *Voss*); one prefers to take up this position anyway, when one considers the concept of continuously distributed media as more natural than the abstract "mass points" of point mechanics.[24]) The certainty of the validity of this axiom is justified that such an ansatz corresponds with our general physical intuition and habitual ways of thinking, but in particular therein, that it is adaptive to represent the empirical facts sufficiently enough.

3c. Application to continuously deformable bodies. The established formal operations of the calculus of variations enable easily, to transform the principle of virtual displacements into a number of equations between forces and stresses.[25]) Consider at first only the *aribtrarily continuously deformable medium* which is typically not at all constrained, then the condition (4) must be satisfied for every system of continuous functions $\delta x, \delta y, \delta z$.

[24] This perception has recently been represented in particular by *G. Hamel* (Math. Ann. 66 (1908), p. 350 and Jahresb. d. Math.-Ver. 18 (1909), p. 357; cf. also his textbook "Elementare Mechanik", Leipzig 1912); therein he introduces a complete axiomatic system of the mechanics of continua, in which the fundamental principle, used here, follows from a sequence of independent theorems.

[25] Already*Lagrange* proceeded in the Méc. an. in this way to treat the problems therein; see remark 23.

partielle Integration ergiebt dann, falls Kräfte, Spannungen und deren partielle Ableitungen überall in V stetig sind, die Gleichungen:

1) an jeder Stelle des Bereiches V

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \varrho X = 0 \qquad (X, Y, Z), \tag{5a}$$

2) an jeder Stelle der Oberfläche S mit der *äusseren* Normalenrichtung n

$$X_x \cos nx + X_y \cos ny + X_z \cos nz = \overline{X} \qquad (X, Y, Z). \tag{5b}$$

Damit sind die sog. „Spannungsgleichungen" nebst den zugehörigen Oberflächenbedingungen gewonnen, die die *notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür geben, dass ein bestimmtes in einer gewissen Lage auf ein frei deformierbares Kontinuum wirkendes Kraft- und Spannungssystem im Gleichgewicht ist.*[26]) Freilich genügen diese Bedingungen keineswegs, um die Spannungs- und Kraftkomponenten zu *bestimmen*: dazu müssen noch die erst später zu behandelnden Relationen hinzutreten, die die Abhängigkeit der Kräfte und Spannungen von der wirklich stattfindenden Deformation des Kontinuums oder von irgendwelchen äusseren Ursachen zum Ausdruck bringen (vgl. IV 6, Nr. **26**, *Stäckel* und IV 23, **3**b, *Müller-Timpe*).

In (4), (5) sind die unabhängigen Variablen Koordinaten im *deformierten* Zustand des Kontinuums, und auch Kraft- und Spannungskomponenten finden ihre anschauliche Bedeutung als Wirkungen auf Massen- bzw. Flächeneinheiten des Mediums im *deformierten* Zustand. Demgegenüber verwendet man seit *S. D. Poisson*[27]) vielfach auch die a, b, c, aufgefasst als Koordinaten in der Ausgangslage des Mediums als unabhängige Variable; das führt zwar auf Kraftkomponenten von weniger unmittelbarer physikalischer Bedeutung, ist aber analytisch für viele Zwecke bequemer. Es wird nämlich, wenn

$$k \cdot dS_0 = dS \tag{6}$$

[26] Die Gleichungen gehen auf *A. L. Cauchy* zurück, Exerc. de math. 2 (1827) = Oeuvres 7, sér. II, p. 141. Vgl. die weiteren Angaben hierüber in IV 23, Nr. **3**b, *Müller-Timpe*.

[27] Paris Mém. de l'Acad. 8 (1829), p. 387; J. éc. polyt. 20 (1831), p. 54. Dieser Unterschied ist vielfach übersehen worden, da er bei der Betrachtung unendlichkleiner Deformationen von einem spannungslosen Ruhezustande aus tatsächlich verschwindet; so ist er erst in der Entwicklung der Elastizitätstheorie endlicher Deformationen recht zur Geltung gekommen (vgl. unten Nr. **7** und **9**).

For forces, stresses and partial derivatives being continuous everywhere in V, the transformation of (4) yields by integration by parts the equations:

1) for every point of the domain V

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \varrho X = 0 \qquad (X, Y, Z), \tag{5a}$$

2) for every point on the surface S with *outward pointing* normal direction n

$$X_x \cos nx + X_y \cos ny + X_z \cos nz = \overline{X} \qquad (X, Y, Z). \tag{5b}$$

Thereby the so-called "equations of stress" together with the corresponding surface conditions are obtained, which give *the necessary and sufficient conditions that a particular force and stress system, acting on a freely deformable continuum in a certain position, is in equilibrium.*[26]) Certainly these conditions are not enough, to *determine* the stress and force components: To this we must add the relations which will be treated later on and which express the dependence of forces and stresses on the actual deformation of the continuum or on any external causes (cf. IV 6, No. **26**, *Stäckel* and IV 23, **3**b, *Müller-Timpe*).

In (4), (5) the independent variables are the coordinates of the *deformed* state of the continuum, and also force and stress components have their descriptive meaning as effect per unit mass or surface of the medium in the deformed state. On the other hand, since *S. D. Poisson* [27]) one often refers to a, b, c, being the coordinates of the initial position of the medium as independent variables; indeed, this leads to force components of physical interpretation less immediate, but it is for many cases analytically more convenient. Setting

$$k \cdot dS_0 = dS \tag{6}$$

[26] These equations can be traced back to *A. L. Cauchy*, Exerc. de math. 2 (1827) = Oeuvres 7, sér. II, p. 141. Cf. the further references about this in IV 23, No. **3**b, *Müller-Timpe*.

[27] Paris Mém. de l'Acad. 8 (1829), p. 387; J. éc. polyt. 20 (1831), p. 54. This difference has been frequently overlooked, since it vanishes in fact for the consideration of infinitesimal deformations from a stress free state of equilibrium; so it has shown to be useful only when the development of the theory of elasticity of finite deformations (cf. below No. **7** and **9**) [was achieved].

gesetzt und Nr. **2**, (7) berücksichtigt wird:

$$(7)\quad \delta A = \iiint\limits_{(V_0)} \Big[\varrho_0 \sum_{(xyz)} X\delta x - \sum_{\binom{x\,y\,z}{XYZ}} \Big(X_a \frac{\partial \delta x}{\partial a} + X_b \frac{\partial \delta x}{\partial b} + X_c \frac{\partial \delta x}{\partial c}\Big)\Big] dV_0 + \iint\limits_{(S_0)} \sum_{\binom{x\,y\,z}{XYZ}} \overline{X} k \delta x \cdot dS_0,$$

wobei

$$(8)\qquad \Delta \cdot X_x = X_a \frac{\partial x}{\partial a} + X_b \frac{\partial x}{\partial b} + X_c \frac{\partial x}{\partial c} \qquad (X, Y, Z; x, y, z).$$

Daher sind, wie durch Auflösung und Vergleich mit (3) folgt, X_a, Y_a, Z_a die Komponenten der Flächenkraft, die auf ein Element der Fläche a = const. vermöge des Spannungszustandes in der nach der Seite wachsender a hin gelegenen Materie wirkt, berechnet auf die Einheit der Fläche in der Ausgangslage im a-b-c-Raum.[28]) Aus (7) entsteht eine *neue Form der Gleichgewichtsbedingungen*[28]) genau so wie (5a), (5b) aus (4) entstehen:

$$(9a)\qquad \frac{\partial X_a}{\partial a} + \frac{\partial X_b}{\partial b} + \frac{\partial X_c}{\partial c} + \varrho_0 X = 0 \quad \text{innerhalb } V_0 \qquad (X, Y, Z),$$

$$(9b)\qquad X_a \cos n_0 a + X_b \cdot \cos n_0 b + X_c \cos n_0 c = k\overline{X} \quad \text{auf } S_0 \quad (X, Y, Z);$$

hierbei bedeutet n_0 die äussere Normalenrichtung des Flächenelementes dS_0 im a-b-c-Raum.

3d. Beziehungen zur Mechanik starrer Körper. Man kann die Gleichgewichtsbedingungen (5) noch in etwas anderer Weise aus dem Prinzip (4) herleiten und erhält dadurch den Zusammenhang mit dem nach dem Vorgange von *A. L. Cauchy* [29]) vielfach zu ihrer direkten Aufstellung benutzten *„Erstarrungsprinzip“*, dass jeder aus dem deformierten Kontinuum herausgeschnittene Teil unter der Einwirkung der in seinem Inneren angreifenden Volumkräfte und der an seiner Oberfläche angreifenden Kräfte (3) wie ein starrer Körper im Gleichgewicht sein muss. Zu diesem Ende braucht man nur gewisse *unstetige* Verrückungen zu betrachten, die freilich den Zusammenhang des stetig deformierbaren Kontinuums verletzen und für die δA daher zunächst

[28] Vgl. IV 23, Nr. **6** *(Müller-Timpe)* und etwa die ausführliche Darstellung (die freilich Symmetrie der Spannungsdyade voraussetzt) bei *E.* und *F. Cosserat*; Ann. de Toulouse, X (1896), p. 146; die Schreibweise $X_a, X_b, \ldots$ erscheint konsequenter als die dort gebrauchte $A_x, B_x, \ldots$, da sie grosse Buchstaben für die Bezeichnung der Komponenten, die Indizes aber für die Charakterisierung des betrachteten Flächenelemente beibehält.

[29] Bull. soc. philomath. 1823, p. 9 und Exerc. de math. 2 (1827) = Oeuvres, sér. II, t. 7, p. 141; vgl. die Angaben in IV 6, Nr. **26**, *Stäckel* und IV 23, Nr. **3**b, *Müller-Timpe*.

and considering No. **2**, (7), we obtain namely:

$$(7)\quad \delta A = \iiint\limits_{(V_0)} \Big[\varrho_0 \sum_{(xyz)} X\delta x - \sum_{\binom{x\,y\,z}{X\,Y\,Z}} \Big(X_a \frac{\partial \delta x}{\partial a} + X_b \frac{\partial \delta x}{\partial b} + X_c \frac{\partial \delta x}{\partial c}\Big)\Big] dV_0 + \iint\limits_{(S_0)} \sum_{\binom{x\,y\,z}{X\,Y\,Z}} \overline{X} k \delta x \cdot dS_0,$$

where

$$(8)\qquad \Delta \cdot X_x = X_a \frac{\partial x}{\partial a} + X_b \frac{\partial x}{\partial b} + X_c \frac{\partial x}{\partial c} \qquad (X, Y, Z; x, y, z).$$

Therefore, by solving and comparing with (3) it follows, that X_a, Y_a, Z_a are the components of the surface force, computed per unit area of the initial position in the a-b-c-space, which due to the stress state acts via an element of the surface a = const. on the matter lying on this side for which a is increasing.[28]) From (7) a *new form of the equilibrium conditions*[28]) arises, in the same manner as (5a), (5b) arise from (4):

$$(9a)\qquad \frac{\partial X_a}{\partial a} + \frac{\partial X_b}{\partial b} + \frac{\partial X_c}{\partial c} + \varrho_0 X = 0 \quad \text{in } V_0 \qquad (X, Y, Z),$$

$$(9b)\qquad X_a \cos n_0 a + X_b \cdot \cos n_0 b + X_c \cos n_0 c = k\overline{X} \quad \text{on } S_0 \quad (X, Y, Z);$$

hereby n_0 denotes the outward pointing normal direction of the surface element dS_0 in the a-b-c-space.

3d. Relation to the mechanics of rigid bodies. It is also possible to derive the equilibrium conditions (5) in a slightly different way starting with the principle (4) and thereby one obtains the connection to the "rigidifying principle", frequently used for the direct derivation of the equilibrium conditions according to the approach of *A. L. Cauchy* [29]), stating that every part cut out of the deformable continuum exposed to the volume forces applied within the part and the forces applied on the surface (3) must be in equilibrium like a rigid body. For this, one only has to consider certain *discontinuous* displacements, which certainly violate the connection of the continuously deformable continuum and for which δA does

[28] Cf. IV 23, No. **6** *(Müller-Timpe)* and for instance the detailed presentation (which presumes certainly the symmetry of the stress dyad) of *E.* and *F. Cosserat*; Ann. de Toulouse, X (1896), p. 146; the notation $X_a, X_b, \ldots$ seems to be more consistent than $A_x, B_x, \ldots,$ used there, since it remains the capital letters for the denotation of the components, but the indices for the characterization of the considered surface element.

[29] Bull. soc. philomath. 1823, p. 9 and Exerc. de math. 2 (1827) = Oeuvres, sér. II, t. 7, p. 141; cf. the references in IV 6, No. **26**, *Stäckel* and IV 23, No. **3**b, *Müller-Timpe*.

nicht zu verschwinden braucht: man kommt aber zum Ziele, wenn man sie durch eine Schar *stetiger* virtueller Verrückungen approximiert.

So werde eine Verrückung, die in einem Teilgebiet V_1 von V mit der Grenzfläche S_1 konstante Werte $\delta x = \alpha$, $\delta y = \beta$, $\delta z = \gamma$ hat, außerhalb V_1 aber 0 ist (d. i. eine *Translation* des Bereiches V_1), durch stetige virtuelle Verrückungen angenähert, indem V_1 mit einem beliebig kleinen Gebiete V_2 umgeben wird, innerhalb dessen $\delta x, \delta y, \delta z$ von α, β, γ nach 0 stetig abfallen. Für eine solche virtuelle Verrückung folgt aus (4):

$$\iiint\limits_{(V_1)} \varrho(X\alpha + Y\beta + Z\gamma)dV_1 + \iint\limits_{(S_1)} (X_n\alpha + Y_n\beta + Z_n\gamma)dS_1 \\ + \iiint\limits_{(V_2)} \sum_{\binom{x\,y\,z}{XYZ}} \Big(\varrho X + \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\Big)\delta x \cdot dV_2 = 0,$$

wo n die von V_1 fortzeigende Normale von dS_1 ist. Lässt man nun V_2 immer kleiner werden, so wird das zweite Integral beliebig klein, da die $X, X_x, \ldots$ und ihre Ableitungen endlich bleiben, und es ergeben sich, da α, β, γ beliebig ist, drei Gleichungen

$$\iiint\limits_{(V_1)} \varrho X dV_1 + \iint\limits_{(S_1)} X_n dS = 0 \quad (X, Y, Z). \tag{10}$$

Das sind genau die Gleichungen, die durch Anwendung des sog. *Schwerpunktsatzes* auf den im oben geschilderten Sinne starr gedachten und aus dem Kontinuum herausgeschnittenen Teil V_1 entstehen. Wegen der Willkür des Bereiches V_1 kann man dann bekanntlich aus (10) die Gleichungen (5a) gewinnen (vgl. IV 23, *Müller-Timpe*, p. 23).

Geht man in ähnlicher Weise von einer starren Drehung eines Teilbereiches V_1 mit den Komponenten $qz - ry$, $rx - pz$, $py - qx$ aus, so folgen drei Gleichungen:

$$\iiint\limits_{(V_1)} \{\varrho(Zy - Yz) + Y_z - Z_y\}dV_1 + \iint\limits_{(S_1)} (Z_n y - Y_n z)dS_1 = 0 \ (X, Y, Z). \tag{11}$$

Das stimmt nur dann mit dem auf V_1 als starren Körper angewandten *Flächensatz* überein, wenn man den Momenten der räumlich verteilten Kräfte X, Y, Z und der Flächenkräfte X_n, Y_n, Z_n noch ein direkt am Volumelement angreifendes Drehmoment entgegengesetzt gleich dem Vektorbestandteil (2′) der Spannungsdyade hinzurechnet. Postuliert man also den Flächensatz in der üblichen Form, dass die Summe der Momente der Volumen- und Flächenkräfte verschwindet, so folgt daraus unmittelbar die Symmetrie der Spannungsdyade.[30])

[30] Diese Forderung hat *G. Hamel* [24]) als „Boltzmannsches Axiom“ unter seine Axiome der Mechanik der Volumenelemente aufgenommen.

not have to vanish at first: though one succeeds by approximating it with a family of *continuous* virtual displacements.

Hence, a displacement, which on a subset V_1 of V with boundary S_1 has constant values $\delta x = \alpha$, $\delta y = \beta$, $\delta z = \gamma$, but is 0 outside of V_1 (which is a *translation* of the domain V_1), is approximated by continuous virtual displacements, by surrounding V_1 with an arbitrary small region V_2, in which $\delta x, \delta y, \delta z$ decrease continuously from α, β, γ to 0. For such a virtual displacement it follows from (4):

$$\iiint\limits_{(V_1)} \varrho(X\alpha + Y\beta + Z\gamma)dV_1 + \iint\limits_{(S_1)} (X_n\alpha + Y_n\beta + Z_n\gamma)dS_1 + \iiint\limits_{(V_2)} \sum_{\left(\substack{x\,y\,z\\ X\,Y\,Z}\right)} \left(\varrho X + \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right)\delta x \cdot dV_2 = 0,$$

where n is the normal of dS_1 being outward pointing with respect to V_1. Letting V_2 become smaller and smaller, the second integral gets arbitrary small, since $X, X_x, \ldots$ and the derivatives thereof remain finite, and since α, β, γ are arbitrary, one obtains the three equations

$$\text{(10)} \qquad \iiint\limits_{(V_1)} \varrho X dV_1 + \iint\limits_{(S_1)} X_n dS = 0 \quad (X, Y, Z).$$

These are precisely the equations obtained by the application of the so-called *center-of-mass theorem* on the part V_1 being cut out of the continuum and being regarded as rigid in the above mentioned manner. Due to the arbitrariness of the domain V_1, as is generally known, one can gain from (10) the equations (5a). (cf. IV 23, *Müller-Timpe*, p. 23).

Proceeding on the assumption of a rigid rotation of the subset V_1 with components $qz - ry$, $rx - pz$, $py - qx$, consequently three equations follow:

$$\text{(11)} \qquad \iiint\limits_{(V_1)} \{\varrho(Zy - Yz) + Y_z - Z_y\}dV_1 + \iint\limits_{(S_1)} (Z_n y - Y_n z)dS_1 = 0 \ (X, Y, Z).$$

This coincides exactly with the *law of equal area* applied to V_1 if one adds to the moments of the spatially distribute forces X, Y, Z and the surface forces X_n, Y_n, Z_n an opposed torque exerted directly at the volume element corresponding to the vector components (2′) of the stress dyad. By postulating the law of equal areas in the usual form, i. e. the sum of the moments of the volume and surface forces vanishes, thereof the symmetry of the stress dyad follows immediately.[30])

[30] This requirement denoted as "Boltzmann axiom" has been included by *G. Hamel* [24]) into his axioms of the mechanics of volume elements.

In nahem Zusammenhange mit diesen Tatsachen steht eine andere Auffassung des Prinzipes der virtuellen Verrückungen, die von vornherein nur die eigentlichen *Kräfte*, die Massenkräfte X, Y, Z und die Flächenkräfte $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$, als gegeben betrachtet; es ist die folgende leichte Fortbildung der Formulierung von *G. Piola* [31]) : *Für das Gleichgewicht ist notwendig, dass die virtuelle Arbeit der angeführten Kräfte*

$$\iiint\limits_{(V)} (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)dV + \iint\limits_{(S)} (\overline{X}\delta x + \overline{Y}\delta y + \overline{Z}\delta z)dS$$

verschwindet für alle rein translatorischen virtuellen Verrückungen des ganzen Bereiches V. Drückt man diese Nebenbedingung für die Verrückungen, nämlich durch die 9 partiellen Differentialgleichungen aus:

$$\frac{\partial \delta x}{\partial x} = 0, \frac{\partial \delta x}{\partial y} = 0, \ldots, \frac{\partial \delta z}{\partial z} = 0,$$

so kann man nach dem bekannten Kalkül der Variationsrechnung 9 zugehörige Lagrangesche Faktoren $-X_x, -X_y, \ldots, -Z_z$ einführen und erhält dann genau die Gleichung (4) des alten Prinzips, wobei sich also die *Komponenten der Spannungsdyade als Lagrangesche Faktoren gewisser Starrheitsbedingungen* erweisen. Sie werden natürlich durch dieses Variationsprinzip nicht bestimmt, spielen vielmehr genau die gleiche Rolle wie die inneren Spannungen in den statisch unbestimmten Problemen der Mechanik starrer Körper.[32])

Stellt man die gleiche Forderung für *alle* starren Bewegungen von V überhaupt (statt nur für die Translationen), so erhält man genau den in IV 23, p. 23 wiedergegebenen *Piola*schen Ansatz, der gemäss den 6 Nebenbedingungen nur 6 Lagrangesche Faktoren und damit eine symmetrische Spannungsdyade, liefert.

3e. Zwei- und eindimensionale Kontinua im dreidimensionalen Raume. Alle diese Ansätze lassen sich unmittelbar auch für die am Ende von Nr. **2** berührten zwei- und eindimensionalen Kontinua, die im dreidimensionalen Raume gelegen sind, aufstellen.[33]) Die einzige Modifikation ist, dass sich die Dimension der Integrationsgebiete ändert, und dass statt der Ableitungen der virtuellen Verrückungen nach den drei Raumkoordinaten diejenigen nach den zwei bzw. der einen Koordinate innerhalb des deformierten Mediums eingehen.

---

[31] Modena Mem. 24, parte 1 (1848), p. 1; vgl. IV 23, Nr. **3**b, *Müller-Timpe*.

[32] Vgl. auch IV 6, Nr. **26** (*Stäckel*) , p. 550 und IV 23, Nr. **3**b (*Müller-Timpe*), p. 24.

[33] Für eine Reihe besonderer Probleme finden sich auch diese Ansätze schon in *Lagrange*, Mécan. anal.; s. 1. part, sect IV, Nr. 25 ff.; sect. V, chap. III.

In close relationship to these facts is another notion of the principle of virtual displacements considering at first only the actual *forces*, i. e. the forces per unit mass X, Y, Z and the surface forces $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$, as given; it is the following slightly advanced formulation of *G. Piola* [31]): *For the equilibrium it is necessary that the virtual work of the applied forces*

$$\iiint\limits_{(V)} (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)dV + \iint\limits_{(S)} (\overline{X}\delta x + \overline{Y}\delta y + \overline{Z}\delta z)dS$$

vanishes for all purely translational virtual displacements of the whole domain V. Expressing these constraints of the displacements identical to the 9 partial differential equations:

$$\frac{\partial \delta x}{\partial x} = 0, \frac{\partial \delta x}{\partial y} = 0, \ldots, \frac{\partial \delta z}{\partial z} = 0,$$

then, due to the well-known calculus of variations one can introduce 9 corresponding Lagrange multipliers $-X_x, -X_y, \ldots, -Z_z$ and [one] obtains precisely equation (4) of the old principle, whereas the *components of the stress dyad* appear as *Lagrange multiplier of certain rigidity constraints*. Certainly, they are not determined by this variational principle and play in fact exactly the same role as the internal stresses of the statically indeterminate problems of rigid body mechanics.[32])

Assuming the same requirement for *all* rigid motions of V at all (instead of mere translations), one obtains precisely *Piola*'s ansatz given in IV 23, p. 23, which provides due to the 6 constraints only 6 Lagrange multipliers and consequently a symmetric stress dyad.

3e. Two- and one-dimensional continua in the three-dimensional space. All these fundamentals can immediately be formulated also for two- and one-dimensional continua being embedded in the three-dimensional space, which have been mentioned at the end of No. **2**.[33]) The only modification is the change in the dimension of the domain of integration and that instead of the derivatives of the virtual displacements with respect to the three spatial directions, the derivatives with respect to the two or one coordinate within the deformed medium enter.

---

[31] Modena Mem. 24, parte 1 (1848), p. 1; vgl. IV 23, No. **3**b, *Müller-Timpe*.

[32] Cf. also IV 6, No. **26** (*Stäckel*) , p. 550 and IV 23, No. **3**b (*Müller-Timpe*), p. 24.

[33] For a series of particular problems these fundamentals can already be found in *Lagrange*, Mécan. anal.; s. 1. part, sect IV, No. 25 ff.; sect. V, chap. III.

Betrachten wir im einzelnen zunächst ein *zweidimensionales Kontinuum*, das im deformierten Zustande ein einfach zusammenhängendes Flächenstück S mit der Randkurve C bildet; auf S sei ein — der Einfachheit halber — *orthogonales* Parametersystem u, v festgelegt, Längen- und Flächenelement sei durch

$$ds^2 = E du^2 + G dv^2,\ dS = h du dv,\ h = \sqrt{EG}$$

gegeben, und es bezeichne ϱ die Flächendichte der Massenbelegung. Dann betrachten wir die virtuelle Arbeit:

$$\delta A = \iint\limits_{(S)} \sum_{\binom{x\,y\,z}{X\,Y\,Z}} \left\{\varrho X \delta x - \left(\frac{X_u}{\sqrt{E}} \frac{\partial \delta x}{\partial u} + \frac{X_v}{\sqrt{G}} \frac{\partial \delta x}{\partial v}\right)\right\} dS + \int\limits_{(C)} \sum_{\binom{x\,y\,z}{X\,Y\,Z}} \overline{X} \delta x ds. \tag{12}$$

Hier bedeuten $X, Y, Z, \overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ die Komponenten der an der Masseneinheit innerhalb S bzw. an der Längeneinheit auf C angreifenden Kraft, über die Grössen $X_u, \ldots$ aber lassen sich ganz analoge Aussagen entwickeln, wie oben über $X_x, \ldots$; sie bewirken einerseits gewisse an den auf S gelegenen Massen angreifende Kräfte, andererseits einen innerhalb S herrschenden Spannungszustand derart, dass auf jedes in S gelegene Linienelement vermöge des Spannungszustandes auf einer Seite pro Längeneinheit eine Kraft

$$X_\nu = X_u \cos(\nu, u) + X_v \cos(\nu, v) \tag{13}$$

wirkt; hierin bedeutet n die innerhalb S gelegene nach der betrachteten Seite hin weisende Normalenrichtung des Elementes.

Für ein Medium, das alle stetigen Verrückungen zulässt, kann man die Bedingung $\delta A = 0$ des Prinzips der virtuellen Verrückungen in 6 Gleichgewichtsbedingungen[34]) auflösen, indem man δA durch die bekannten Methoden der partiellen Integration umformt:

$$\frac{1}{h}\left(\frac{\partial \sqrt{G} X_u}{\partial u} + \frac{\partial \sqrt{E} X_v}{\partial v}\right) + \varrho X = 0 \quad \text{auf } S \quad (X, Y, Z), \tag{14a}$$

$$X_u \cos \nu u + X_v \cos \nu v = \overline{X} \quad \text{auf } C \quad (X, Y, Z), \tag{14b}$$

hier bedeutet ν diejenige Richtung, die innerhalb der Fläche S normal auf C steht und von dem betrachteten Flächenstück abgewandt ist. — Auch diese Gleichungen kann man leicht auf die Anfangsparameter a, b transformieren, wenn man von dem transformierten Aus-

[34] Die allgemeine Form dieser Gleichungen unter den verschiedensten Auffassungen geben *E.* und *F. Cosserat*, Corps déform., chap. III, übrigens sogleich für den Fall orientierter Teilchen (s. Nr. **4**b; vgl. auch IV 11, Nr. **20**, *K. Heun*). Über die seit *Lagrange*s Ansätzen [33]) behandelten speziellen Probleme vgl. ausserdem IV 6, Nr. **24**, *Stäckel*.

At first, we consider in particular a *two-dimensional continuum*, which consists in the deformed state of a simply connected surface S with boundary curve C; on S let — for the sake of simplicity — u, v be an *orthogonal* system of parameters and let the line and surface elements be

$$ds^2 = E du^2 + G dv^2,\ dS = h du dv,\ h = \sqrt{EG}$$

and ϱ denotes the surface density of the mass distribution. Then we consider the virtual work [expression]:

$$\delta A = \iint\limits_{(S)} \sum_{\binom{x\,y\,z}{X\,Y\,Z}} \left\{ \varrho X \delta x - \left(\frac{X_u}{\sqrt{E}} \frac{\partial \delta x}{\partial u} + \frac{X_v}{\sqrt{G}} \frac{\partial \delta x}{\partial v} \right) \right\} dS + \int\limits_{(C)} \sum_{\binom{x\,y\,z}{X\,Y\,Z}} \overline{X} \delta x ds. \tag{12}$$

Herein X, Y, Z, $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ denote the components of the applied forces in S per unit mass and on C per unit length, for the quantities $X_u, \ldots$ similar conclusions can be drawn as above for $X_x, \ldots$; on the one hand they result in certain forces exerted on the masses of S, on the other hand [they cause] a stress state within S such that due to this stress state on one side of every line element lying on S the force per unit length

$$X_\nu = X_u \cos(\nu, u) + X_v \cos(\nu, v) \tag{13}$$

acts; herein n[†] denotes the normal direction lying within S and pointing in direction of the considered side of the element.

For a medium, which allows for all continuous displacements, one can solve the condition $\delta A = 0$ of the principle of virtual displacements with respect to 6 equilibrium conditions[34]), by transforming δA using the familiar methods of integration by parts:

$$\frac{1}{h} \left(\frac{\partial \sqrt{G} X_u}{\partial u} + \frac{\partial \sqrt{E} X_v}{\partial v} \right) + \varrho X = 0 \quad \text{on } S \quad (X, Y, Z), \tag{14a}$$

$$X_u \cos \nu u + X_v \cos \nu v = \overline{X} \quad \text{on } C \quad (X, Y, Z), \tag{14b}$$

here ν denotes the direction which is within the surface S and is normal to the curve C pointing away from the considered surface. — Also these equations can easily be transformed with respect to the initial parameters a, b, when starting with the transformed

[†] Most probably, it should be a ν – (TN)

[34] The general form of these equations from different viewpoints are given by *E.* and *F. Cosserat*, Corps déform., chap. III, by the way directly for the case of oriented particles (see No. **4**b; cf. also IV 11, No. **20**, *K. Heun*). For the particular problems treated since *Lagrange*'s fundamental studies [33]) cf. also IV 6, No. **24**, *Stäckel*.

druck der virtuellen Arbeit

$$\delta A = \iint\limits_{(S_0)} \sum_{\binom{x\,y\,z}{X\,Y\,Z}} \left\{ \varrho_0 X - \left(X_a \frac{\partial \delta x}{\partial a} + X_b \frac{\partial \delta x}{\partial b} \right) \right\} da\, db + \int\limits_{(C_0)} \sum_{\binom{x\,y\,z}{X\,Y\,Z}} \overline{X} \delta x \frac{ds}{ds_0} ds_0 \tag{15}$$

ausgeht, wobei

$$h \frac{\partial(u,v)}{\partial(a,b)} X_u = X_a \frac{\partial u}{\partial a} + X_b \frac{\partial u}{\partial b} \qquad (X, Y, Z; u, v); \tag{16}$$

durch Vergleich mit (13) ergiebt sich, dass $X_a, \dots$ die vermöge des Spannungszustandes auf Linienelemente a = const., b = const. wirkenden Kräfte bedeuten, berechnet auf Längeneinheiten in der a-b-Ebene.

Ganz analog gestaltet sich alles bei *eindimensionalen Kontinuis*.[35]) Ist s $(0 \leqq s \leqq l)$ die Bogenlänge auf der in deformierter Gestalt gebildeten Kurve, so hat man

$$\delta A = \int\limits_0^l \sum_{\binom{x\,y\,z}{X\,Y\,Z}} \left\{ \varrho X \delta x - X_s \frac{\partial \delta x}{\partial s} \right\} ds + \left[\sum_{\binom{x\,y\,z}{X\,Y\,Z}} \overline{X} \delta x \right]_{s=0}^{s=l}, \tag{17}$$

wo die Bedeutung der einzelnen Größen sich ganz wie soeben ergiebt, und bei willkürlichen stetigen Variationen lauten die Gleichgewichtsbedingungen

$$\frac{dX_s}{ds} + \varrho X = 0 \quad \text{für} \quad 0 < s < l \quad (X, Y, Z) \tag{18a}$$

$$X_s = \overline{X} \quad \text{für} \quad s = 0,\ s = l \quad (X, Y, Z). \tag{18b}$$

Auch hier ist es mitunter zweckmässig, unter Benutzung der Formel

$$\delta A = \int\limits_0^{l_0} \sum_{\binom{x\,y\,z}{X\,Y\,Z}} \left\{ \varrho_0 X \delta x - X_a \frac{\partial \delta x}{\partial a} \right\} da + \left[\sum_{\binom{x\,y\,z}{X\,Y\,Z}} \overline{X} \delta x \right]_{a=0}^{a=l_0},\ X_s \frac{ds}{da} = X_a \tag{19}$$

den Anfangsparameter a als Unabhängige einzuführen.

4. Erweiterungen des Prinzipes der virtuellen Verrückungen.

4a. Auftreten höherer Ableitungen der Verrückungen. Man kann an dem in Nr. **3** formulierten Ansatz des Prinzipes der virtuellen Verrückungen noch eine Reihe von Erweiterungen anbringen, die es erst in weitestem Masse befähigen, alle in der Mechanik der Kontinua auftretenden Gesetze zu umfassen. Am nächsten liegt es, in die virtuelle Arbeit pro Volumenelement eine Linearform der 18 *zweiten Ableitungen* der virtuellen Verrückungen $\frac{\partial^2 \delta x}{\partial x^2}, \dots$ aufzunehmen. In der Tat haben Probleme, bei denen es sich als nötig erwies, die

[35] Vgl. *E.* und *F. Cosserat*, Corps déformables, chap. II sowie IV 11, Nr. **19** (*K. Heun*) und IV 6, Nr. **23** (*P. Stäckel*).

expression of the virtual work

$$\delta A = \iint\limits_{(S_0)} \sum_{\binom{x\,y\,z}{X\,Y\,Z}} \left\{\varrho_0 X - \left(X_a \frac{\partial \delta x}{\partial a} + X_b \frac{\partial \delta x}{\partial b}\right)\right\} da\, db + \int\limits_{(C_0)} \sum_{\binom{x\,y\,z}{X\,Y\,Z}} \overline{X} \delta x \frac{ds}{ds_0} ds_0 \tag{15}$$

where

$$h \frac{\partial(u,v)}{\partial(a,b)} X_u = X_a \frac{\partial u}{\partial a} + X_b \frac{\partial u}{\partial b} \qquad (X, Y, Z; u, v); \tag{16}$$

a comparison with (13) results in the interpretation, that $X_a, \dots$ denote the forces due to the stress state acting at the line elements a = const., b = const., computed with respect to the unit of length in the a-b-plane.

Everything is entirely analogous for *one-dimensional continua*.[35]) Let s $(0 \leqq s \leqq l)$ be the arc length of the curve representing the deformed state, then one has

$$\delta A = \int\limits_0^l \sum_{\binom{x\,y\,z}{X\,Y\,Z}} \left\{\varrho X \delta x - X_s \frac{\partial \delta x}{\partial s}\right\} ds + \left[\sum_{\binom{x\,y\,z}{X\,Y\,Z}} \overline{X} \delta x\right]_{s=0}^{s=l}, \tag{17}$$

in which the interpretation of each quantity is obtained as above, and for arbitrary continuous variations the equilibrium conditions are

$$\frac{dX_s}{ds} + \varrho X = 0 \quad \text{for} \quad 0 < s < l \quad (X, Y, Z) \tag{18a}$$

$$X_s = \overline{X} \quad \text{for} \quad s = 0,\ s = l \quad (X, Y, Z). \tag{18b}$$

By using the formula

$$\delta A = \int\limits_0^{l_0} \sum_{\binom{x\,y\,z}{X\,Y\,Z}} \left\{\varrho_0 X \delta x - X_a \frac{\partial \delta x}{\partial a}\right\} da + \left[\sum_{\binom{x\,y\,z}{X\,Y\,Z}} \overline{X} \delta x\right]_{a=0}^{a=l_0}, \ X_s \frac{ds}{da} = X_a \tag{19}$$

it is also here convenient to introduce the initial parameter a as independent quantity.

4. Enhancement of the principle of virtual displacements.

4a. Appearance of higher order derivatives of displacements. One can apply a number of enhancements to the ansatz of the principle of virtual displacements presented in No. **3**, which enable it to cover in the broadest sense all laws appearing in the mechanics of continua. The most obvious is to add to the virtual work per unit volume a linear form of the 18 *second derivatives* of the virtual displacements $\frac{\partial^2 \delta x}{\partial x^2}, \dots$. In fact there have been problems, in which it was necessary

[35] Cf. *E.* and *F. Cosserat*, Corps déformables, chap. II as well as IV 11, No. **19** (*K. Heun*) and IV 6, No. **23** (*P. Stäckel*).

Energiefunktionen von den *zweiten* Ableitungen der Deformationsfunktionen abhängen zu lassen, auf hierhin gehörende Ausdrücke geführt; in erster Linie kommt dies für die ein- und zweidimensionalen Kontinua (Drähte und Platten) in Betracht.[36])

Eine eingehende Behandlung dieses Ansatzes vom allgemeinen Standpunkte aus scheint nicht vorzuliegen, und sie erübrigt sich durch die Bemerkung, dass man durch partielle Integration die neuen Zusatzglieder des Volumenintegrals auf Glieder zurückführen kann, die lediglich die *ersten* Ableitungen der $\delta x, \delta y, \delta z$ enthalten; die neuen Wirkungen im Innern des Körpers ordnen sich also dem alten Begriff der Spannungsdyade ein. Freilich tritt dabei ein *Oberflächenintegral* von der Gestalt

$$(1) \qquad \iint\limits_{(S)} \sum_{\binom{x\,y\,z}{X\,Y\,Z}} \left(\overline{X}_x \frac{\partial \delta x}{\partial x} + \overline{X}_y \frac{\partial \delta x}{\partial y} + \overline{X}_z \frac{\partial \delta x}{\partial z}\right) dS$$

neu hinzu, das einmal das Vorhandensein einer *Oberflächenspannung* beweist, wie sie in Nr. **3**e bei einem selbständig existierenden zweidimensionalen Kontinuum betrachtet wurde, darüber hinaus aber im allgemeinen noch in (12) von Nr. **3**e nicht enthaltene Terme besitzt, die von den Ableitungen der $\delta x, \ldots$ *normal* zur Fläche abhängen. Diese neuen an der Oberfläche angreifenden Spannungswirkungen scheinen noch keine Anwendung gefunden zu haben, während jene anderen Glieder lediglich zu den alten Randbedingungen (5b) von Nr. **3** einen Beitrag von der Form der in (14a) auftretenden Glieder liefern und allenfalls an Grenzlinien oder Unstetigkeitslinien der Oberfläche noch Linienkräfte vom Typus (14b) ergeben.[37])

4b. Medien mit orientierten Teilchen. Dehnen wir ferner unsere Betrachtungen auf die in Nr. **2**b definierten Medien mit orientierten Teilchen aus, so muss die neue Annahme in Kraft treten, *dass auch bei jeder virtuellen Rotation des Kontinuums eine virtuelle Arbeit geleistet wird, die eine lineare homogene Funktion der Gesamtheit der Werte der Rotationskomponenten $\delta\pi, \delta\kappa, \delta\varrho$ ist* für die wir den Nr. **3**, (1) analogen Ansatz machen:

$$(2) \qquad \iiint\limits_{(V)} \varrho(L\delta\pi + M\delta\kappa + N\delta\varrho)dV + \iint\limits_{(S)} (\overline{L}\delta\pi + \overline{M}\delta\kappa + \overline{N}\delta\varrho)dS \\ - \iiint\limits_{(V)} \left(L_x \frac{\partial \delta\pi}{\partial x} + L_y \frac{\partial \delta\pi}{\partial y} + \cdots + N_z \frac{\partial \delta\varrho}{\partial z}\right) dV.$$

[36] Vgl. die Erörterungen der Potentialansätze in Nr. **7**a, p. 645 sowie auch Nr. **8**a, p. 660.

[37] Vgl. unten Nr. **12**.

to let the energy function depend on the *second* derivatives, which have led to expressions belonging to here; primarily this comes into consideration for one- and two-dimensional continua (wires and plates).[36])

A thorough treatment of this [new] ansatz from a more general point of view seems not to be available [in the literature] and becomes unnecessary by remarking, that one can transform using integration by parts the new additional terms in the volume integral to terms which include merely the *first* derivatives of $\delta x, \delta y, \delta z$; hence, the new effects within the body are classified in the sense of the old notion of the stress dyad. Certainly, a new *surface integral* of the form

$$\tag{1} \iint\limits_{(S)} \sum_{\binom{x\,y\,z}{XYZ}} \Big(\overline{X}_x \frac{\partial \delta x}{\partial x} + \overline{X}_y \frac{\partial \delta x}{\partial y} + \overline{X}_z \frac{\partial \delta x}{\partial z}\Big) dS$$

appears, which at one point proves the existence of a *surface tension* as it has been considered in No. **3**e for an independently existing two-dimensional continuum, it may contain in addition expressions which are not included in (12) of No. **3**e [and] which depend on the derivatives of the $\delta x, \ldots$ *normal* to the surface. These new effects of stresses interactions applied at the surface, seem not to have found any application so far,while in contrast the other [remaining] terms simply contribute to the old boundary conditions (5b) of No. **3** in the same form as the terms appearing in (14a), and possibly lead to line distributed forces in the sense of (14b) at interfaces or lines of discontinuities.[37])

4b. Media with oriented particles. When we enhance our consideration furthermore to the media with oriented particles defined in No. **2**b, then a new assumption must become valid, *that, also for every virtual rotation of the continuum, virtual work is expended being a linear homogeneous function of the totality of values of the rotational components* $\delta\pi, \delta\kappa, \delta\varrho$ for which we make the ansatz analogous to No. **3**, (1):

$$\tag{2} \begin{aligned} &\iiint\limits_{(V)} \varrho(L\delta\pi + M\delta\kappa + N\delta\varrho)dV + \iint\limits_{(S)} (\overline{L}\delta\pi + \overline{M}\delta\kappa + \overline{N}\delta\varrho)dS \\ &\qquad - \iiint\limits_{(V)} \Big(L_x \frac{\partial \delta\pi}{\partial x} + L_y \frac{\partial \delta\pi}{\partial y} + \cdots + N_z \frac{\partial \delta\varrho}{\partial z}\Big) dV. \end{aligned}$$

[36] Cf. the discussions about the potential-based approaches in No. **7**a, p. 645 as well as No. **8**a, p. 660.

[37] Cf. below No. **12**.

Hieran kann man völlig analoge Erörterungen wie in Nr. **3**a schliessen, wobei man als selbstverständlich wieder die Voraussetzung der Endlichkeit und Stetigkeit der 15 neu auftretenden Koeffizienten übernimmt. Zunächst stellen L, M, N bzw. $\overline{L}, \overline{M}, \overline{N}$ die Komponenten je eines *axialen Vektors* dar, der als das auf eine Stelle innerhalb des Körpers (pro Masseneinheit) bzw. auf eine Stelle der Oberfläche (pro Flächeneinheit berechnete) *Drehmoment* aufzufassen ist; denn in der Tat haben wir hier eine Kraftwirkung von genau der in der Mechanik starrer Körper so bezeichneten Art. Die 9 Grössen $L_x, \dots, N_z$ weiterhin verhalten sich bei Koordinatentransformationen wie die Komponenten einer Dyade mit der Modifikation, dass sie bei Spiegelungen das Vorzeichen wechseln[38]); ihre Bedeutung kann man darin finden, dass

$$(3) \qquad L_n = L_x \cos nx + L_y \cos ny + L_z \cos nz \qquad (L, M, Z)$$

die Komponenten des Drehmoments darstellt, das auf ein Flächenelement durch die auf der Seite der positiven Normalenrichtung n gelegene Materie ausgeübt wird, berechnet auf die Flächeneinheit.

Wir übernehmen nun das Prinzip der virtuellen Verrückungen für das neue Kontinuum in der erweiterten Form, *dass in der durch die 6 Funktionen* Nr. **2**, (1) *und* (9) *beschriebenen Gleichgewichtslage die durch* (2) *ergänzte virtuelle Arbeit für jedes zulässige System virtueller Verrückungen verschwinden soll.* Für das völlig frei stetig deformierbare Kontinuum, für das auch die Axenkreuze unabhängig voneinander und von der Grösse der Verrückungen drehbar sind, sind dann $\delta x, \dots, \delta \pi, \dots$ 6 völlig willkürliche stetige Funktionen, und durch Wiederholung der Überlegungen von Nr. **3**c findet man, dass die dort aufgestellten Bedingungen (5) ungeändert bleiben und nur durch folgende zuerst von *W. Voigt* [39]) aufgestellten und neuerdings in dem *Cosserat*schen Werke[40]) ausführlich betrachteten 2 Gleichungs-

[38] Für Tensorkomponenten (d. h. bei einer symmetrischen Dyade) hat *W. Voigt* (vgl. Lehrbuch der Kristallphysik, Leipzig 1910, p. 132 ff.) das entsprechende Verhalten durch das Beiwort axial ausgedrückt, gegenüber polaren Tensoren, deren Komponenten bei Inversion ihr Vorzeichen nicht wechseln. Man vergleiche über diese Klassifikation auch die in 18) zitierte Litteratur.

[39] Gött. Abhandl. 34 (1887), p. 11, wo *Voigt* an die Poissonschen Vorstellungen[9]) anschliesst. Vgl. auch das Referat in *Voigts* Vortrag auf dem internat. Physiker-Kongress in Paris 1900 (Rapp. prés. au congr. T. I, p. 277 = Gött. Nachr., math.-phys. Kl. 1900, p. 117) und die von direkter Bezugnahme auf Molekularvorstellungen freie Darstellung in *Voigts* Kompendium I, p. 219 ff.

[40] *E.* u. *F. Cosserat*, Corps déform., chap. IV, inbes. p. 137. Vgl. auch IV 11, Nr. **21**, *K. Heun*.

Here one can an discuss similar arguments as in No. **3**a, where one naturally assumes again the requirements of the finiteness and the continuity of the 15 emerging coefficients. At first L, M, N and $\overline{L}, \overline{M}, \overline{N}$ represent the components of an *axial vector*, which has to be understood as a *torque* at a point within the body (per unit of mass) or at a point on the surface (per unit of area), respectively; then in fact we have here a force effect of exactly the same kind as in rigid body mechanics. Under coordinate transformations, the quantities $L_x, \dots, N_z$ still transform like the components of a dyad with the modification that the sign changes for reflections[38]); their interpretation can be found therein, that

$$(3) \qquad L_n = L_x \cos nx + L_y \cos ny + L_z \cos nz \qquad (L, M, Z)^{\dagger}$$

represents the components of the torque per unit area, which is exerted via a surface element on the matter being on the side of the positive normal direction n.

We now assume the principle of virtual displacements for the new continuum in enhanced form, *that in the equilibrium position described by the 6 functions* No. **2**, (1) *and* (9), *the virtual work augmented by* (2) *must vanish for every admissible set of virtual displacements.* Being assured that the continuously deformable continuum is completely free, for which the triads can be each other relatively rotated independently also of the magnitude of the displacements, then $\delta x, \dots, \delta\pi, \dots$ are 6 completely arbitrary continuous functions, and by repeating the considerations of No. **3**c one finds, that the conditions (5) formulated therein remain unchanged and that they have to be completed only by following two sets of three equations formulated first by *W. Voigt* [39]) and recently discussed in detail in the work of *Cosserat* [40]):

[38] For tensor components (i. e. for a symmetric dyad) *W. Voigt* (cf. Lehrbuch der Kristallphysik, Leipzig 1910, p. 132 ff.) has denoted the corresponding behavior using the adjective axial, in contrast to polar tensors, whose components do not change sign under inversion. About this classification one compares also the literature cited in 18).

† It should rather be (L, M, N) – (TN)

[39] Gött. Abhandl. 34 (1887), p. 11, where *Voigt* builds on the notions of Poisson.[9]). Cf. also the discussion in *Voigts* presentation at the international congress of physicists in Paris 1900 (Rapp. prés. au congr. T. I, p. 277 = Gött. Nachr., math.-phys. Kl. 1900, p. 117) and the exposition in *Voigts* Kompendium I, p. 219 ff, being free of any direct reference to molecular perceptions.

[40] *E.* and *F. Cosserat*, Corps déform., chap. IV, in particular p. 137. Cf. also IV 11, No. **21**, *K. Heun*.

tripel zu ergänzen sind[41]):

$$\text{(4a)} \qquad \frac{\partial L_x}{\partial x} + \frac{\partial L_y}{\partial y} + \frac{\partial L_z}{\partial z} + \varrho L = 0 \quad \text{in } V \qquad (L, M, N),$$

$$\text{(4b)} \qquad L_x \cos nx + L_y \cos ny + L_z \cos nz = \overline{L} \quad \text{auf } S \qquad (L, M, N).$$

Auch diese Gleichungen kann man wieder auf die Anfangsparameter a, b, c transformieren, indem man die virtuelle Arbeit der inneren Flächenmomente auf die Form

$$\text{(2')} \qquad -\iiint\limits_{(V_0)} \Big(\sum_{\binom{\pi\,\kappa\,\varrho}{L\,M\,N}} L_a \frac{\partial \delta\pi}{\partial a} + L_b \frac{\partial \delta\pi}{\partial b} + L_c \frac{\partial \delta\pi}{\partial c} \Big) dV_0$$

transformiert, wo

$$\text{(5)} \qquad \Delta \cdot L_x = L_a \frac{\partial x}{\partial a} + L_b \frac{\partial x}{\partial b} + L_c \frac{\partial x}{\partial c} \qquad (L, M, N; x, y, z),$$

und wo L_a, M_a, N_a das auf ein Element der Fläche a = const wirkende, auf die Flächeneinheit im undeformierten Zustande berechnete Drehmoment bedeuten. An die Stelle von (4) treten dann neben Nr. **3**, (9) die Gleichungstripel[42]):

$$\text{(6a)} \qquad \frac{\partial L_a}{\partial a} + \frac{\partial L_b}{\partial b} + \frac{\partial L_c}{\partial c} + \varrho_0 L = 0 \quad \text{in } V \qquad (L, M, N),$$

$$\text{(6b)} \qquad L_a \cos n_0 a + L_b \cos n_0 b + L_c \cos n_0 c = k\overline{L} \quad \text{auf } S \qquad (L, M, N).$$

Auch hier kann man wieder den Zusammenhang mit den Gleichgewichtsbedingungen am starren Körper erhalten, indem man einmal von einer Translation, dann von einer Rotation eines aus V herausgeschnittenen und starr gedachten Teilbereiches V_1 ausgeht, innerhalb dessen man sich nun auch die Axenkreuze starr mit dem Kontinuum verbunden, also parallel mit sich fortgeführt bzw. starr mitgedreht denkt; approximiert man diese unstetige Verrückung genau wie in Nr. **3**d durch stetige virtuelle Verrückungen, so findet man einmal ungeändert die Gleichungen Nr. **3** (10) des Schwerpunktssatzes wieder, dann aber an Stelle der Formeln (11) drei Gleichungen

$$\text{(3.7)} \qquad \iiint\limits_{(V_1)} \left\{ \varrho(Zy - Yz + L) + Y_z - Z_y \right\} dV_1 \\ + \iint\limits_{(S_1)} \{ Z_n y - Y_n z + L_n \} \, dS_1 = 0 \qquad \binom{L, M, N}{X, Y, Z},$$

[41] Diese Gleichungen sind, abgesehen von der Festsetzung der Vorzeichen, noch insofern von denen von *Voigt* und *Cosserat* verschieden, als dort das gesamte auf ein Teilchen wirkende Drehmoment $\varrho L + Y_z - Z_y, \ldots$ mit einem Buchstaben bezeichnet ist.

[42] In etwas verschiedener Bezeichnung bei *E.* u. *F. Cosserat*, Corps déformables, p. 132.

$$\text{(4a)}\qquad \frac{\partial L_x}{\partial x}+\frac{\partial L_y}{\partial y}+\frac{\partial L_z}{\partial z}+\varrho L=0 \quad \text{in } V \qquad (L,M,N),$$

$$\text{(4b)}\qquad L_x\cos nx+L_y\cos ny+L_z\cos nz=\bar{L} \quad \text{on } S \qquad (L,M,N).$$[41])

Also these equations can be transformed to be formulated with respect to the initial parameters a, b, c, by transforming the virtual work of the internal surface torques to the form

$$\text{(2')}\qquad -\iiint\limits_{(V_0)}\Big(\sum_{\binom{\pi\,\kappa\,\varrho}{L M N}} L_a\frac{\partial\delta\pi}{\partial a}+L_b\frac{\partial\delta\pi}{\partial b}+L_c\frac{\partial\delta\pi}{\partial c}\Big)dV_0,$$

where

$$\text{(5)}\qquad \Delta\cdot L_x=L_a\frac{\partial x}{\partial a}+L_b\frac{\partial x}{\partial b}+L_c\frac{\partial x}{\partial c} \qquad (L,M,N;x,y,z),$$

and where L_a, M_a, N_a denote the torque acting on an element of the surface $a=$ const, computed with respect to the unit of area in the undeformed state. The equations of (4) are then substituted besides No. **3**, (9) by the triple of equations[42]):

$$\text{(6a)}\qquad \frac{\partial L_a}{\partial a}+\frac{\partial L_b}{\partial b}+\frac{\partial L_c}{\partial c}+\varrho_0 L=0 \quad \text{in } V \qquad (L,M,N),$$

$$\text{(6b)}\qquad L_a\cos n_0a+L_b\cos n_0b+L_c\cos n_0c=k\bar{L} \quad \text{on } S \qquad (L,M,N).$$

Also here one can obtain a connection to the equilibrium conditions of the rigid body, by starting in one case with a translation, then with a rotation, of a subset V_1 cut out of V thought of as being rigid, within which the triads are rigidly fixed with the continuum, considering them consequently to be carried along in parallel and rigidly, respectively; approximating these discontinuous displacements exactly as in No. **3**d by continuous displacements, one finds on the one hand the unchanged equations No. **3** (10) of the center-of-mass theorem, but then one finds instead of the formulas (11) three equations

$$\text{(3.7)}\qquad \iiint\limits_{(V_1)}\big\{\varrho(Zy-Yz+L)+Y_z-Z_y\big\}\,dV_1 + \iint\limits_{(S_1)}\{Z_ny-Y_nz+L_n\}\,dS_1=0 \qquad \binom{L,M,N}{X,Y,Z},$$

[41] Except for the assignment of the signs, these equations are insofar different from the ones of *Voigt* and *Cosserat*, because there the entire torque $\varrho L+Y_z-Z_y,\ldots$ acting on a particle is denoted by a single letter.

[42] In a slightly different notation in *E.* and *F. Cosserat*, Corps déformables, p. 132.

die den Flächensatz unter den jetzt stattfindenden Umständen ausdrücken. Aus diesen 6 Integralbedingungen, die für *jeden* Teilbereich V_1 gelten sollen, kann man wieder die Gleichgewichtsgleichungen (4) herleiten.[43])

Sind die Dreikante nicht mehr frei beweglich, so modifizieren sich die Gleichgewichtsbedingungen (4) und Nr. **3**, (5), da man dann die bei den Summanden (2) und Nr. **3**, (1) der virtuellen Arbeit nicht mehr gesondert behandeln darf. Es sei hier nur auf den Fall hingewiesen, dass die Axen des Dreikants fest mit dem Medium verbunden sind; dann wird eine jede virtuelle Verrückung eine Verdrehung der Dreikante mit den Grössen Nr. **2**, (4′) als Komponenten zur Folge haben, und daher werden insbesondere neue Glieder zu den Komponenten der Spannungsdyade additiv hinzutreten. Man hat das benutzt, um auch unter Verwendung einer symmetrischen Spannungsdyade ($X_y = Y_x, \dots$) das Auftreten von Drehmomenten zu deuten.[44])

Bei *zwei- und eindimensionalen Medien* mit orientierten Teilchen (s. Nr. **2**c) ergiebt sich ganz analog, dass bei Verwendung der früheren Bezeichnungen zu der virtuellen Arbeit für die Fläche (Nr. **3**e, (12)) der Summand

$$\iint\limits_{(S)} \sum_{\binom{\pi\,\kappa\,\varrho}{L\,N\,M}} \left\{\varrho L\delta\pi - \left(\frac{L_u}{\sqrt{E}}\frac{\partial\delta\pi}{\partial u} + \frac{L_v}{\sqrt{G}}\frac{\partial\delta\pi}{\partial v}\right)\right\} dS + \int\limits_{(C)} \sum_{\binom{\pi\,\kappa\,\varrho}{L\,N\,M}} \bar{L}\delta\pi ds, \tag{8}$$

für die Kurve (Nr. **3**e, (17)) ein entsprechender

$$\int\limits_0^l \sum_{\binom{\pi\,\kappa\,\varrho}{L\,N\,M}} \left\{\varrho L\delta\pi - L_s\frac{\partial\delta\pi}{\partial s}\right\} ds + \Big[\sum_{\binom{\pi\,\kappa\,\varrho}{L\,N\,M}} \bar{L}\delta\pi\Big]_0^l \tag{9}$$

hinzutritt; demgemäss erhält man im ersten Falle neben Nr. **3**e, (14)) noch die Gleichgewichtsbedingungen[45])

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{h}\left(\tfrac{\partial\sqrt{G}L_u}{\partial u} + \tfrac{\partial\sqrt{E}L_v}{\partial v}\right) + \varrho L = 0 \quad &\text{auf } S \\ L_u \cos \nu u + L_v \cos \nu v = \bar{L} \quad &\text{auf } C \end{aligned} \qquad (L, M, N), \tag{10}$$

[43] So geht *Voigt*, Kompendium I, p. 219 vor.

[44] Siehe etwa *J. Larmor*, London math. Soc. Proc. 23 (1892), p. 127, Combébiac, Bull. soc. de math. 30 (1902), p. 108, 242.

[45] Vgl. *F.* und *E. Cosserat*, Corps déform., chap. III, sowie IV 11, Nr. **20**, (*K. Heun*).

which express the law of equal areas in the current context. From these 6 integral conditions, which have to be satisfied for *every* subset V_1, one can again derive the equilibrium conditions (4).[43])

When the triads are not any more free to move, then the equilibrium conditions (4) and No. **3**, (5) are modified, since the summands (2) and No. **3**, (1) of the virtual work cannot be treated separately anymore. We just want to mention the case when the axes of the triad are fixed to the medium; then for every virtual displacement this will imply a rotation of the triad with the magnitude No. **2**, (4′) as components, and thus in particular new terms will be added to the components of the stress dyad. One has used this to interpret the appearance of torques even when using a symmetric stress dyad $(X_y = Y_x, \dots)$.[44])

For *two- and one-dimensional media* with oriented particles (see No. **2**c) it yields similarly, by the application of the earlier used notation, that to the virtual work of the surface (No. **3**e, (12)) the summand

$$\iint\limits_{(S)} \sum_{\binom{\pi\,\kappa\,\varrho}{L\,N\,M}} \left\{ \varrho L \delta\pi - \left(\frac{L_u}{\sqrt{E}} \frac{\partial \delta\pi}{\partial u} + \frac{L_v}{\sqrt{G}} \frac{\partial \delta\pi}{\partial v} \right) \right\} dS + \int\limits_{(C)} \sum_{\binom{\pi\,\kappa\,\varrho}{L\,N\,M}} \bar{L} \delta\pi \, ds, \tag{8}$$

is added and that to the virtual work of the curve (No. **3**e, (17)) a corresponding [term]

$$\int_0^l \sum_{\binom{\pi\,\kappa\,\varrho}{L\,N\,M}} \left\{ \varrho L \delta\pi - L_s \frac{\partial \delta\pi}{\partial s} \right\} ds + \Big[\sum_{\binom{\pi\,\kappa\,\varrho}{L\,N\,M}} \bar{L} \delta\pi \Big]_0^l \tag{9}$$

is added; accordingly, one obtains in the first case in addition to No. **3**e, (14), the equilibrium equations[45])

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{h} \left(\tfrac{\partial \sqrt{G} L_u}{\partial u} + \tfrac{\partial \sqrt{E} L_v}{\partial v} \right) + \varrho L &= 0 \quad \text{on } S \\ L_u \cos \nu u + L_v \cos \nu v &= \bar{L} \quad \text{on } C \end{aligned} \qquad (L, M, N), \tag{10}$$

[43] In this way *Voigt*, Kompendium I, p. 219 proceeds.

[44] See for instance *J. Larmor*, London math. Soc. Proc. 23 (1892), p. 127, Combébiac, Bull. soc. de math. 30 (1902), p. 108, 242.

[45] Cf. *F.* and *E. Cosserat*, Corps déform., chap. III, as well as IV 11, No. **20**, (*K. Heun*).

im zweiten Falle neben Nr. **3**e, (18)) noch diejenigen[46])

$$\begin{aligned} \frac{dL_s}{ds} + \varrho L &= 0 \quad \text{für } 0 < s < l \\ L_s &= \overline{L} \quad \text{für } \quad s = 0,\ s = l \end{aligned} \qquad (L, M, N). \tag{11}$$

Auch die Deutung der $L_u, \ldots$ als spezifische Drehmomente bezogen auf den deformierten Zustand ergiebt sich analog zu Nr. **3**e; sie hängen mit den entsprechenden auf den undeformierten Zustand bezogenen Grössen zusammen durch Gleichungen vom Typus

$$h \frac{\partial(u, v)}{\partial(a, b)} L_u = L_a \frac{\partial u}{\partial a} + L_b \frac{\partial u}{\partial b} \quad \text{bzw.} \quad L_s \frac{ds}{da} = L_a. \tag{12}$$

4c. Auftreten von Nebenbedingungen. Bisher wurde das Prinzip der virtuellen Verrückungen vorzugsweise auf solche Fälle angewandt, in denen das Kontinuum in jeder möglichen Weise stetig deformierbar war. In der Formulierung des Prinzipes sind aber unmittelbar auch solche Kontinua umfasst, deren *Beweglichkeit durch Bedingungen irgendwelcher Art beschränkt* ist, und tatsächlich betreffen gerade einige der ersten Probleme der Mechanik der Kontinua, die *Lagrange*[47]) behandelt hat, solche Fälle. Diese Bedingungen drücken sich in erster Linie durch *Gleichungen* für die die Deformation beschreibenden Funktionen (1), (9) von Nr. **2** aus, in welche übrigens neben den Funktionen selbst auch ihre Ableitungen nach a, b, c eingehen können; typisch ist eine Gleichung

$$\omega(a, b, c; x, y, z; x_a, \ldots, z_a; \lambda, \mu, \nu; \lambda_a, \ldots, \nu_c) = 0, \text{wo } x_a = \frac{\partial x}{\partial a}, \ldots \tag{13}$$

für *jeden* Punkt des Bereiches V_0, doch kann man ähnliche Gleichungen auch nur für Teilbereiche, Grenzflächen oder dgl. aussprechen. In jedem Falle werden dadurch die möglichen Deformationen bzw. die möglichen Verdrehungen der adjungierten Dreikante eingeschränkt, oder es werden auch bestimmte Beziehungen zwischen Verdrehung des Dreikants und Deformation gefordert (z. B. eine bestimmte Orientierung der Dreikante gegen den Raum oder gegen das Medium; vgl. oben S. 626); das Auftreten von a, b, c in (13) besagt, dass die Art der Bedingung von Teilchen zu Teilchen wechseln kann. Setzt man nun in (13) die variierte Deformation Nr. **2**, (3) bzw. (10) ein, so

---

[46] Vgl. *F.* und *E. Cosserat*, Corps déform., chap. II, sowie IV 11, Nr. **19**, (*K. Heun*).

[47] Mécan. anal., 1. Part., Sect. V, Chap. III (unausdehnbarer Faden u. dgl.), Sect. VIII (inkompressible Flüssigkeit).

in the second case one obtains in addition to No. **3**e, (18)) the following[46])

$$\begin{aligned} \tfrac{dL_s}{ds} + \varrho L &= 0 \quad \text{for } 0 < s < l \\ L_s &= \bar{L} \quad \text{for } \quad s = 0,\ s = l \end{aligned} \qquad (L, M, N). \tag{11}$$

Also the interpretation of $L_u, \ldots$ as specific torques formulated with respect to the deformed state is obtained similarly to No. **3**e; they are connected to the corresponding quantities formulated with respect to the undeformed configuration with the equations of the kind

$$h\frac{\partial(u, v)}{\partial(a, b)} L_u = L_a \frac{\partial u}{\partial a} + L_b \frac{\partial u}{\partial b} \quad \text{or} \quad L_s \frac{ds}{da} = L_a. \tag{12}$$

4c. Appearance of constraints. Hitherto the principle of virtual displacements has been applied particularly for cases in which the continuum was continuously deformable in all possible ways. In the formulation of the principle also such continua are immediately included whose *movability is constrained by restrictions of any kind*, and in fact just some of the first problems in the mechanics of continua, treated by *Lagrange* [47]), are cases of this kind. Primarily, these constraints are expressed by *equations* for the functions (1), (9) of No. **2** describing the deformation, in which besides the functions also their derivatives with respect to a, b, c can enter; typically is an equation

$$\omega(a, b, c; x, y, z; x_a, \ldots, z_a; \lambda, \mu, \nu; \lambda_a, \ldots, \nu_c) = 0, \text{ where } x_a = \frac{\partial x}{\partial a}, \ldots \tag{13}$$

for *every* point of the domain V_0, but it is also possible to formulate similar equations for subsets, interfaces or similar ones. In any case thereby possible deformations or possible rotations of the adjoint triads are restricted, or particular relations between rotation of the triad and the deformation are demanded (e. g. a particular orientation of the triad with respect to the space or the medium; cf. above p. 626); The appearance of a, b, c in (13) indicates, that the type of the condition can vary from particle to particle. Inserting the variation of the deformation No. **2**, (3) or (10) in (13), then

[46] Cf. *F.* and *E. Cosserat*, Corps déform., chap. II, as well as IV 11, No. **19**, (*K. Heun*).

[47] Mécan. anal., 1. Part., Sect. V, Chap. III (inextensible wire and similar ones), Sect. VIII (incompressible fluid).

ergiebt sich durch Differentiation nach σ

$$(14)\quad \delta\omega \equiv \sum_{(x\,y\,z)} \left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\omega}{\partial x_a}\delta x_a + \frac{\partial\omega}{\partial x_b}\delta x_b + \frac{\partial\omega}{\partial x_c}\delta x_c\right) + \sum_{(\lambda\,\mu\,\nu)} \left(\frac{\partial\omega}{\partial\lambda}\delta\lambda + \frac{\partial\omega}{\partial\lambda_a}\delta\lambda_a + \frac{\partial\omega}{\partial\lambda_b}\delta\lambda_b + \frac{\partial\omega}{\partial\lambda_c}\delta\lambda_c\right) = 0,$$

und da nach Nr. **2**, S. 608 die $\delta x_a, \ldots$ mit den Ableitungen der $\delta x, \ldots$ übereinstimmen, liegt hier eine *lineare homogene Bedingung für die virtuellen Verrückungen* vor.

Das Prinzip der virtuellen Verrückungen fordert dann, *dass δA für alle (14) genügenden Funktionen $\delta x, \ldots$ verschwindet,* und das kann man, wenn die Gleichungen (14) nicht zufällig die Elimination einer der Verrückungskomponenten gestatten, durch Einführung eines Lagrangeschen Faktors[48]) λ in die Form

$$(15)\qquad \delta A + \iiint_{(V)} \lambda\delta\omega dV = 0 \quad \text{für alle} \quad \delta x, \ldots$$

umsetzen, die genau der des ursprünglichen Prinzipes entspricht; an Stelle des Raumintegrales treten event., wenn (13) nur längs einzelner Flächen oder Kurven bestehen soll, oder das Kontinuum überhaupt nur eine Fläche oder Kurve erfüllt, Flächen- oder Kurvenintegrale. Über die Bedeutung des Faktors λ als „Druck" wird später (Nr. **8**b, S. 662) noch zu sprechen sein.

Endlich ist noch der Möglichkeit zu gedenken, die gleichfalls aus der Mechanik diskreter Systeme wohlbekannt ist, dass *„einseitige" Ne-benbedingungen* auftreten, die die Form von *Ungleichungen* haben — sei es z. B., dass die Grenzfläche des Kontinuums in ihrer Beweglichkeit nur nach einer Seite hin eingeschränkt ist, sei es dass die Deformationsgrössen im Inneren gewissen Ungleichungen unterliegen (man denke etwa an Körper, die keine Kompression über eine gewisse Grenze hinaus gestatten, oder ähnliche Festsetzungen). Dann wird auch hier das Gleichgewicht gegeben durch die *Fourier*sche Formulierung[49]) des Prinzips der virtuellen Verrückungen, dass nämlich für jedes den Nebenbedingungen genügende System von virtuellen Verrückungen die virtuelle Arbeit negativ oder Null ist:

$$\delta A \leqq 0.$$

---

[48] Die Behandlung mehrdimensionaler Variationsprobleme mit dieser Methode wurde von Lagrange an den in 47) genannten Problemen das erste Mal entwickelt; vgl. II A8, p. 622, *Kneser*.

[49] Vgl. IV 1, Nr. **34**, *Voss*; die Formulierung bei *Gauss* (Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii, Gott. Comment. rec. 7 (1830) = Werke 5, p. 35, deutsch von *R. H. Weber* in Ostwald's Klassiker der exakten Wiss. Nr. 135, Leipzig 1903) berücksichtigt von vornherein die Ausdehnung auf Kontinua.

differentiation with respect to σ yields

$$(14) \quad \delta\omega \equiv \sum_{(x\,y\,z)} \left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\omega}{\partial x_a}\delta x_a + \frac{\partial\omega}{\partial x_b}\delta x_b + \frac{\partial\omega}{\partial x_c}\delta x_c\right) + \sum_{(\lambda\,\mu\,\nu)} \left(\frac{\partial\omega}{\partial\lambda}\delta\lambda + \frac{\partial\omega}{\partial\lambda_a}\delta\lambda_a + \frac{\partial\omega}{\partial\lambda_b}\delta\lambda_b + \frac{\partial\omega}{\partial\lambda_c}\delta\lambda_c\right) = 0,$$

and since due to No. **2**, p. 608 the $\delta x_a, \ldots$ coincide with the derivatives of $\delta x, \ldots,$ there is a *linear homogeneous condition for the virtual displacements*.

The principle of virtual displacements then claims, *that δA vanishes for all functions $\delta x, \ldots$ which satisfy (14),* and this can be realized, when equation (14) does not allow accidentally the elimination of a displacement component, by the introduction of a Lagrange multiplier[48]) λ in the form

$$(15) \qquad \delta A + \iiint_{(V)} \lambda\delta\omega dV = 0 \quad \text{for all} \quad \delta x, \ldots$$

which corresponds exactly with the original principle; instead of volume integrals possibly there appear surface or curve integrals, when (13) exists only along individual surfaces or curves, or when the continuum is in fact merely a surface or a curve. The denotation of the factor λ as "pressure" will be addressed later on (No. **8**b, p. 662).

Finally, one should think of the possibility, likewise well-known from the mechanics of discrete systems, that *"unilateral" constraints* appear, which have the form of *inequalities* — let it be e. g., that the boundary of the continuum is restricted in its movability in one direction, let it be that the deformation quantities in the inside are subjected to certain inequalities (one can think of bodies, which do not allow any compression beyond a certain threshold, or similar conditions). Then also here, the equilibrium will be determined by *Fourier*'s formulation[49]) of the principle of virtual displacements, that for any system of virtual displacements, satisfying the constraints, the virtual work is negative or zero:

$$\delta A \leqq 0.$$

---

[48] The treatment of multidimensional variational problems has been developed for the first time by Lagrange for the problems referred to in 47); cf. II A8, p. 622, *Kneser*.

[49] Cf. IV 1, No. **34**, *Voss*; The formulation in *Gauss* (Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii, Gott. Comment. rec. 7 (1830) = Werke 5, p. 35, german of *R. H. Weber* in Ostwald's Klassiker der exakten Wiss. No. 135, Leipzig 1903) a priori considers the enhancement to continua.

II. Die Grundansätze der Kinetik.

5a. Die Bewegungsgleichungen des Kontinuums. Aufgabe der Kinetik ist festzustellen, welche Bewegung in dem bisher betrachteten Kontinuum eintritt, wenn irgendwie in der Zeit gegebene Kraftwirkungen in ihm stattfinden, oder umgekehrt, welche Wirkungen zur Aufrechterhaltung einer bestimmten Bewegung notwendig sind. Dabei sind die Wirkungskomponenten wie in der Statik als Koeffizienten des Arbeitsausdruckes δA gegeben gedacht, während die Art ihrer Abhängigkeit von den Bewegungsfunktionen zunächst offen bleibt. Wir befassen uns vorerst nur mit den gewöhnlichen in Nr. **3** betrachteten Medien. Der Übergang von der Statik zur Kinetik kann dann genau wie in der Mechanik der diskontinuierlichen Systeme mit Hilfe des *d'Alembertschen Prinzips* (vgl. IV 1, Nr. **36**, *Voss*) geschehen; seine Übertragung auf kontinuierliche Systeme bietet sich fast von selbst dar, wenn man sich wie in der Statik (S. 616) von dem Gedanken eines Grenzüberganges zum Kontinuum leiten lässt, bzw. direkt im Sinne der Analogie zwischen Punktsystemen und Kontinuis vorgeht. Von diesen Gesichtspunkten aus hat bereits *Lagrange* [50]) die von ihm behandelten Probleme der Hydrodynamik angefasst.

Demnach kann man ganz entsprechend der von *d'Alembert* [51]) selbst entwickelten Auffassung für die allgemeine Mechanik der Kontinua das folgende Prinzip aussprechen: *Betrachtet man die während der Bewegung in einem bestimmten Zeitmoment auf das Quantum V_0 des Mediums wirkenden Kräfte und Spannungen, so befinden sie sich im statischen Gleichgewicht im früheren Sinne, wofern man ihnen an jeder Stelle noch Kräfte („Trägheitskräfte") hinzufügt, deren Komponenten auf die Masseneinheit des Kontinuums berechnet den Komponenten der Beschleunigung entgegengesetzt gleich sind:*

$$-\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -x'', \quad -\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -y'', \quad -\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -z''.^{52)}$$

Erweist es sich auch vielfach als zweckmässig, diesen Satz als Axiom an die Spitze der Kinetik zu stellen, so bleibt die Frage offen, in welche unabhängigen Bestandteile man ihn zerlegen kann und wie weit diese von den statischen Axiomen unabhängig sind — eine Frage, die in genau der gleichen Bedeutung schon in der Mechanik der diskontinuierlichen Systeme auftritt. Es sei daher hier

[50] Vgl. insbesondere Méc. anal., 2. part., Sect. XI, § I.

[51] Traité de dynamique, Paris 1743. Vgl. IV 1 *Voss*, p. 77 [209]).

[52] Mit Akzenten werden im folgenden stets die Ableitungen der Bewegungsfunktionen (1) nach t bei konstantem a, b, c bezeichnet.

II. The foundations of kinetics.

5a. The equations of motion of the continuum. It is the task of kinetics to determine, what motion arises within the continuum considered so far, when force effects occur in it somehow specified in time, or vice versa, which effects are required for the maintenance of a particular motion. As in statics, the effects are thereby thought as given by the coefficients of the expression of work δA, while the kind of their dependence on the function of motion remains open at first. For now, we address only ordinary media considered in No. **3**. The transition from statics to kinetics can occur as in the mechanics of discrete systems with the help of *d'Alembert's Principle* (cf. IV 1, No. **36**, *Voss*); its generalization to continuous systems is offering itself almost automatically, if one let lead oneself as in statics (S. 616) by the idea of a limit process to the continuum, or if one proceeds directly in the sense of the analogy between point systems and continua. From these points of view, already *Lagrange* [50]) has tackled those problems of hydrodynamics which he considered.

According to [this last analogy] one can state the following principle which is in full correspondence with the notion of the general mechanics of continua developed by *d'Alembert* [51]) himself: *Considering the forces and stresses which act during the motion at a particular instant of time on the quantum V_0 of the media, then they are in static equilibrium in the former sense, provided that one adds in every position additional forces ("forces of inertia"), whose components computed per unit of mass of the continuum are the same but opposite to the accelerations:*

$$-\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -x'', \ -\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -y'', \ -\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -z''.^{52})$$

Even if it frequently seems to be convenient to put this principle as an axiom on the top of kinetics, the question remains, in which independent constituent parts one can divide it and how much are these independent of the static axioms — a question, which appears in the very same sense already in the mechanics of discrete systems. Therefore it should be

---

[50] Cf. in particular Méc. anal., 2. part., Sect. XI, § I.

[51] Traité de dynamique, Paris 1743. Cf. IV 1 *Voss*, p. 77 [209]).

[52] In the following, apostrophes denote the derivatives of the functions of motion (1) with respect to t for constant a, b, c.

nur kurz bemerkt, daß diess *d'Alembert*sche Prinzip einmal die wesentlich dem zweiten *Newton*schen Axiom äquivalente Tatsache enthält, dass die Beschleunigung eines frei gedachten Volumelementes gleich der Summe aller auf dasselbe wirkenden Kräfte ist, daß es aber andererseits — worauf *G. Hamel* [53]) nachdrücklich hingewiesen hat — eine von diesem ersten Bestandteil logisch durchaus unabhängige Aussage enthält: Wirken auf ein Kontinuum solche Kräfte, dass die für jedes Teilchen nach dem zweiten *Newton*schen Gesetz folgenden Beschleunigungen mit den kinematischen Bedingungen des Systemes verträglich sind, so treten diese Beschleunigungen auch wirklich ein.

Führt man nunmehr in das *d'Alembert*sche Prinzip das Prinzip der virtuellen Verrückungen als Gleichgewichtsbedingung ein, so erhält man das von *Lagrange* [54]) als Grundformel der Dynamik benutzte *Variationsprinzip*. Man denke sich für jeden Moment t die Bewegung wie in Nr. **2**, (6) überlagert mit einer unendlichkleinen virtuellen Verrückung, die mit den im Moment t für das Kontinuum etwa bestehenden kinematischen Bedingungen verträglich ist; *dann muss die durch die Trägheitskräfte ergänzte virtuelle Arbeit stets verschwinden:*

$$(1) \qquad -\iiint\limits_{(V)} \varrho(x''\delta x + y''\delta y + z''\delta z)dV + \delta A = 0,$$

und dies für jeden Zeitpunkt t des Bewegungsverlaufes. Im Falle eines beliebig stetig deformierbaren Körpers folgen hieraus unter den gleichen Annahmen wie in Nr. **3**c als Gleichungen der Bewegung für jeden Punkt des Kontinuums und zu jeder Zeit:

$$(2) \qquad \varrho x'' = \varrho X + \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \qquad \begin{pmatrix} x, & y, & z \\ X, & Y, & Z \end{pmatrix},$$

während die Randbedingungen (5b) von Nr. **3** ungeändert für jeden Zeitmoment t bestehen bleiben. Diese Gleichungen bestimmen die Bewegung wiederum erst dann, wenn der Zusammenhang der Kraft und Spannungskomponenten mit den Bewegungsfunktionen festgelegt ist.

Was nun die Berücksichtigung kinematischer Nebenbedingungen anlangt, so beziehen wir uns hier ausschliesslich auf den Fall sog. *holonomer* Bedingungen, die *keine zeitlichen* Ableitungen der Bewegungsfunktionen enthalten.[55]) Eine solche Bedingung unterscheidet sich von

---

[53] *G. Hamel*, Math. Ann. 66 (1908), p. 354; p. 386 ist die Unabhängigkeit für die Mechanik starrer Körper durch ein Beispiel gezeigt; vgl. auch die ausführlichere Darstellung in *Hamel*s Elementarer Mechanik, p. 306f.

[54] Méc. analyt., 2. part., Sect. II.

[55] Will man Probleme mit *nichtholonomen* Bedingungsgleichungen mit dem *d'Alembert*schen Prinzip behandeln, so muss man in der Mechanik der Kontinua wie bereits in der Punktmechanik davon absehen, dass die variierte

noticed here just shortly, how such [a formulation of] *d'Alembert*'s principle incorporates the statement being equivalent to *Newton*'s second axiom: that the acceleration of an imagined freely moving volume element is equal to the sum of all applied forces to this element; that this principle incorporates on the other hand — which has firmly been pointed out by *G. Hamel* [53]) — a statement being logically independent of this first constituent part: If there are forces acting on a continuum, such that the accelerations of every particle following *Newton*'s second law are admissible with respect to the systems kinematic constraints, then these accelerations really occur.

By introducing now the principle of virtual displacements as equilibrium condition into *d'Alembert*'s principle, one consequently obtains the *variational principle* used by *Lagrange* [54]) as basic formula in dynamics. For every instant t, one thinks of the motion as in No. **2**, (6) superposed by an infinitesimal virtual displacement, which is admissible with respect to the kinematic constraints of the continuum arising at the instant of time t; *then the virtual work augmented by the inertia forces must vanish always:*

$$(1) \qquad -\iiint_{(V)} \varrho(x''\delta x + y''\delta y + z''\delta z)dV + \delta A = 0,$$

and this for every instant of time t of the path of motion. For the case of an arbitrarily continuously deformable body and under the same assumptions as in No. **3**c, one can deduce as equations of the motion for every point of the continuum at any instant of time [the following ones]:

$$(2) \qquad \varrho x'' = \varrho X + \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \qquad \begin{pmatrix} x, & y, & z \\ X, & Y, & Z \end{pmatrix},$$

while the boundary conditions (5b) of No. **3** remain unchanged for every instant of time t. However, these equations only determine the motion, when the connection of the force and the stress components with the functions of motion is specified.

Concerning the consideration of kinematic constraints, we refer here exclusively to the case of so called *holonomic* constraints, which contain *no time* derivatives of the functions of motion.[55]) Such a constraint differs from

[53] *G. Hamel*, Math. Ann. 66 (1908), p. 354; p. 386 the independence for the mechanics of rigid bodies is demonstrated in an example; cf. also the extensive presentation in *Hamel*'s Elementarer Mechanik, p. 306f.

[54] Méc. analyt., 2. part., Sect. II.

[55] If one wants to treat problems including *nonholonomic* constraints in the mechanics of continua using *d'Alembert*'s principle, then, as in point mechanics, one has to refrain from considering that the variation

der in Nr. **4**c betrachteten Form nur durch das explizite Auftreten von t:

$$\omega(a, b, c; x, y, z; x_a, \ldots, z_c; t) = 0. \tag{3}$$

Für die virtuellen Verrückungen kommt nun nur die Form dieser Bedingung zur Zeit t in Betracht; die variierte Lage soll (für beliebig kleine σ) der Bedingung (3) für den betrachteten festen Wert von t genügen, so daß durch Differentiation nach σ („Variation der Bewegung bei festem t") folgt

$$\sum_{(xyz)} \frac{\partial \omega}{\partial x} \delta x + \sum_{(xyz,abc)} \frac{\partial \omega}{\partial x_a} \delta x_a = 0 \qquad \text{für jedes } t. \tag{3'}$$

Hieraus ergeben sich wie in Nr. **4**c angedeutet die Bewegungsgleichungen.

5b. Übergang zu dem sog. Hamiltonschen Prinzip. Man kann nun auch weiterhin ganz analog bekannten Entwicklungen der Punktmechanik das *d'Alembert*sche Prinzip in andere die Bewegung bestimmende Variationsprinzipe umformen; insbesondere handelt es sich hier darum, die von der Bewegung (den Trägheitskräften) herrührenden Glieder in die Variation eines einzigen für jeden Bewegungsvorgang bestimmten Ausdruckes überzuführen.

Grundlegend sind, wie bei *Lagrange* [56]), die Identitäten

$$x''\delta x = \frac{d}{dt}(x' \cdot \delta x) - \delta(\tfrac{1}{2}x'^2) \qquad (x, y, z),$$

die durch wiederholte Differentiation aus Nr. **2**, (6) nach den voneinander unabhängigen Veränderlichen σ, t folgen. Trägt man das in (1) ein und berücksichtigt, daß die Operationssymbole $\frac{d}{dt}$ und δ ohne Rücksicht auf den Faktor ϱ vor das Integral gezogen werden können, da nach Einführung der a, b, c als Integrationsvariable sowohl der Integrationsbereich V_0 als auch der verbleibende Faktor (ϱ_0 von von σ und t unabhängig sind, so ergibt sich

$$-\frac{d}{dt} \iiint\limits_{(V)} \varrho \sum_{(xyz)} x'\delta x \cdot dV + \delta T + \delta A = 0, \tag{4}$$

Bewegung für kleine σ den Bedingungen genügt — vielmehr wird die Bedingungsgleichung für die Verrückungen rein *formal* durch Ersetzen der zeitlichen Differentiation durch die Operation δ gewonnen; vgl. unten p. 633. Man vergleiche hierzu IV 1, Nr. **37**, **38** (*Voss*) und die dort zitierte Litteratur, insbesondere *O. Hölder*, Gött. Nachr., math.-phys. Kl. 1896, p. 141–143, ferner die seither erschienenen Darstellungen von *G. Hamel*, Zeitschr. Math. Phys. 50 (1904), p. 1 und Math. Ann. 59 (1904), p. 416.

[56] Mécan. anal., 2. part., sect. IV, art. 3.

the form considered in No. **4**c only by the explicit appearance of t:

$$\omega(a, b, c; x, y, z; x_a, \dots, z_c; t) = 0. \tag{3}$$

Now, for the virtual displacements this form of condition at time t comes into question only; the varied position shall (for arbitrarily small σ) satisfy the condition (3) for the considered fixed value of t, such that by differentiating with respect to σ ("variation of the motion for fixed t") it follows

$$\sum_{(xyz)} \frac{\partial\omega}{\partial x}\delta x + \sum_{(xyz,abc)} \frac{\partial\omega}{\partial x_a}\delta x_a = 0 \qquad \text{for every } t. \tag{3'}$$

As mentioned in No. **4**c the equations of motion arise out of this.

5b. Transition to the so-called Hamilton's principle. In a rather similar way to the well-known derivations in point mechanics, one can still transform *d'Alembert*'s principle into other variational principles which determine the motion; here the point concerns in particular the transformation of the terms coming from the motion (the inertia forces) into the variation of a single expression being determined for every motion.

Essential are, as in *Lagrange* [56]), the identities

$$x''\delta x = \frac{d}{dt}(x' \cdot \delta x) - \delta(\tfrac{1}{2}x'^2) \qquad (x, y, z),$$

which follow from repeated differentiation of (6) from No. **2** with respect to the independent variables σ, t. By substituting that [relation] into (1), we obtain by taking into account that regardless of the factor ϱ the operation-symbols $\frac{d}{dt}$ and δ can be dragged in front of the integral, because after introducing a, b, c as variables of integration, both the domain of integration V_0 and the remaining factor ϱ_0 are independent of σ and t

$$-\frac{d}{dt}\iiint\limits_{(V)} \varrho \sum_{(xyz)} x'\delta x \cdot dV + \delta T + \delta A = 0, \tag{4}$$

of the motion for small σ satisfies the constraints — moreover the constraint equations for the displacements are gained in a pure *formal* way by replacing the time differentiation by the operation δ; cf. below p. 633. Hereto one shall compare IV 1, No. **37**, **38** (*Voss*) and the cited literature therein, in particular *O. Hölder*, Gött. Nachr., math.-phys. Kl. 1896, p. 141–143, furthermore the presentations appeared so far from *G. Hamel*, Zeitschr. Math. Phys. 50 (1904), p. 1 and Math. Ann. 59 (1904), p. 416.

[56] Mécan. anal., 2. part., sect. IV, art. 3.

wobei zur Abkürzung die gesamte *kinetische Energie*

$$T = \frac{1}{2} \iiint\limits_{(V_0)} \varrho_0 \sum_{(xyz)} x'^2 dV_0 = \frac{1}{2} \iiint\limits_{(V)} \varrho \sum_{(xyz)} x'^2 dV \tag{5}$$

eingeführt ist. Gl. (4) ist die von *G. Hamel*[57]) und *K. Heun*[58]) unter dem Namen *Lagrangesche Zentralgleichung* als Grundlage der Mechanik der Systeme mit endlich vielen Freiheitsgraden verwendete Gleichung, die also auch in der Mechanik der Kontinua im gleichen Sinne gilt[59]), und die mit (1) völlig äquivalent ist: *die Bewegung erfolgt so, dass für jede mit den etwa stattfindenden Bedingungen verträgliche virtuelle Verrückung in jedem Moment die zeitliche Ableitung der virtuellen Arbeit des Impulses* (x', y', z') *pro Masseneinheit gleich der Summe der Variation der kinetischen Energie und der virtuellen Arbeit sämtlicher Kraftwirkungen ist.*[60])

Betrachtet man nun die Bewegung im Zeitintervalle $t_0 \leqq t \leqq t_1$, so gilt (4) für jeden Moment, und durch Integration nach t in den Grenzen t_0, t_1, ergiebt sich, wenn die virtuellen Verrückungen für die Momente $t = t_0, t_1$ gleich Null genommen werden, das sog. *Hamiltonsche Prinzip*[61]): *Lagert man über die Bewegung des Kontinuums irgendwelche mit den etwa stattfindenden Bedingungen verträgliche virtuelle Verrückungen, die für die Momente durchweg verschwinden, so verschwindet das von* t_0 *bis* t_1 *erstreckte Zeitintegral der Summe von virtueller Arbeit und Variation der kinetischen Energie:*

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta A) dt = 0. \tag{6}$$

Da in (6) die virtuellen Verrückungen für jedes Zeitintervall will-

---

[57] *G. Hamel*, Zeitschr. Math. Phys. 50 (1904), p. 14.

[58] *K. Heun*, Lehrbuch der Mechanik, T. 1: Kinematik (Leipzig 1906), p. 92. Vgl. auch IV 11, Nr. **11**, *K. Heun*.

[59] Vgl. IV 11, Nr. **19** bis **21**, *K. Heun*.

[60] Variiert man auch den Zeitparameter t, so kann man ebenso die von *G. Hamel* (Math. Ann. 59 (1904), p. 423) und *K. Heun*[58]) als *allgemeine Zentralgleichung* bezeichnete Relation auf die Mechanik der Kontinua übertragen; vgl. IV 11, Nr. **19** bis **21**, *K. Heun*.

[61] Dies Prinzip wurde für einzelne Teilgebiete der Mechanik der Kontinua von verschiedenen Seiten sehr bald aufgestellt, nachdem man es einmal für die Punktmechanik besass (s. IV 1, Nr. **42**, *Voss*); man vergleiche ausser der später zu zitierenden Litteratur der Einzeldisziplinen *A. Walter*, Anwendung der Methode Hamiltons auf die Grundgleichungen der math. Theorie der Elastizität, Diss. Berlin 1868, sowie die zusammenfassenden Darstellungen in *Kirchhoffs* Mechanik, p. 117 f und *W. Voigts* Kompendium I, p. 227 ff.

where the abbreviation of the total *kinetic energy*

$$T = \frac{1}{2} \iiint\limits_{(V_0)} \varrho_0 \sum_{(xyz)} x'^2 dV_0 = \frac{1}{2} \iiint\limits_{(V)} \varrho \sum_{(xyz)} x'^2 dV \tag{5}$$

has been introduced. Eq. (4) is the equation used by *G. Hamel* [57]) and *K. Heun* [58]) under the name *central equation of Lagrange* as the foundation of mechanics of systems with finitely many degrees of freedom, which holds in the same manner also for the mechanics of continua[59]), and is completely equivalent to (1): *the motion happens to be such that for every virtual displacement being admissible with respect to the possible constraints, the time derivative of the virtual work of the momentum* (x', y', z') *per unit of mass is, at any instant, equal to the sum of the variation of the kinetic energy and the virtual work of all force effects.* [60])

Considering now the motion within the time interval $t_0 \leqq t \leqq t_1$, then (4) holds for every instant, and by integrating in t with the boundaries t_0, t_1, it follows the so-called *Hamilton's Principle* when the virtual displacements are taken to be zero at the instants $t = t_0, t_1$ [61]): *By superimposing to the motion of the continuum any virtual displacements which vanish without exception at the instants* [t_0 *and* t_1] *being admissible with respect to the possibly occurring constraints, then the time integral from* t_0 *to* t_1 *of the sum of the virtual work and the variation of the kinetic energy vanishes:*

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta A) dt = 0. \tag{6}$$

Since for every time interval in (6) the virtual displacements

[57] *G. Hamel*, Zeitschr. Math. Phys. 50 (1904), p. 14.

[58] *K. Heun*, Lehrbuch der Mechanik, T. 1: Kinematik (Leipzig 1906), p. 92. Cf. also IV 11, No. **11**, *K. Heun*.

[59] Cf. IV 11, No. **19** to **21**, *K. Heun*.

[60] By varying also the time-parameter t, one can also obtain the relation denoted by *G. Hamel* (Math. Ann. 59 (1904), p. 423) and *K. Heun* [58]) as *general central equation* to the mechanics of continua; cf. IV 11, No. **19** to **21**, *K. Heun*.

[61] This principle has been formulated very soon by different authors for individual branches of the mechanics of continua, after one has got it for point mechanics (see IV 1, No. **42**, *Voss*); one shall compare besides the literature of individual disciplines cited later on *A. Walter*, Anwendung der Methode Hamiltons auf die Grundgleichungen der math. Theorie der Elastizität, Diss. Berlin 1868, as well as the summarizing presentation in *Kirchhoff's* Mechanik, p. 117 f. and *W. Voigts* Kompendium I, p. 227 ff.

kürlich gewählt werden können, kann man ebenso leicht rückwärts aus (6) auf (4) oder (1) schliessen: *diese Prinzipe sind völlig äquivalent.*

Man kann nun weiterhin direkt aus diesen Sätzen das *Prinzip der kleinsten Wirkung* in seinen verschiedenen Formen für die Mechanik der Kontinua herleiten[62]); doch scheint es da — abgesehen von Fällen, die auf Systeme mit endlichvielen Freiheitsgraden zurückkommen — noch keine wesentliche Anwendung gefunden zu haben.

5c. Das Prinzip des kleinsten Zwanges. Man kann die Trägheitsglieder im *d'Alembert*schen Prinzip auch ohne die Integration nach der Zeit in die Variation eines für jeden Bewegungszustand bestimmten nur vom Zustand im Moment t abhängigen Ausdruckes überführen, wobei freilich das Auftreten zweiter zeitlicher Ableitungen zugelassen werden muß. So entsteht das *Gauss*sche Prinzip des kleinsten Zwanges[63]), das *A. v. Brill* neuerdings zum Ausgangspunkt einer systematischen Behandlung der Mechanik der Kontinua gewählt hat.[64])

Um dies Prinzip zu gewinnen, entnehmen wir die virtuelle Verrückung einer Schar variierter Bewegungen Nr. **2**, (6) von folgender besonderer Art: Jedes Teilchen a, b, c soll in dem betrachteten Zeitmoment t dieselbe Lage und dieselbe Geschwindigkeit besitzen wie bei der wirklichen Bewegung, d. h. es soll für ebenjenen Wert t gelten:

$$\delta x(a,b,c;t) = 0, \quad \delta x'(a,b,c;t) = 0 \quad (x,y,z), \tag{7}$$

während die Variationen $\delta x'', \delta y'', \delta z''$ der Beschleunigungen von Null verschieden sind. Diese drei Funktionen kann man nun in jedem Falle als Bestimmungsstücke der in (1) eingehenden Verrückung verwenden. Im Falle eines frei deformierbaren Kontinuums ist das evident. Besteht aber eine Bedingung der Form (3), so ergiebt sich durch zweimalige Differentiation nach t

$$\sum_{(xyz)} \frac{\partial \omega}{\partial x} x'' + \sum_{(xyz,abc)} \frac{\partial \omega}{\partial x_a} x_a'' + \cdots = 0,$$

[62] Beispielsweise die Betrachtungen von *O. Hölder*, Die Prinzipien von Hamilton und Maupertius (Gött. Nachr., math.-phys. Kl. 1896, p. 122 ff.) lassen sich unmittelbar auf Kontinua ausdehnen.

[63] *Gauss*' Werke V, p. 23 = Journal f. Math. 4 (1829). Die erste analytische Formulierung dieses von *Gauss* nur in Worten ausgesprochenen Prinzipes haben *R. Lipschitz*, Journ. f. Math. 82 (1877), p. 321 ff. und wenig später *J. W. Gibbs*, Amer. Journ. 2 (1879), p. 49 = Scientif. Pap. II (New-York 1906), p. 1 gegeben. Über die weitere Litteratur s. IV 1, Nr. **39**, *A. Voss*.

[64] *A. v. Brill*, Vorlesungen zur Einführung in die Mechanik raumerfüllender Massen, Leipzig 1909.

can be chosen arbitrarily, one can also easily imply the other way round that (4) or (1) follow from (6): *these principles are completely equivalent.*

Furthermore, one can now derive directly from these propositions the *principle of least action* in its various forms for the mechanics of continua[62]); nevertheless it seems — except for cases reducing to systems with finitely many degrees of freedom — that it has not found essential applications [up to now].

5c. The principle of least constraint. Also without the integration in time, one can transform the inertia terms in *d'Alembert*'s principle into the variation of an expression determined for every motion by the state at the instant [of time] t only, in which certainly the appearance of time derivatives of second order must be allowed. In this way *Gauss's* principle of least constraint emerges[63]), which *A. v. Brill* has recently chosen as the starting point of a systematic treatment of the mechanics of continua.[64])

To obtain this principle, we take from the virtual displacements a familiy of varied motions No. **2**, (6) of the following special kind: For the considered instant of time t, every particle a, b, c shall have the same position and the same velocity as the actual motion, i. e. it shall hold for that very value t:

$$\delta x(a,b,c;t) = 0, \quad \delta x'(a,b,c;t) = 0 \quad (x,y,z), \tag{7}$$

while the variations $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z''$ of the accelerations are different from zero. One can now use these three functions as characteristic quantities of the displacements involved in (1). In the case of a freely deformable continuum this is evident. However, when there is a condition of the form (3), two times differentiation with respect to t yields

$$\sum_{(xyz)} \frac{\partial \omega}{\partial x} x'' + \sum_{(xyz,abc)} \frac{\partial \omega}{\partial x_a} x''_a + \cdots = 0,$$

[62] For instance the considerations of *O. Hölder*, Die Prinzipien von Hamilton und Maupertius (Gött. Nachr., math.-phys. Kl. 1896, p. 122 ff.) can be extended immediately to continua.

[63] *Gauss*' Werke V, p. 23 = Journal f. Math. 4 (1829). The first analytic formulation of this principle proposed by *Gauss* only verbally has been given by *R. Lipschitz*, Journ. f. Math. 82 (1877), p. 321 ff. and soon after by *J. W. Gibbs*, Amer. Journ. 2 (1879), p. 49 = Scientif. Pap. II (New-York 1906), p. 1. For further literature see IV 1, No. **39**, *A. Voss*.

[64] *A. v. Brill*, Vorlesungen zur Einführung in die Mechanik raumerfüllender Massen, Leipzig 1909.

wo durch die Punkte bekannte Funktionen der $x, \dots, x_a, \dots,$ und ihrer ersten zeitlichen Ableitungen angedeutet sind. Durch Variation, d. h. Differentiation nach σ, folgt wegen (7) für den festen Moment t

$$\sum_{(xyz)} \frac{\partial \omega}{\partial x} \delta x'' + \sum_{(xyz,abc)} \frac{\partial \omega}{\partial x_a} \delta x_a'' = 0,$$

und das ist tatsächlich genau die oben für die δx aufgestellte Bedingung (3′). Die Einführung der Funktionen $\delta x'', \dots$ in (1) ist daher gestattet und ergiebt nach leichter Umformung das folgende neue Prinzip[65]): *Variiert man die wirkliche Bewegung eines Kontinuums in einem bestimmten Moment so, dass Lage und Geschwindigkeit eines jeden Teilchens erhalten bleiben, aber die Beschleunigung den etwa stattfindenden Nebenbedingungen entsprechend geändert wird, so verschwindet stets die folgende Integralsumme:*

$$(8) \quad -\delta \iiint\limits_{(V)} \tfrac{1}{2} \varrho \sum_{(xyz)} x''^2 dV + \iiint\limits_{(V)} \Big(\varrho \sum_{(XYZ)} X \delta x'' - \sum_{(XYZ,xyz)} X_x \frac{\partial \delta x''}{\partial x} \Big) dV + \iint\limits_{(S)} \sum_{(XYZ)} \overline{X} \delta x'' dS = 0.$$

An Stelle der hier auftretenden Variation einer der „mittleren Beschleunigung" entsprechenden Größe[66]) kann man auch das genaue Analogon des *Gaussschen Zwanges* einführen; denn ordnet man der variierten Bewegung die gleichen ungeänderten Kräfte zu, so kann man (8) schreiben

$$(8') \quad -\delta \Big\{ \iiint\limits_{(V)} \tfrac{1}{2} \varrho \sum_{\binom{xyz}{XYZ}} (x'' - X)^2 dV \Big\} - \iiint\limits_{(V)} \sum_{(XYZ,xyz)} X_x \frac{\partial \delta x''}{\partial x} dV + \iint\limits_{(S)} \sum_{(XYZ)} \overline{X} \delta x'' dS = 0.$$

Die wesentliche Bedeutung dieses Prinzips besteht wie in der Punktmechanik darin, dass es völlig ungeändert auch bei Systemen mit *nichtholonomen* Nebenbedingungen Geltung hat. Besteht etwa eine solche Bedingungsgleichung, in der neben den Bewegungsfunktionen und ihren räumlichen Ableitungen auch die ersten *zeitlichen* Differentialquotienten auftreten:

$$\omega(a, b, c; x, y, z; x_a, \dots, z_c; x', y, z'; x_a', \dots, z_c'; t) = 0,$$

so erhält man durch einmalige Differentiation nach t die Bedingung

[65] *Brill*, a. a. O., p. 61 ff.

[66] Sie ist zuerst von *P. Appell*, Paris C. R. 129 (1899), p. 317 und in einer Reihe weiterer Arbeiten (s. IV 1, Nr. **38**, *Voss*) in diesem Zusammenhange benutzt worden.

where with the points some known functions $x, \ldots, x_a, \ldots,$ and their first time derivatives are indicated. By the variation, i. e. differentiation with respect to σ, it follows due to (7) for the fixed instant t

$$\sum_{(xyz)} \frac{\partial \omega}{\partial x} \delta x'' + \sum_{(xyz,abc)} \frac{\partial \omega}{\partial x_a} \delta x''_a = 0,$$

and this is in fact exactly condition (3′) for the δx formulated above. Thus, the introduction of the functions $\delta x'', \ldots$ in (1) is allowed and after slight transformations the following new principle is obtained.[65]): *Varying the actual motion of a continuum in a certain instant in such a way that the position and the velocity of every particle are conserved, but the acceleration is changed agreeing with the possible constraints, then the following sum of integrals always vanishes:*

$$(8) \qquad -\delta \iiint\limits_{(V)} \tfrac{1}{2} \varrho \sum_{(xyz)} x''^2 dV + \iiint\limits_{(V)} \Big(\varrho \sum_{(XYZ)} X \delta x'' - \sum_{(XYZ,xyz)} X_x \frac{\partial \delta x''}{\partial x} \Big) dV + \iint\limits_{(S)} \sum_{(XYZ)} \overline{X} \delta x'' dS = 0.$$

Instead of the variation of a quantity corresponding to an "averaged acceleration" appearing here[66]) one can also introduce the exact analogy of *Gauss's constraint*; then by attributing to the varied motion the same unchanged forces, one can write (8) as

$$(8') \qquad -\delta \Big\{ \iiint\limits_{(V)} \tfrac{1}{2} \varrho \sum_{\binom{xyz}{XYZ}} (x'' - X)^2 dV \Big\} - \iiint\limits_{(V)} \sum_{(XYZ,xyz)} X_x \frac{\partial \delta x''}{\partial x} dV + \iint\limits_{(S)} \sum_{(XYZ)} \overline{X} \delta x'' dS = 0.$$

The significant relevance of this principle lies, as in point mechanics, in the fact that it is valid completely unchanged for systems with *nonholonomic* constraints. For instance, [when] such a constraint equation, in which besides the functions of motion and their spatial derivatives also their first differential quotient with respect to *time* appear:

$$\omega(a, b, c; x, y, z; x_a, \ldots, z_c; x', y, z'; x'_a, \ldots, z'_c; t) = 0,$$

then one obtains by once differentiating with respect to t the condition

---

[65] *Brill*, op. cit. p. 61 ff.

[66] It has been used in this context at first by *P. Appell*, Paris C. R. 129 (1899), p. 317 and in a series of further works (s. IV 1, No. **38**, *Voss*).

für die Werte der Beschleunigung im festen Momente t, und durch Variation (Differentiation nach σ) ergiebt sich wegen (7)

$$\sum_{(xyz)} \frac{\partial \omega}{\partial x'} \delta x'' + \sum_{(xyz,abc)} \frac{\partial \omega}{\partial x'_a} \delta x''_a = 0,$$

was nunmehr (8) als Nebenbedingung zuzufügen ist.

Ist ω speziell linear in den Geschwindigkeiten $x', \dots, x'_a, \dots$ so ist dies Resultat dem Wesen nach identisch mit der Form, in der man das *d'Alembert*sche Prinzip vielfach für nichtholonome Bedingungen ausspricht[55]), wobei an Stelle der dort nur formal eingeführten virtuellen Verrückungen eben die Variationen der Beschleunigung treten.

Ein weiterer Vorzug dieses Prinzips vor dem *d'Alembert*schen, der indessen in der Mechanik der Kontinua bisher kaum ausgenutzt zu sein scheint, besteht darin, dass es auch für die Behandlung kinetischer Probleme mit Ungleichungsnebenbedingungen die geeignete Grundlage bietet: man hat nur zu fordern, dass der Ausdruck (8) für alle nach den Nebenbedingungen im Moment t bei fester Lage und Geschwindigkeit der einzelnen Teilchen zulässigen Variationen der Beschleunigung kleiner oder gleich Null ist — genau wie es für die Punktmechanik schon *Gauss* [67]) besonders betont hat.

5d. Ansätze allgemeinerer Natur. Von Ansätzen, die über die bisher umschriebenen gewissermassen klassischen Formen der Grundgleichungen der Kinetik hinausführen, ist an erster Stelle eine *Verallgemeinerung des Hamiltonschen Prinzips* zu nennen, die ganz ähnlich bereits in der Dynamik der Systeme mit endlichvielen Freiheitsgraden eine wichtige Rolle spielt[68]); sie besteht darin, daß man zur Bildung der kinetischen Energie T eine allgemeinere Funktion der Geschwindigkeitskomponenten, insbesondere eine definite quadratische Form verwendet:[69])

$$T = \frac{1}{2} \iiint_{(V)} \mathfrak{T} dV, \text{ wo } \mathfrak{T} = \varrho_{11} x'^2 + 2\varrho_{12} x' y' + \cdots . \tag{9}$$

Alsdann folgen aus dem *Hamilton*schen Prinzip (6) Bewegungsgleichungen, die sich von (2) nur dadurch unterscheiden, dass an Stelle von $\varrho \cdot x'', \dots$ tritt $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial x'}\right), \dots$. Die 6 Koeffizienten $\varrho_{11}, \dots$ sind ge-

[67] *Gauss*, Werke V, p. 27.

[68] Vgl. IV 12, *P. Stäckel*

[69] Diese Ansätze spielen in den älteren optischen Theorien *Lord Rayleighs* die entscheidende Rolle; s. bes. Phil. Magaz. (4) 41 (1871), p. 519 (vgl. V 21, Nr. **29**, *A. Wangerin*). Derselbe Ansatz bei *T. J. Bromwich*, Lond. math. Soc. Proc. 34 (1902), p. 307.

the values of the acceleration [have to satisfy] for the fixed instant t, and by calculating the variation (differentiation with respect to σ) [subject to conditions] (7) it follows

$$\sum_{(xyz)} \frac{\partial \omega}{\partial x'} \delta x'' + \sum_{(xyz,abc)} \frac{\partial \omega}{\partial x'_a} \delta x''_a = 0,$$

which henceforth has to be added to (8) as a constraint.

Especially, when ω is linear in the velocities $x', \ldots, x'_a, \ldots$, then this result is, by its nature, identical to the form in which one frequently states *d'Alembert's* principle for nonholonomic conditions[55]), whereas the variations of the acceleration substitute the virtual displacements formally introduced therein.

An additional advantage of this principle in contrast to *d'Alembert*'s [principle], which has hardly been used so far in the mechanics of continua, lies therein, that it provides a suitable basis for the treatment of kinetic problems with inequality constraints: one only has to ask expression (8) to be smaller or equal to zero for all variations of the acceleration which at an instant t for a fixed position and velocity are admissible with respect to the constraints — exactly as it already has been stressed in particular by *Gauss*.[67])

5d. Principles of general nature. To mention principles, which go beyond the so far discussed classical forms of the fundamental equations of kinetics, one must cite a *generalization of Hamilton's principle*, which plays quite similarly an important role in the dynamics of systems with finitely many degrees of freedom[68]); [the generalization] lies therein, to use for the formation of the kinetic energy T a more general function in the components of velocities, particularly a definite quadratic form:[69])

$$T = \frac{1}{2} \iiint_{(V)} \mathfrak{T}\, dV, \text{ where } \mathfrak{T} = \varrho_{11} x'^2 + 2\varrho_{12} x' y' + \cdots . \tag{9}$$

Thereupon from *Hamilton*'s principle (6) there follows equations of motion, which differ from (2) only in the point, that $\varrho \cdot x'', \ldots$ is substituted by $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial x'}\right), \ldots$. The 6 coefficients $\varrho_{11}, \ldots$ are

[67] *Gauss*, Werke V, p. 27.

[68] Cf. IV 12, *P. Stäckel*

[69] These approaches play an essential role in older optical theories of *Lord Rayleigh*; see especially Phil. Magaz. (4) 41 (1871), p. 519 (cf. V 21, No. **29**, *A. Wangerin*). The same approach in *T. J. Bromwich*, Lond. math. Soc. Proc. 34 (1902), p. 307.

gebene Funktionen von a, b, c; sie bestimmen gemeinsam die Dichte (Trägheitsmasse) des Mediums, die sonach von der Richtung abhängig ist (*kinetische Anisotropie*).

Sehr viel weiter holt ein *anderer Ansatz* aus, der über die besondere Form der kinetischen Energie bzw. der vermöge der Bewegung auftretenden „Trägheitskräfte" ebensowenig eine Annahme macht, wie der Arbeitsausdruck in Nr. **3** bezüglich der Natur der Kräfte und Spannungen: Man erweitere das Prinzip der virtuellen Verrückungen durch die einer vierten unabhängigen Variablen — der Zeit t — entsprechenden Operationen (Integration nach t und Hinzufügung von Gliedern mit zeitlichen Ableitungen der $\delta x, \ldots$) und bezeichne als *virtuelle Arbeit des bewegten Kontinuums im Zeitintervall* t_0, t_1 bei einer virtuellen Verrückung der Bewegung das vierfache Integral, in dem a, b, c, t als Unabhängige aufgefasst sind):[70])

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \iiint_{(V_0)} dV_0 \left(\sum_{\binom{x\,y\,z}{X\,Y\,Z}} \left(\varrho_0 X \delta x + X_t \frac{\partial \delta x}{\partial t} \right) - \sum_{\left(\substack{x\,y\,z \\ X\,Y\,Z}\,;\, a\,b\,c\right)} X_a \frac{\partial \delta x}{\partial a} \right). \tag{10}$$

Dabei sind die *Impulskomponenten* $X_t, \ldots$, die den Einfluss der Bewegung repräsentieren, ebenso wie Kraft- und Spannungsgrössen $X, \ldots,\ X_a, \ldots$ in ihrer Abhängigkeit von den Bewegungsfunktionen gemäss der speziellen Natur des Kontinuums gegeben zu denken; die bisher angenommenen geläufigen Trägheitskräfte erhält man, wie (5), (6) zeigt, für $X_t = \varrho_0 x'$, während (9) einem allgemeinen linearen Ansatz in x', y', z' entspricht. Weiterhin können zu (10) wie in Nr. **3** noch analoge Integrale über den Rand des Integrationsgebietes im a-b-c-t-Raume hinzutreten. *Die Bewegung geht nun so vor sich, dass die virtuelle Arbeit* (10) *für jede unendlichkleine mit den etwa bestehenden Nebenbedingungen verträgliche virtuelle Verrückung verschwindet;* daraus kann man nach den bekannten Methoden leicht die Bewegungsgleichungen entnehmen — beispielsweise folgt für ein beliebig stetig deformierbares Kontinuum:

$$\frac{dX_t}{dt} = \varrho_0 X + \frac{\partial X_x}{\partial a} + \frac{\partial X_y}{\partial b} + \frac{\partial X_z}{\partial c} \qquad (X, Y, Z), \tag{11}$$

und analog ergeben sich die Randbedingungen. Ganz wie in Nr. **3**c

[70]) Für den Spezialfall, dass diese virtuelle Arbeit die Variation eines „Wirkungsintegrales" ist, sind diese Ansätze systematisch aufgestellt und verfolgt von *E.* u. *F. Cosserat*, Corps déformables, p. 156 ff. (vgl. Nr. **7**b). — In einer durch die Anforderungen der Relativitätstheorie modifizierten Form tritt derselbe Ansatz auf bei *H. Minkowski*, Grundgleichungen der elektromagnet. Vorgänge in bewegten Körpern, Gött. Nachr. 1908, p. 106 (vgl. Nr. **16**).

known functions of a, b, c; they determine together the density (mass of inertia) of the medium, which therefore depends on the direction (*kinetic anisotropy*).

Much further goes an *another postulation*, which makes on the particular form of the kinetic energy or the "inertia forces" due to the motion just as little assumptions, as the work expression in No. **3** on the nature of forces and stresses: One shall augment the principle of virtual displacements with a fourth independent variable — the time t — [with] corresponding operations (integration in t and addition of terms with time derivatives of $\delta x, \dots$) and [one shall] denote the fourfold integral, in which a, b, c, t are considered to be independent, as *virtual work of the moving continuum in the time interval* t_0, t_1:[70])

$$(10) \qquad \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint_{(V_0)} dV_0 \Bigg(\sum_{\binom{x\,y\,z}{X\,Y\,Z}} \Big(\varrho_0 X \delta x + X_t \frac{\partial \delta x}{\partial t} \Big) - \sum_{\binom{xyz}{XYZ}\,;\,a\,b\,c} X_a \frac{\partial \delta x}{\partial a} \Bigg).$$

Thereby, the *components of momentum* $X_t, \dots$, representing the influence on the motion, shall be seen in the same way as the force and the stress quantities $X, \dots,$ $X_a, \dots$ in their relation to the functions of motion according to the special nature of the continuum; one obtains the inertia forces commonly assumed so far, as (5), (6) show, for $X_t = \varrho_0 x'$, while (9) corresponds to a general linear ansatz in x', y', z'. In addition, there can be added to (10) as in No. **3** similar integrals over the boundary of the domain of integration in the a-b-c-t-space. *The motion now takes place in such a way, that the virtual work* (10) *vanishes for every infinitesimal virtual displacement being admissible with respect to the possible constraints;* According to the well known methods, one can easily extract out of this the equations of motion — for instance for an arbitrarily continuously deformable continuum [it] follows:

$$(11) \qquad \frac{dX_t}{dt} = \varrho_0 X + \frac{\partial X_x}{\partial a} + \frac{\partial X_y}{\partial b} + \frac{\partial X_z}{\partial c} \qquad (X, Y, Z),$$

and the boundary conditions are obtained analogously. Like in No. **3**c

[70] For the special case, that this virtual work is the variation of an "action integral", these approaches are formulated and pursued by *E.* and *F. Cosserat*, Corps déformables , p. 156 ff. (cf. No. **7**b). — In a form modified by the requirements of the theory of relativity the same approach appears in *H. Minkowski*, Grundgleichungen der elektromagnet. Vorgänge in bewegten Körpern, Gött. Nachr. 1908, p. 106 (cf. No. **16**).

kann man in (10), (11) x, y, z statt a, b, c als Unabhängige einführen[71]).

Ganz analog hat man die allgemeine Kinetik der in Nr. **4**b betrachteten *Medien mit orientierten Teilchen* auszubauen, wenn man diesen Teilchen einen Trägheitswiderstand gegen Winkelbeschleunigungen zuschreibt: Man hat, um hier sogleich den allgemeinsten Ausdruck zu formulieren, zu (10) nur das Nr. **4**, (2) analoge Integral[72])

$$(12) \qquad \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint\limits_{(V_0)} dV_0 \Bigg(\sum_{\left(\substack{LMN \\ \pi\kappa\varrho}\right)} \left(\varrho_0 L \delta\pi + L_t \frac{\partial \delta\pi}{\partial t} \right) - \sum_{\left(\substack{LMN \\ \pi\kappa\varrho}\,;\, a\,b\,c\right)} L_a \frac{\partial \delta\pi}{\partial a} \Bigg)$$

hinzuzufügen, wo $L_t, \ldots$ den Impuls der inneren Rotation bestimmen, und kann hieraus wie in Nr. **4**b in jedem Falle die Bewegungsgleichungen, die bei freier Beweglichkeit der Dreikante ein zweites (11) analoges Tripel aufweisen, herleiten[73])

Alle diese Betrachtungen sind mit leichten Modifikationen auch auf die Dynamik zwei- und eindimensionaler Kontinua anwendbar.[74])

III. Die Formen der Wirkungsgesetze.

A. Formulierung der allgemeinen Typen.

6. Die Typen der Abhängigkeit der Kraftwirkungen von den Deformationsgrössen. Während in den bisherigen Erörterungen die Wirkungskomponenten — unter diesem Ausdruck seien der Kürze halber neben den Kräften und Spannungen aller Arten auch die Impulsgrössen von Nr. **5**d mitinbegriffen — nur formal als Koeffizienten des Ausdrucks der virtuellen Arbeit in Betracht kamen, ist nunmehr von ihrem Zusammenhang mit den Bestimmungsstücken der Deformation bzw. der Bewegung des Kontinuums Rechenschaft zu geben, der bestehen und bekannt sein muss, wenn anders die angegebenen Grundgleichungen überhaupt die Deformation bzw. Bewegung des Kontinuums bestimmen sollen. Er muss überdies die anschaulich evidente Tatsache zum Ausdruck bringen, dass in jedem Kontinuum durch Bewegungen und Deformationen gewisse Kraftwirkungen ausgelöst werden, und dass umgekehrt durch einwirkende Kräfte und Spannungen Bewegungen und Deformationen hervorgerufen werden. Dabei muss in

[71] Vgl. *E.* u. *F. Cosserat*, a. a. O., p. 187 ff.

[72] *E.* u. *F. Cosserat*, a. a. O., p. 156 ff., p. 167 ff.

[73] Vgl. auch IV 11, Nr. **21**c (*K. Heun*)

[74] *E.* u. *F. Cosserat*, a. a. O., p. 121. Die Ansätze der Kinetik ein- und zweidimensionaler Kontinua ordnen sich denen der Statik zwei- bzw. dreidimensionaler ein.

in (10), (11), one can introduce x, y, z instead of a, b, c as independent [variables][71]).

Completely analogously one has to extend the general kinetics of *media with oriented particles* considered in No. **4**b, if one associates to these particles a resistance of inertia against angular accelerations: In order to formulate readily the most general expression, one has to add to (10) only the integral being analogous to No. **4**, (2)[72])

$$(12) \qquad \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint_{(V_0)} dV_0 \left(\sum_{\binom{LMN}{\pi\kappa\varrho}} \left(\varrho_0 L \delta\pi + L_t \frac{\partial \delta\pi}{\partial t} \right) - \sum_{\binom{LMN}{\pi\kappa\varrho};\, a\, b\, c} L_a \frac{\partial \delta\pi}{\partial a} \right),$$

where $L_t, \ldots$ determines the momentum of the internal rotation, and [one] can herefrom derive as in No. **4**b in every case the equations of motion, which have for a free movability of the triad a second triple [of equations] analogous to (11).[73])

All these considerations are with slight modifications also applicable for the dynamics of two- and one-dimensional continua.[74])

III. The forms of constitutive laws.

A. Formulation of general classes.

6. The classes with dependence of the force effects on the deformation quantities. While in the previous discussions the effects — for the sake of brevity this expression includes besides forces and stresses of any kind also the momentum quantities of No. **5**d — have been considered in a mere formal way as coefficients of the virtual work expression, henceforth, [we] have to account for their connection with the characteristic quantities of the deformation or the motion of the continuum, which has to exist and has to be known, when after all the stated fundamental equations shall determine the deformation or the motion of the continuum. Moreover, [this connection] must express the clearly evident fact, that in every continuum due to motions and deformations certain force effects are induced, and that vice versa due to impressed forces and stresses motions and deformation are caused. Thereby

[71] Cf. *E.* and *F. Cosserat*, op. cit. p. 187 ff.

[72] *E.* and *F. Cosserat*, op. cit. p. 156 ff., p. 167 ff.

[73] Cf. also IV 11, No. **21**c (*K. Heun*)

[74] *E.* and *F. Cosserat*, op. cit. p. 121. The postulations regarding the kinetics of one- and two-dimensional continua can be based on those [used] in the statics of two- and three-dimensional [continua], respectively.

erster Linie der Unterschied zur Geltung kommen, ob die Kraftwirkungen *äussere* sind, d. h. in den Beziehungen des betrachteten Mediums zu ausserhalb gelegenen Medien oder Wirkungsquellen ihren Ursprung haben (Fernkräfte, Drucke an den Grenzflächen usw.), oder *innere*, d. h. auf der materiellen Konstitution des einzelnen Mediums und den gegenseitigen Einwirkungen seiner Teile beruhen. Die zuletzt genannten Wirkungen sind für den vorliegenden Zweck wesentlicher; insofern die gesuchten Gleichungen sie liefern, charakterisieren sie das eigentümliche dynamische Verhalten eines jeden Mediums innerhalb der allen Kontinuis gemeinsamen Formen und können daher geradezu als *Stoffgleichungen* bezeichnet werden.

Bei der Erörterung, wie diese Stoffgleichungen im allgemeinen beschaffen sind, genügt es, in erster Linie auf die in Nr. **3** behandelten Medien und die eigentlichen Spannungsgrössen $X_x, \dots, Z_z$ und allenfalls auf die Kraftkomponenten X, Y, Z Bezug zu nehmen. Danach lassen sich dann die entsprechenden allgemeinen Schemata für die in Nr. **4**, auftretenden Spannungsgrößen in weiterem Sinne und für die Impulskomponenten von Nr. **5**d leicht aufstellen — die bei diesen bisher tatsächlich angewendeten Ansätze ordnen sich übrigens den speziellen in Nr. **7**b,f zu besprechenden Abhängigkeitstypen unter. Die Werte der Spannungskomponenten $X_x, \dots, Z_z$ die dem zur Zeit t an der Stelle

$$x = x(a, b, c; t), \quad y = y(a, b, c; t), \quad z = z(a, b, c; t) \tag{1}$$

befindlichen Teilchen a, b, c entsprechen, müssen durch die Stoffgleichungen für jede mögliche Bewegung des Kontinuums gegeben sein; sie werden also explizit dargestellt als irgendwie geartete von a, b, c, t und den Funktionen (1) abhängige Ausdrücke, in die neben den Werten dieser Funktionen und ihrer örtlichen und zeitlichen Ableitungen an der Stelle a, b, c, t möglicherweise auch ihre Werte an andern Stellen $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{t}$ und überhaupt ihr Gesamtverlauf im Variabilitätsbereich ihrer vier Veränderlichen (Integrale u. dgl.) eingehen — also, symbolisch geschrieben, in der Form:

$$F(a, b, c, t; x(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{t}), \dots\dots). \tag{2}$$

Geht man zu einem andern rechtwinkligen Koordinatensystem x, y, z über, so sind diese neun Ausdrücke der Spannungskomponenten wie die Komponenten einer Dyade zu transformieren (und ebenso die Ausdrücke für X, Y, Z wie Vektorkomponenten usw.); handelt es sich um innere Kraftwirkungen, so müssen zwischen den transformierten Komponenten und den neuen Koordinaten Gleichungen genau der alten Form bestehen.

primarily the [following] difference must be clarified, if the force effects are *external*, i. e. [the effects] have their cause in the relation to media and sources of effects located outside the considered medium (long-range forces, pressures at the boundary and such like), or *internal*, i. e. [the effects] are based on the material constitution of the particular medium and the mutual effects of the particles thereof. The last-named effects are for the objective at hand more essential; provided that the desired equations yield these [effects], they characterize the specific dynamic behavior of each one medium within the common classes of all continua and can consequently be denoted as *material laws*.

In the discussion, how these material laws are constituted in general, it is enough to refer primarily to the media treated in No. **3** and to the effective quantities of stress $X_x, \ldots, Z_z$ and if necessary to the force components X, Y, Z. Thereafter, the corresponding general schemes for the quantities of stress in the broader sense appearing in No. **4** and for the components of momentum of No. **5**d can be formulated easily — after all, the formulations [of the material laws] for these [effects] being effectively applied so far, can be deduced as special classes of dependence [which need] to be discussed in No. **7**b,f. The values of the stress components $X_x, \ldots, Z_z$ corresponding to the particle a, b, c located at time t at the position

$$x = x(a, b, c; t), \quad y = y(a, b, c; t), \quad z = z(a, b, c; t), \tag{1}$$

must be given by the material laws for every possible motion of the continuum; hence [the values] are represented explicitly as expressions of any kind depending on a, b, c, t and the functions (1). [These expressions] also include besides the values of the functions [(1)] and their spatial and time derivatives at the positions a, b, c, t possibly values at other positions $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{t}$ and in general the complete history in the domain of variability of the four variables (integrals and similar ones) — Hence, symbolically written in the form:

$$F(a, b, c, t; x(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{t}), \ldots\ldots). \tag{2}$$

Changing over to another orthogonal coordinate system x, y, z, then these nine expressions of the stress components have to be transformed like the components of a dyad (and similarly the expressions for X, Y, Z like vector components and so on); if it concerns internal force effects, then there must exist equations between the transformed components and the new coordinates [which are] exactly of the old form.

Wir betrachten nun der Reihe nach die einzelnen möglicherweise in den Spannungsausdrücken auftretenden Argumente; natürlich können die im folgenden einzeln diskutierten Wirkungen auch gleichzeitig stattfinden. In erster Linie ist da zu bemerken, daß explizites Vorkommen der Parameter a, b, c auf *Inhomogenität* des Mediums, d. h. Verschiedenheit seiner Eigenschaften von Teilchen zu Teilchen, hindeutet; Auftreten des Zeitparameters t bedeutet in ihrem zeitlichen Verlauf von vornherein bestimmte, d. h. ohne Rücksicht auf die wirklich stattfindende Bewegung gegebene *äussere Einwirkungen*.

Das eigentlich Wesentliche ist natürlich die Art des Eingehens der Funktionen (1) selbst[75]); betrachten wir zunächst den Fall, daß nur ihr Wertverlauf in beliebig kleiner Umgebung der Stelle a, b, c, t, d. h. die Werte der Funktionen und ihrer Ableitungen an dieser Stelle, in (2) auftreten, daß also (2) von der Form ist

$$(3) \qquad F(a, ..., t; x(a, ..., t), ...; x_a(a, ..., t), ..., x_t(a, ..., t); x_{aa}(a, ..., t), ...).$$

Das Vorkommen der Lokalwerte von x, y, z selbst bedeutet Wirkungen, die von der wirklichen Lage der einzelnen Teilchen im Raum abhängen, wie es beispielsweise äussere gegebene Kraftfelder (Schwere oder dgl.) sind. Charakteristischer für die Kontinua sind indessen die Nahewirkungen, die sich im Auftreten von Spannungen infolge lokaler Deformationen äussern. Als Bestimmungsstücke der gesamten Deformation an einer Stelle (nicht bloss der reinen Formänderung der elementaren Elastizitätstheorie) betrachtet man bekanntlich in erster Linie die Werte der neun *ersten örtlichen Ableitungen* daselbst (vgl. IV 14, Nr. **16**); die in Rede stehende Wirkung kommt daher in expliziter Abhängigkeit der Spannungskomponenten von den Werten $x_a, \ldots, z_c$ an der Stelle a, b, c, t zum Ausdruck. Die Art dieser Abhängigkeit muss hervortreten lassen, ob und welche einzelnen Bestandteile der Deformation alleinigen oder vorzugsweisen Einfluss auf die Spannung bzw. auf die einzelnen Bestandteile der Spannung besitzen, wie später bei der Behandlung der einzelnen Gebiete zur Geltung kommen wird.

Der Deformationszustand an einer Stelle wird genauer beschrieben, wenn man neben den ersten noch *höhere örtliche Ableitungen* der Funktionen (1) heranzieht, d. h. die Deformation in der Umgebung durch eine Transformation höheren Grades statt durch eine lineare approximiert; die Abhängigkeit der Spannungen von der Deformation wird also vollständiger wiedergegeben sein, wenn man auch diese höheren

[75] Die im folgenden zunächst anzuführenden Abhängigkeitstypen sind ihrer Form nach in der Regel zuerst in der Entwicklung der Elastizitätstheorie aufgetreten; nähere Angaben werden unter IIIB in den Nrn. **9**—**16** zu machen sein.

We consider now successively each argument possibly appearing in the expressions of stress; certainly, these effects which are discussed in the following individually can also appear simultaneously. Primarily, it has to be noted that the explicit appearance of the parameter a, b, c indicates *inhomogeneity*, i. e. difference of the properties from particle to particle; [the] appearance of the time parameter t indicates given *external excitations*, whose progress in time is a priori determined, irrespective of the actual occurring motion.

The bare essentials are certainly how the functions (1) themselves enter [in the functional dependence expressed by (2)][75]); to begin with, we consider the case that [for the functions (1)] only their behavior in an arbitrary small vicinity of the position a, b, c, t, i. e. the values of the functions and their derivatives at this position, appear in (2), hence that (2) is of the form

$$\text{(3)} \qquad F(a, ..., t; x(a, ..., t), ...; x_a(a, ..., t), ..., x_t(a, ..., t); x_{aa}(a, ..., t), ...).$$

The occurrence of local values of x, y, z themselves corresponds with effects, which depend on the actual position of the individual particles in space, as they are for example external given force fields (gravity or similar ones). More characteristic for continua are however short-range effects, which manifest themselves in the appearance of stresses due to local deformations. As characteristic quantities of the whole deformation at a position (not only the pure shape change of the elementary theory of elasticity), one considers, as is well known, primarily the values of the nine *first spatial derivatives* thereof (cf. IV 14, No. **16**); thus, the considered effect at hand expresses itself with an explicit dependence of the stress components on the values $x_a, \ldots, z_c$ at the position a, b, c, t. The type of these dependences must clarify, if and which individual elements of the deformation have exclusive or mainly influence on the stress or on the individual elements of the stress, as it will become clear later in the discussion of the particular fields.

The state of deformation at a position is described more precisely, if one uses besides the first also *higher spatial derivatives* of the functions (1), i. e. the deformation in the neighborhood is approximated by a transformation of higher order instead of a linear one; the dependence of the stresses on the deformation will be represented more completely, if one includes also these higher

[75] The classes of dependence, quoted in the following to begin with, have according to their form usually appeared at first in the development of the theory of elasticity; particulars are to be given in IIIB for the Nos. **9—16**.

Ableitungen in die Stoffgleichungen hineinnimmt. Tatsächlich hat man bisher nicht höhere als zweite Ableitungen in Betracht gezogen, und zwar wird das erst dann nötig, wenn der Zustand des Mediums *sehr rasch* mit dem Ort variiert; die Spannungen an einer Stelle hängen dann also auch von dem örtlichen Abfall der gewöhnlichen Deformationsgrössen 1. Ordnung ab.

Ebenso wie die Lokalwerte der örtlichen Ableitungen können in der Kinetik auch die Werte der *zeitlichen Ableitungen* der Funktionen (1) an der Stelle a, b, c, t in (3) explizit eingehen; man hat da namentlich die Geschwindigkeitskomponenten x', y', z' der Teilchen selbst und die „Änderungsgeschwindigkeiten" der Deformationsgrössen $x'_a, \ldots, z'_c$ — die, mit dt multipliziert, auch als Komponenten der Deformation der Umgebung des Teilchens a, b, c vermöge der von t bis $t + dt$ vor sich gehenden Bewegung aufgefasst werden können[76]) — in Betracht gezogen. Diese Ansätze werden den Erscheinungen der *äusseren* und *inneren Reibung*, der *Zähigkeit* u. dgl. gerecht.

Bei allen Gesetzen vom Typus (3) ist die Frage von prinzipieller Bedeutung, wie diese Gleichungen sich bei einer Transformation der Richtungen der a-b-c-Parameterlinien durch diesen Punkt a, b, c verhalten, während die x-y-z-Koordinaten ungeändert bleiben. Dadurch wird nämlich bestimmt, ob und welche verschiedenen Richtungen durch einen Punkt des Mediums für dessen Konstitution, soweit sie sich in den betrachteten Stoffgleichungen äussert, gleichbedeutend sind, d. h. es wird über *Isotropie oder Aeolotropie des Mediums* entschieden; unter besonderen Verhältnissen ist dieser Zusammenhang in der Kristallphysik eingehend studiert worden, wobei nur durch die Beschränkung auf unendlichkleine Deformationen der Unterschied zwischen den Transformationen der a, b, c und der x, y, z nicht zur Geltung kommt.[77])

Für den allgemeineren Fall, dass in die Stoffgleichungen (2) auch die Werte der Funktionen (1) an anderen Stellen und zu anderen Zeiten eingehen, ist der charakteristische Ansatz von hinreichender Allgemeinheit — zunächst für die *Statik* —, die Spannungskomponenten gleich Raumintegralen über das ganze Kontinuum zu setzen

$$\iiint\limits_{(V_0)} f(a, \ldots; x, \ldots; x_a, \ldots; \bar{a}, \ldots; \bar{x}, \ldots; \bar{x}_a, \ldots)\, d\bar{a}\, d\bar{b}\, d\bar{c}, \tag{4}$$

[76] *Stokes*, Cambridge Phil. Trans. 8 (1845) = Math. and Phys. Papers 1 (1880), p. 80; vgl. auch IV 15, Nr. **7**, *Love*.

[77] Vgl. etwa *F. Neumann*, Vorles. üb. d. Theorie der Elastizität (Leipzig 1885), p. 164; *W. Voigt*, Abh. Ges. d. Wiss. Göttingen 34 (1887), 36 (1890), Kompendium I, p. 128 ff. und p. 333, sowie besonders Lehrb. d. Krystallphysik (Leipzig 1910), § 286 ff., § 370 ff., § 414 ff., § 462.

derivatives in the material laws. In fact, one has considered so far [derivatives which are] not higher than second derivatives, this is namely required not until then, when the state of the medium varies *very quickly* in space; the stresses at a position then depends also on the spatial slope of the common deformation quantities of 1. order.

Equally to the local values of the spatial derivatives, in kinetics also the values of the *time derivatives* of the functions (1) at the position a, b, c, t can enter in (3) explicitly; One has considered in particular the velocity components x', y', z' of the particles themselves and the "velocities of change" of the deformation quantities $x'_a, \ldots, z'_c$ — which, multiplied by dt, can also be interpreted as components of the deformation of the neighborhood of the particle a, b, c due to the ongoing motion between t and $t + dt$[76]). These basic approaches satisfy the phenomena of *external* and *internal friction*, i. e. *viscosity* and similar ones.

For all laws of the class (3) the question, how these equations behave under a transformation of the directions of the a-b-c parameter lines through these points a, b, c, while the x-y-z-coordinates remain unchanged, is of fundamental evidence. Thereby it is determined namely, if and which different directions through a point of the medium are tantamount for its constitution, provided that it is expressed in the considered material laws, i. e. it is decided on *isotropy or aeolotropy of the medium*; for specific conditions this connection has been studied thoroughly in the physics of crystals, where due to the mere restriction to infinitesimal deformation the difference between transformations of a, b, c and x, y, c does not appear.[77])

For the more general case, that within the material laws (2) also the values of the functions (1) at different positions and for different times enter, the characteristic ansatz is of sufficient generality — at first for *statics* —, to identify the components of stress with volume integrals over the whole continuum

$$\iiint\limits_{(V_0)} f(a, \ldots; x, \ldots; x_a, \ldots; \bar{a}, \ldots; \bar{x}, \ldots; \bar{x}_a, \ldots)\, d\bar{a}\, d\bar{b}\, d\bar{c}, \tag{4}$$

[76] *Stokes*, Cambridge Phil. Trans. 8 (1845) = Math. and Phys. Papers 1 (1880), p. 80; cf. also IV 15, No. **7**, *Love*.

[77] Cf. for instance *F. Neumann*, Vorles. üb. d. Theorie der Elastizität (Leipzig 1885), p. 164; *W. Voigt*, Abh. Ges. d. Wiss. Göttingen 34 (1887), 36 (1890), Kompendium I, p. 128 ff. and p. 333, as well as in particular Lehrb. d. Krystallphysik (Leipzig 1910), § 286 ff., § 370 ff., § 414 ff., § 462.

deren Integranden gegebene Funktionen der Werte der Deformationsfunktionen (1) und ihrer Ableitungen für die Teilchen a, b, c und $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ sind. Damit sind die Fernwirkungen innerhalb des Mediums umfasst: eine Wirkung an der Stelle x, y, z entsteht infolge der Zustände an allen anderen Stellen des Kontinuums. Aber neben die aus der klassischen Mechanik bekannten von Massenteilchen zu Massenteilchen wirkenden durch solche Ansätze dargestellten *Kräfte* nach Art der Attraktionskräfte treten hier neu die von *P. Duhem*[78]) betrachteten Fernwirkungen („*influence*") auf, vermöge deren an jeder Stelle des Kontinuums sich superponierende Kräfte oder Spannungen durch die an allen andern Stellen des Kontinuums stattfindenden *Deformationen* ausgelöst werden.

In der *Kinetik* wird man diesen Ansatz noch dahin ausdehnen, dass man ein Zeitintegral über den gesamten Bewegungsverlauf; oder vielmehr — unsern allgemeinen Vorstellungen von Ursache und Wirkung entsprechend — über die Zeit *vor* dem betrachteten Moment t hinzunimmt; der Integrand enthält dabei die Werte der Funktionen (1) sowie ihrer Ableitungen für die Momente t und $\bar{t}$ $(-\infty < \bar{t} \leqq t)$:

$$(5) \qquad \int_{-\infty}^{t} d\bar{t} \iiint_{(V)} d\bar{a}\, d\bar{b}\, d\bar{c}\; f(a, \ldots, t; x, \ldots, x_a; \ldots, x_t; \ldots; \bar{a}, \ldots, \bar{t}; \bar{x}, \ldots; \bar{x}_a; \ldots \bar{x}_t; \ldots).$$

Solche Ausdrücke für die Spannungskomponenten hat zuerst *L. Boltzmann*[79]) zur Formulierung der Erscheinung der elastischen Nachwirkung verwendet, bei der die in einem Moment stattfindenden Spannungen tatsächlich abhängen von allen Zuständen, die das Medium vorher durchlaufen hat. Neuerdings hat *V. Volterra*[80]) die Untersuchung der durch diese Integralansätze entstehenden Probleme aufgenommen, nachdem er in der Theorie der Integro-Differentialgleichungen ein neues Mittel zu ihrer analytischen Behandlung sich geschaffen hatte; er läßt übrigens in (5) auch mehrfache Integrationen nach der Zeit zu, wobei der Integrand von den Werten für mehr als zwei Zeitmomente abhängt. Für die sämtlichen hier umfaßten Probleme, bei denen die Wirkungen in einem Moment von der ganzen Vorgeschichte des Systems abhängen, nimmt er die von *E. Picard*[81]) eingeführte Bezeichnung „*hereditäre Mechanik*" auf.

---

[78] *P. Duhem*, J. de math. (4) 8 (1892), p. 311; Ann. de l'Éc. norm. (3) 10 (1893), p. 215, und 21 (1904), p. 117.

[79] Wien. Ber. 70 (1874), p. 275 = Pogg. Annalen, Ergänzungsbd. 7 (1876), p. 624 = Wissensch. Abh. I, p. 616.

[80] Die allgemeinen Ansätze sind in den Roma, Acc. Linc. Rend. (5) 18, 2 (1909), p. 295 und Acta math. 35 (1912), p. 295 enthalten.

[81] Riv. di Scienz. 1 (1907), p. 14.

whose integrands are given functions of the values of the deformation functions (1) and their derivatives for the particles a, b, c and $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$. Thereby long-range effects are included within the medium: an effect at the position x, y, z emerges in consequence of the states at all other positions of the continuum. However, besides *forces* represented by basic approaches known from classical mechanics acting from mass particles to mass particles according to the class of forces of attraction, here it appears anew the long-range effects ("influence") considered by *P. Duhem*[78]), due to which at every position of the continuum superposed forces or stresses are caused by *deformations* taking place at all other positions of the continuum.

In the [field] of *kinetics* one will augment this ansatz such, that one adds a time integral over the whole motion; or rather — corresponding with our general notion of action and reaction — over the time *before* the considered instant t; thereby the integrand contains the values of the functions (1) as well as their derivatives at the instants t and $\bar{t}$ $(-\infty < \bar{t} \leqq t)$:

$$(5) \qquad \int_{-\infty}^{t} d\bar{t} \iiint_{(V)} d\bar{a}\, d\bar{b}\, d\bar{c}\, f(a,\ldots,t;x,\ldots,x_a;\ldots,x_t;\ldots;\bar{a},\ldots,\bar{t};\bar{x},\ldots;\bar{x}_a;\ldots\bar{x}_t;\ldots).$$

Originally, *L. Boltzmann*[79]) has used such expressions for the stress components to formulate the phenomenon of elastic residual effects, for which the stresses occurring in one instant depend in fact on all states the medium has passed in advance. Recently, *V. Volterra*[80]) has taken up the studies of problems arising from these integral formulations, once he has created with the theory of integro-differential equations a new tool for the analytical treatment thereof; by the way, he also allows in (5) multiple integrations with respect to time, where the integrands depend on the values of more than two instants of time. For all herein contained problems, for which the effects at one instant depend on the whole previous history of the system, he takes up the name "hereditary mechanics" introduced by *E. Picard*[81]).

---

[78] *P. Duhem*, J. de math. (4) 8 (1892), p. 311; Ann. de l'Éc. norm. (3) 10 (1893), p. 215, and 21 (1904), p. 117.

[79] Wien. Ber. 70 (1874), p. 275 = Pogg. Annalen, Ergänzungsbd. 7 (1876), p. 624 = Wissensch. Abh. I, p. 616.

[80] The general fundamentals are included in Roma, Acc. Linc. Rend. (5) 18, 2 (1909), p. 295 and Acta math. 35 (1912), p. 295.

[81] Riv. di Scienz. 1 (1907), p. 14.

Beschränkt man sich auf analytische Funktionen, so kann man unter entsprechenden Konvergenzvoraussetzungen das Zeitintegral (5) durch eine Funktion aller (unendlich vielen) zeitlichen Ableitungen der Funktionen $x, \dots, x_a, \dots$ im Moment t ersetzen, wie dies *W. Voigt*[82]) bei der Anwendung auf elastische Nachwirkung tut.

Alle diese Formen der Stoffgleichungen sind vorzugsweise in dem speziellen Falle behandelt worden, dass die Deformationen des Kontinuums „*unendlichklein*" sind (vgl. IV 14, Nr. **16**, *Abraham*). Die Funktionen (1) umfassen diesen Fall, wenn man a, b, c als Raumkoordinaten des Teilchens in der Ausgangslage auffasst und (vgl. Nr. **2**a, p. 607) mit Hilfe eines auf beliebig kleine Werte beschränkten Parameters σ setzt:

$$x(a,b,c;t) = a + \sigma \cdot u(a,b,c;t) + \cdots \qquad \begin{pmatrix} x, y, z \\ u, v, w \end{pmatrix}, \tag{6}$$

wobei durchweg die höheren Potenzen von σ gegenüber den niederen zu vernachlässigen sind. Hängt nun eine Wirkungskomponente von diesen Bewegungsfunktionen durch ein Gesetz von der Form (3) ab, so hat man den Ausdruck F durch die ersten Glieder seiner Entwicklung nach Potenzen von σ vermöge (6) zu ersetzen; verschwinden die linearen Glieder in σ nicht identisch, so erhält man daher an Stelle von (3) ein Gesetz der Form:

$$F + \sigma\{F_x \cdot u + \cdots + F_{x_a} \cdot u_a + \cdots + F_{x_t} \cdot u_t + \cdots + F_{x_{aa}} \cdot u_{aa} + \cdots\}. \tag{3'}$$

$F, F_x, \dots$ sind die Werte der Funktion (3) und ihrer Ableitungen für $\sigma = 0$, also bekannte Funktionen von a, b, c, t; das Wirkungsgesetz ist nunmehr *linear* in den Lokalwerten der die unendlichkleine Deformation bestimmenden Funktionen $u(a,b,c;t), \dots$, und ihrer Ableitungen — entsprechend dem *Hookeschen Gesetz* der Elastizitätstheorie (vgl. IV 23, Nr. **4**). Das von σ freie Glied entspricht den Anfangskräften oder -spannungen, die in dem undeformierten Kontinuum möglicherweise herrschen können. Ebenso könnte man aber auch Spannungsgesetze betrachten, bei denen der Koeffizient von σ^1 verschwindet[83]); dann würden für unendlichkleine Deformationen die Spannungen mindestens *quadratisch* von den Deformationen abhängen — entgegen dem Hookeschen Gesetz, das sonach auch für unendlichkleine Deformationen nicht notwendig gelten muss.

---

[82] Kompendium I, p. 458; vgl. auch *Cl. Maxwell*, Scientif. Papers 2, p. 623.

[83] Hierauf hat bei der Diskussion über die Gültigkeit des *Hooke*schen Gesetzes besonders nachdrücklich *B. de Saint-Venant* hingewiesen; vgl. seine Bemerkungen in *Navier*, De la résistance des corps solides, 3$^{\text{e}}$ éd. (Paris 1864), p. 662 und *Clebsch*, Théorie de l'élasticité des corps solides (Paris 1883), p. 39.

By restricting oneself to analytic functions, then, under corresponding convergence requirements, one can replace the time integral (5) by a function of all (infinitely many) time derivatives of the functions $x, \ldots, x_a, \ldots$ at the instant of time t, as it is done by *W. Voigt*[82]) for the treatment of elastic residual effects.

All these forms of material laws have been treated mainly for the special case that the deformations of the continuum are "infinitesimally small" (cf. IV 14, No. **16**, *Abraham*). The functions (1) include this case, when one considers a, b, c as spatial coordinates of the particle in the initial position and (cf. No. **2**a, p. 607) by setting [these functions] with the help of a parameter σ, restricted to arbitrary small values, to:

$$x(a, b, c; t) = a + \sigma \cdot u(a, b, c; t) + \cdots \qquad \begin{pmatrix} x, y, z \\ u, v, w \end{pmatrix}, \tag{6}$$

where throughout the higher powers of σ are neglected with respect to the lower ones. If an effect depends now on these functions of motion by a law of the form (3), then one has to replace the expression F with the first terms of its expansion with respect to the powers of σ due to (6); If the linear terms in σ do not vanish identically, then one obtains as a result instead of (3) a law of the form:

$$F + \sigma\{F_x \cdot u + \cdots + F_{x_a} \cdot u_a + \cdots + F_{x_t} \cdot u_t + \cdots + F_{x_{aa}} \cdot u_{aa} + \cdots\}. \tag{3'}$$

$F, F_x, \ldots$ are the values of the function (3) and its derivatives for $\sigma = 0$, thus known functions of a, b, c, t; the material law is now *linear* in the local values of the functions $u(a, b, c; t), \ldots$ determining the infinitesimal deformations, and the derivatives [of these functions] — according to *Hooke's law* of the theory of elasticity (cf. IV 23, No. **4**). The term without σ corresponds to initial forces or stresses, which can possibly exist in the undeformed continuum. Similarly, one could even consider stress laws, for which the coefficient of σ^1 vanishes[83]); then for infinitesimally small deformations, the stresses would depend on the deformations at least *quadratic* — contrary to Hooke's law, which consequently does not have to be valid necessarily even for infinitesimally small deformations.

[82] Kompendium I, p. 458; cf. as well *Cl. Maxwell*, Scientif. Papers 2, p. 623.

[83] With particular emphasis, *B. de Saint-Venant* has pointed this out in the discussion on the validity of *Hooke*'s law; cf. his remarks in *Navier*, De la résistance des corps solides, 3^{e} éd. (Paris 1864), p. 662 and *Clebsch*, Théorie de l'élasticité des corps solides (Paris 1883), p. 39.

Haben die Stoffgleichungen die Integralform (4), (5), so ergiebt genau die gleiche Betrachtung Reduktion des Integranden auf eine lineare — möglicherweise freilich auch auf eine höhere — Funktion der Werte der Verschiebungen und ihrer Ableitungen an den Stellen a, b, c, t und $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{t}$; beispielsweise wird aus (4)

$$(4') \qquad \iiint\limits_{(V_0)} (f + \sigma\{f_x \cdot u + f_{\bar{x}} \cdot \bar{u} + \cdots + f_{x_a} \cdot u_a + f_{\bar{x}_a} \cdot \bar{u}_a + \cdots\}) d\bar{a}\, d\bar{b}\, d\bar{c},$$

und ähnlich vereinfacht sich im Falle zeitlicher Nachwirkung das Integral (5).

7. Medien mit einer charakteristischen Zustandsfunktion.

Besonders häufig werden in der Mechanik der Kontinua Medien mit solchen Wirkungen betrachtet, deren charakteristische Gleichungen sich auf *eine einzige* Funktion der Zustandsgrößen zurückführen lassen. Eine solche Reduktion entspringt, wenn wir zunächst von der Statik reden, vor allem aus der Annahme, *dass die in Betracht kommende virtuelle Arbeit für jede virtuelle Verschiebung bis aufs Vorzeichen gleich ist der Variation eines einzigen nur von dem jeweiligen Deformationszustande abhängigen skalaren Ausdruckes, des „Potentials“ oder der „potentiellen Energie“ der wirkenden Kräfte oder Spannungen*[84]); diese Annahme kann auf allgemeine thermodynamische Sätze zurückgeführt werden.

7a. Das gewöhnliche Potential und seine nächsten Verallgemeinerungen. Die einfachste Form dieses Potentials wird durch die Eigenschaft charakterisiert, *dass das Potential eines in Teile zerlegten Bereiches gleich der Summe der Potentiale* Φ^* *der Teilbereiche* V^* *ist*[85]). Unter den naheliegenden Voraussetzungen, *dass* Φ^* *sich stetig mit der Grenzfläche von* V^* *ändert, und dass der Quotient* $\Phi^* : V^*$ *gegen einen bestimmten Grenzwert* $\bar{\varphi}$ *konvergiert, wenn* V^* *sich unbegrenzt um eine bestimmte Stelle* x, y, z *zusammenzieht* — und dies gleichmässig im ganzen Bereich V —, folgt leicht[86]), dass das Potential

[84]) Für einfache Fälle hat schon *Lagrange* in der Méc. anal. eine solche Annahme aus der Mechanik diskreter Massen auf Kontinua übertragen (Prem. part., Sect. IV, Nr. 25) und sie speziell auf die Hydrostatik angewendet, indem er der virtuellen Arbeit einen der Variation der Volumdilatation proportionalen Term anfügt (1. part., sect VIII, Nr. 1); ihre weitere Ausbildung hat sie dann in der Elastizitätstheorie erfahren, und zwar hat *G. Green* (Cambr. Phil. Soc. Trans. 1838 = Math. Papers (London 1871), p. 245) zum erstenmal aus ihr die Grundgleichungen abgeleitet. Vgl. dazu IV 23, Nr. **5**b

[85]) Diese Annahme ist schon seit der ersten direkten Einführung des elastischen Potentiales als selbstverständlich mehr oder weniger ausdrücklich verwendet worden. Eine ausführliche Darlegung giebt *P. Duhem*, Le potential thermodynamique et la pression hydrostatique, Ann. Éc. Norm. (3) 10 (1893), p. 183.

[86]) Vgl. *P. Duhem*, l. c., p. 187 ff. Es liegt hier nur eine präzisere Formu-

If the material laws are of the integral form (4), (5), then the same considerations lead to a reduction of the integrand to a linear — certainly perhaps also to a higher [order] — function of the values of the displacements and their derivatives at the positions a, b, c, t and $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{t}$; for example, (4) becomes

$$(4') \qquad \iiint\limits_{(V_0)} (f + \sigma\{f_x \cdot u + f_{\bar{x}} \cdot \bar{u} + \cdots + f_{x_a} \cdot u_a + f_{\bar{x}_a} \cdot \bar{u}_a + \cdots\})d\bar{a}\, d\bar{b}\, d\bar{c},$$

and similarly the integral (5) simplifies for the case of temporal residual effects.

7. Media with one characteristic state function.

In the mechanics of continua particularly often media are considered whose characteristic equations can be reduced to *one single* function of the state variables. In case we talk at first about statics, such a reduction originates particularly from the assumption, *that the virtual work coming into question is, up to sign, for every virtual displacement equivalent to the variation of a single scalar expression depending only on the corresponding state of deformation, [which is] the "potential" or the "potential energy" of the acting forces and stresses*[84]); this assumption can be traced back to general theorems of thermodynamics.

7a. The common potential and its closest generalizations. The most simple form of this potential is characterized by the property *that the potential of a domain dissected into parts is equal to the sum of the potentials* Φ^* *of the [corresponding] subdomains* V^*[85]). Under the obvious assumptions *that* Φ^* *changes continuously with the boundary of* V^* *and that the quotient* $\Phi^* : V^*$ *converges to a certain limit value* $\bar{\varphi}$*, when* V^* *contracts around a certain point* x, y, z *indefinitely* — and this regularly in the whole domain V —, it follows easily[86]) that the potential

[84] For simple cases already *Lagrange* has interpreted in the Méc. anal. such an assumption from the mechanics of discrete masses for continua (Prem. part., Sect, IV, No. 25) and applied it particularly in hydrostatics, by adding to the virtual work a term being proportional to the variation of the volume dilatation (1. part., sect VIII, No. 1); [this assumption] has undergone a further development in the theory of elasticity, namely *G. Green* (Cambr. Phil. Soc. Trans. 1838 = Math. Papers (London 1871), p. 245) has derived from it the fundamental equations for the first time. Cf. thereto IV 23, No. **5**b

[85] Already since the first direct introduction of the elastic potential, this assumption, as [being] natural, has been used more or less explicitly. A detailed explanation is given by *P. Duhem*, Le potentiel thermodynamique et la pression hydrostatique, Ann. Éc. Norm. (3) 10 (1893), p. 183.

[86] Cf. *P. Duhem*, l. c., p. 187 ff. It is here merely a precise form-

des gesamten Kontinuums V (und ähnlich das eines jeden Teilbereiches) durch das über V erstreckte Raumintegral der Ortsfunktion $\overline{\varphi}$ dargestellt wird:

$$\Phi = \iiint\limits_{(V)} \overline{\varphi}\, dx\, dy\, dz = \iiint\limits_{(V_0)} \varphi\, da\, db\, dc, \text{ wo } \varphi = \overline{\varphi}\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(a, b, c)}. \tag{1}$$

$\overline{\varphi}$ ist die auf die Volumeinheit des deformierten Kontinuums, φ die auf die Volumeinheit des Ausgangszustandes bezogene *Energiedichte*; es sind *skalare Gössen*, die für jedes in einem bestimmten Deformationszustande betrachtete Kontinuum stetige oder doch abteilungsweise stetige Funktionen von x, y, z bzw. a, b, c sind. Die Beschaffenheit des Kontinuums unabhängig von der jeweils stattfindenden Deformation ist bestimmt, wenn φ als Funktion des Gesamtverlaufes der Deformationsfunktionen gegeben ist; soll das Zerlegungsaxiom für jede Deformation gelten, so kann φ nur die Werte der Funktionen und ihrer Ableitungen an der betrachteten Stelle explizit enthalten:

$$\varphi = \varphi(a, b, c; x(a, b, c), \dots; x_a(a, b, c), \dots; x_{aa}(a, b, c), \dots) \tag{2}$$

Handelt es sich um innere Kraftwirkungen, so muß diese Funktion gegenüber rechtwinkligen Koordinatentransformationen im x-y-z-Raume invariant sein.

Wir nehmen zunächst an, dass *nur die ersten Ableitungen auftreten*. Um den Zusammenhang mit den Wirkungskomponenten zu finden[87]), bilden wir das Potential für die variierte Deformation (Nr. **2**a, (3)); dann ergiebt sich als Variation von Φ

$$\delta\Phi = \iiint\limits_{(V_0)} \sum_{(x\,y\,z)} \Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\varphi}{\partial x_a}\delta x_a + \frac{\partial\varphi}{\partial x_b}\delta x_b + \frac{\partial\varphi}{\partial x_c}\delta x_c\Big) da\, db\, dc,$$

wobei in die Ableitungen von φ die unvariierten Werte von x, y, z und ihren Ableitungen einzusetzen sind. Aus der Identität

$$\delta A = -\delta\Phi \quad \text{für alle} \quad \delta x, \delta y, \delta z \tag{3}$$

folgen für ein Medium, das alle stetigen virtuellen Verrückungen gestattet, durch Gleichsetzung der Koeffizienten der $\delta x, \dots$ und ihrer Ab-

lierung des von altersher in der Mechanik üblichen Prozesses der Umwandlung von Funktionen eines Gebietes (wie Masse u. dgl.) in bestimmte Integrale vor. Übrigens braucht man die gleichmässige Konvergenz von $\Phi^* : V^*$ nur für eine bestimmte, V im Limes erschöpfende Einteilung vorauszusetzen und kann ausserdem natürlich Unterbrechungen der Stetigkeit und gleichmässigen Konvergenz an einzelnen Flächen zulassen.

[87] Es kommt hier lediglich das in der Variationsrechnung übliche Verfahren zur Bildung der ersten Variation mehrfacher Integrale in Betracht, wie es Lagrange (Misc. Taur. 2 (1760/61) = Oeuvres 1, p. 353) zuerst ausgebildet und in der Méc. anal. vielfach angewendet hat.

of the whole continuum V (and similarly that of any subdomain) is represented by the volume integral, ranging over V, of the spatial function $\bar{\varphi}$:

$$(1) \qquad \Phi = \iiint\limits_{(V)} \bar{\varphi}\, dx\, dy\, dz = \iiint\limits_{(V_0)} \varphi\, da\, db\, dc, \text{ where } \varphi = \bar{\varphi}\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(a, b, c)}.$$

$\bar{\varphi}$ is the *energy density* per unit of volume of the deformed continuum, φ is [the energy density] per unit of volume of the initial state; these are *scalar quantities*, which are for every continuum considered in a certain state of deformation continuous or yet piecewise continuous functions of x, y, z and a, b, c, respectively. The nature of the continuum, independent of each of the occurring deformation, is determined when φ is given as a function of the complete history of the deformation functions; if the dissection axiom shall hold for every deformation, then φ can explicitly contain only the values of the functions and their derivatives [evaluated] at the considered position:

$$(2) \qquad \varphi = \varphi(a, b, c; x(a, b, c), \ldots; x_a(a, b, c), \ldots; x_{aa}(a, b, c), \ldots)$$

If it is about internal force effects, this function must be invariant with respect to orthogonal coordinate transformations in the x-y-z-space.

At first we consider, that *only the first derivatives appear*. To find the connection with the effects[87]), we compute the potential of the varied deformation (No. **2**a, (3)); Then the variation of Φ is obtained as

$$\delta\Phi = \iiint\limits_{(V_0)} \sum_{(x\,y\,z)} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\varphi}{\partial x_a}\delta x_a + \frac{\partial\varphi}{\partial x_b}\delta x_b + \frac{\partial\varphi}{\partial x_c}\delta x_c\right) da\, db\, dc,$$

where in the derivatives of φ the unvaried values of x, y, z and the derivatives thereof have to be inserted. From the identity

$$(3) \qquad \delta A = -\delta\Phi \quad \text{for all} \quad \delta x, \delta y, \delta z$$

[and] by equating the coefficients of $\delta x, \ldots$ and the derivatives thereof, for a medium, which allows for all continuous virtual displacements,

---

ulation of the process, common of old in mechanics, of the transformation of functions of a domain (as e. g. mass) into certain integrals. By the way, one needs to assume the uniform convergence of $\Phi^* : V^*$ only for a certain partition [which] in the limit tends to V and can in addition certainly allow disconnections of the continuity and the uniform convergence at individual surfaces.

[87] Here, merely the approach common in the calculus of variations for the computation of the first variation for multiple integrals comes into consideration, as Lagrange (Misc. Taur. 2 (1760/61) = Oeuvres 1, p. 353) originally has formulated it and [as he has] applied it in the Méc. anal. in many cases.

leitungen unmittelbar die Stoffgleichungen. Verwendet man für δA etwa den Ansatz Nr. **3**c, (7), so wird[88])

$$\varrho_0 X = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad X_a = \frac{\partial \varphi}{\partial x_a} \qquad \begin{pmatrix} x, y, z \\ X, Y, Z \end{pmatrix}; a,\ b,\ c\Big); \tag{4}$$

geht man mittels (8) von Nr. **3**c und (1) zu den auf die deformierte Lage bezogenen Grössen über, so erhält man[89]):

$$\left\{\begin{aligned} \varrho X &= -\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x}, \\ X_x &= \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x_a} \cdot x_a + \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x_b} x_b + \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x_c} x_c + \overline{\varphi}, \\ X_y &= \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x_a} y_a + \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x_b} \cdot y_b + \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x_c} \cdot y_c, \\ X_z &= \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x_a} z_a + \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x_b} z_b + \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x_c} z_c. \end{aligned}\right. \qquad \begin{pmatrix} x & y & z \\ X & Y & Z \end{pmatrix} \tag{5}$$

Damit sind die sämtlichen in Nr. **5** betrachteten Stoffgleichungen auf die einzige Gleichung (2) zurückgeführt, die φ bzw. $\overline{\varphi}$ als skalare Funktion des lokalen Deformationszustandes giebt.

Hängt die Energiedichte (2) *auch von den zweiten Ableitungen* $x_{aa}, x_{ab}, \ldots$ der Deformationsfunktionen ab — was wiederum nur bei sehr rascher Änderung des Zustandes mit dem Orte in Betracht kommt —, so werden in $\delta\Phi$ neue Glieder mit den zweiten Ableitungen der virtuellen Verrückungen $\delta x_{aa} = \frac{\delta^2 \delta x}{\delta a^2}, \ldots$ auftreten, und das kommt gerade auf die in Nr. **4**a besprochenen Zusatzglieder zu dem ursprünglichen Ausdruck der virtuellen Arbeit hinaus; alsdann hängen sowohl die Komponenten dieser neuen Wirkung, deren Ausdrücke durch φ sich unmittelbar ergeben, wie die alten Spannungskomponenten, deren Ausdrücke leicht zu modifizieren sind, auch von den zweiten Ableitungen $x_{aa}, \ldots$ ab.

Ein spezieller Fall, der sich hier einordnet, sei besonders hervorgehoben: dass nämlich zu dem Potential (1) ein *Integral über die Oberfläche des Kontinuums* additiv hinzutritt:

$$\Phi_1 = \iint\limits_{(S)} \overline{\psi} dS = \iint\limits_{(S_0)} \psi dS_0, \tag{6}$$

wobei die „Flächendichte" $\overline{\psi}$ bzw. ψ das Potentials von den Werten der

---

[88] *G. Kirchhoff*, Sitzungsber. d. Akad. Wien, math.-nat., Kl. 9 (1852), p. 772.

[89] *J. Boussinesq*, Mém. prés. p. div. sav., Paris **20** (1872), note 3. p. 591. Hier ist nur φ statt $\overline{\varphi}$ verwendet, aber, was das Wesentliche ist, es werden zum erstenmal die Komponenten $X_x, \ldots$ statt $X_a, \ldots$ bestimmt. Diese Formeln sind übrigens in der Elastizitätstheorie endlicher Deformationen wiederholt neu hergeleitet und ausgebildet worden.

the material laws follow immediately. If one uses for δA for instance the Ansatz No. **3**c, (7), then[88])

$$\varrho_0 X = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad X_a = \frac{\partial\varphi}{\partial x_a} \qquad \begin{pmatrix} x, y, z \\ X, Y, Z \end{pmatrix}; a,\ b,\ c \Big); \tag{4}$$

changing over to the quantities related to the deformed position by use of (8) from No. **3**c and (1), then one obtains[89]):

$$\begin{cases} \varrho X = -\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial x}, \\ X_x = \frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial x_a}\cdot x_a + \frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial x_b}x_b + \frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial x_c}x_c + \overline{\varphi}, \\ X_y = \frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial x_a}y_a + \frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial x_b}\cdot y_b + \frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial x_c}\cdot y_c, \\ X_z = \frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial x_a}z_a + \frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial x_b}z_b + \frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial x_c}z_c. \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x & y & z \\ X & Y & Z \end{pmatrix} \tag{5}$$

Thereby, all of the considered material laws in No. **5** are reduced to the single equation (2), which gives φ or $\overline{\varphi}$ as scalar functions of the local state of deformation.

If the energy density (2) depends *also on the second derivatives* $x_{aa}, x_{ab}, \ldots$ of the deformation functions — which in turn only comes into consideration for very quick changes in space of the state —, then new terms with second derivatives in the virtual displacements $\delta x_{aa} = \frac{\delta^2 \delta x}{\delta a^2}, \ldots$ will appear in $\delta\Phi$, and this results precisely in the in No. **4**a discussed additional terms to the original expression of the virtual work; thereupon both the components of this new effect, whose expressions emerge immediately from φ, and the old stress components, whose expressions have to be modified slightly, depend also on the second derivatives $x_{aa}, \ldots$.

A special case, which can be classified here, shall be emphasized especially: namely, that to the potential (1) an *integral over the surface of the continuum* can be added:

$$\Phi_1 = \iint\limits_{(S)} \overline{\psi}\, dS = \iint\limits_{(S_0)} \psi\, dS_0, \tag{6}$$

where the "surface density" $\overline{\psi}$ or ψ of the potential depends on the values at the surface S of the

[88] *G. Kirchhoff*, Sitzungsber. d. Akad. Wien, math.-nat., Kl. 9 (1852), p. 772.

[89] *J. Boussinesq*, Mém. prés. p. div. sav., Paris **20** (1872), note 3. p. 591. Here only φ instead of $\overline{\varphi}$ is used, but, what is essential, for the first time the components $X_x, \ldots$ instead of $X_a, \ldots$ are determined. By the way, in the theory of elasticity of finite deformations these formulas have been repeatedly derived and formulated anew.

Deformationsfunktionen und ihrer *ersten* Ableitungen an der Oberfläche S abhängt; ein solches Potential kann analog dem obigen die Form (1) bestimmenden Axiom dadurch charakterisiert werden, dass sich $\Phi_1^* : S^*$ einem endlichen Werte $\overline{\psi}$ nähert, wenn sich das Oberflächenstück S^* um eine Stelle zusammenzieht. Man kann (6) tatsächlich in ein Raumintegral über V oder einen Teilraum umformen, wenn man zweite Ableitungen $x_{aa}, \ldots$ hinzunimmt. Übrigens kann man $\delta\Phi_1$ auch direkt bilden und bekommt dann für die virtuelle Arbeit unmittelbar ein Glied der in Nr. **4**a, (1) betrachteten Form.

Hängt ψ speziell nur von den Werten der Deformationsfunktionen x, y, z selbst, nicht von ihren Ableitungen ab, so hat $\delta\Phi_1$ gerade die Form der Arbeit δA_3 der an der Oberfläche des Kontinuums angreifenden Druckkräfte (Nr. **3**, (1)), und zwar werden deren Komponenten

$$\overline{X} = \frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x}, \quad \overline{Y} = \frac{\partial\overline{\psi}}{\partial y}, \quad \overline{Z} = \frac{\partial\overline{\psi}}{\partial z}. \tag{6a}$$

Man kann diese Potentialansätze leicht derart ausdehnen, dass sie Kraftwirkungen von der in Nr. **6** betrachteten allgemeineren Gestalt (4) liefern. Man braucht dazu nur, nach dem Vorgange von *P. Duhem*[90]), an die Stelle des Axioms von der additiven Zusammensetzung der Potentiale der Teilbereiche zum Gesamtpotential die Annahme zu setzen, *dass bei einer Zerlegung des Kontinuums in n Teilbereiche $V_1, \ldots, V_n$ das Potential Φ eine Doppelsumme*

$$\Phi = \sum_{i,k=1}^{n} \Phi_{ik}$$

von n^2 Summanden wird, deren jeder Φ_{ik} nur von dem Zustand zweier Teilbereiche V_i, V_k abhängt. Unter Hinzunahme ähnlicher Stetigkeitsannahmen, wie oben angedeutet, wird dann Φ gleich einem sechsfachen, zweimal über V bzw. V_0 ausgedehnten Integral, dessen Integrand von den Werten der Deformationsfunktionen und ihrer Ableitungen in zwei Argumentpunkten a, b, c und $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ abhängt[91]):

$$\Phi = \iiint\limits_{(V_0)}\iiint\limits_{(V_0)} \varphi(a, \ldots; x, \ldots; x_a, \ldots; \bar{a}, \ldots; \bar{x}, \ldots; \bar{x}_a, \ldots)\, da \ldots d\bar{c} \tag{7}$$

(Speziell kann hierin, wenn φ einen von der Stelle $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ unabhängigen Summanden aufweist, auch ein Summand der Form (1) inbegriffen sein.) Die Variation von Φ wird

$$\delta\Phi = \iiint\limits_{(V_0)}\iiint\limits_{(V_0)} \Big\{ \sum_{(x\,y\,z)} \Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}}\delta\bar{x} \Big) + \sum_{(x\,y\,z;a\,b\,c)} \Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x_a}\delta x_a + \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}_a}\delta\bar{x}_a \Big) \Big\} da \ldots d\bar{c},$$

---

[90] *P. Duhem*, l. c., p. 188.

[91] *P. Duhem*, l. c., p. 205.

deformation functions and the *first* derivatives thereof; such a potential can be characterized analogously to the foregoing axiom, [which] determines the form (1), that $\Phi_1^* : S^*$ approaches a finite value $\bar{\psi}$, when the surface element S^* contracts around a point. In fact, one can transform (6) into a volume integral over V, if one adds second derivatives $x_{aa}, \ldots$. By the way, one can also compute $\delta\Phi_1$ directly and obtains then for the virtual work immediately a term of the form considered in No. **4**a, (1).

If ψ depends in particular only on the values of the deformation functions x, y, z themselves, [and] not on the derivatives thereof, then $\delta\Phi_1$ has precisely the form of the work δA_3 of the compressive forces applied at the surface of the continuum (No. **3**, (1)), and indeed their components become

$$\bar{X} = \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x}, \quad \bar{Y} = \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial y}, \quad \bar{Z} = \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial z}. \tag{6a}$$

One can easily extend such potential-based approaches in such a way, that they yield force effects of the more general form (4) considered in No. **6**. Thereto one only needs, according to the procedure of *P. Duhem*[90]), to substitute the axiom of the additive composition of the potential of the subdomains to the total potential by the assumption, *that for a dissection of the continuum into n subdomains* $V_1, \ldots, V_n$, *the potential* Φ *becomes a double sum*

$$\Phi = \sum_{i,k=1}^{n} \Phi_{ik}$$

of n^2 *summands, each of which* Φ_{ik} *depend only on the state of two subdomains* V_i, V_k. By the application of similar continuity assumptions as mentioned above, Φ becomes equal to a sixfold integral, [which is] twice over V or V_0, whose integrand depends on the values of the deformation functions and the derivatives thereof in two points a, b, c and $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ [91]):

$$\Phi = \iiint\limits_{(V_0)}\iiint\limits_{(V_0)} \varphi(a, \ldots; x, \ldots; x_a, \ldots; \bar{a}, \ldots; \bar{x}, \ldots; \bar{x}_a, \ldots)\, da \ldots d\bar{c} \tag{7}$$

(In particular, when φ includes a summand independent of the point $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, a summand of the form (1) can be included herein.) The variation of Φ becomes

$$\delta\Phi = \iiint\limits_{(V_0)}\iiint\limits_{(V_0)} \Big\{ \sum_{(x\,y\,z)} \Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}}\delta\bar{x} \Big) + \sum_{(x\,y\,z;a\,b\,c)} \Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x_a}\delta x_a + \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}_a}\delta\bar{x}_a \Big) \Big\} da \ldots d\bar{c},$$

[90] *P. Duhem*, l. c., p. 188.

[91] *P. Duhem*, l. c., p. 205.

und aus der Identität (3) folgen daher für ein Medium, das alle stetigen virtuellen Verrückungen gestattet, als Kraft- und Spannungskomponenten an der Stelle a, b, c:

$$(8) \qquad \begin{cases} \varrho_0 X = -\iiint\limits_{(V_0)} \frac{\partial(\varphi+\varphi_1)}{\partial x} d\bar{a}\, d\bar{b}\, d\bar{c}, \\ X_a \;=\; \iiint\limits_{(V_0)} \frac{\partial(\varphi+\varphi_1)}{\partial x_a} d\bar{a}\, d\bar{b}\, d\bar{c}; \end{cases} \qquad \left(\begin{matrix} x, y, z \\ X, Y, Z \end{matrix}; a,\ b,\ c\right)$$

dabei bedeutet φ_1 die aus φ durch Vertauschung der überstrichenen und nicht überstrichenen Argumente entstehende Funktion. Wie oben ergeben sich hieraus sofort die Stoffgleichungen, die $X_x, \dots$ mit Hilfe der einen Funktion φ ausdrücken; *P. Duhem* hat dies unter speziellen, den Verhältnissen der reinen Elastizitätstheorie entsprechenden Annahmen ausführlich entwickelt.[92]) Ansätze von dieser Art sind es im Grunde, die bei dem Aufbau der Mechanik der Kontinua auf *Molekularvorstellungen* vielfach benutzt werden.[93]) Die Doppelsummen, die man da für die Potentiale von Molekülsystemen ansetzt, werden durch die Grenzübergänge gerade zu Integralen vom Typus (7), und die Aufgabe der Theorie ist es, solche Annahmen zu formulieren, daß sie sich bei richtiger Führung der Grenzübergänge in Potentiale der einfachen Formen (1) bzw. (6) transformieren; man vergleiche etwa die Darstellung von *H. Minkowski* in V 9, Nr. **14**.

Besonders hervorzuheben ist wieder die Gestaltung der Potentialansätze in dem Falle *„unendlichkleiner“ Deformation des Kontinuums* (Nr. **6**, (6)). Die Ausdrücke der Kraft- und Spannungskomponenten werden nach (4), bei Vernachlässigung quadratischer Glieder in σ[94]),

$$(9a) \qquad \varrho_0 X = -\frac{1}{\sigma}\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial u}, \quad X_a = -\frac{1}{\sigma}\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial u_a}, \qquad \left(\begin{matrix} u, v, w \\ X, Y, Z \end{matrix}; a,\ b,\ c\right)$$

dabei bedeutet $\tilde{\varphi}$ diejenigen in σ linearen und quadratischen Gliedern der Potenzentwicklung der Energiedichte φ, die von den in σ linearen Gliedern der Reihe (6) von Nr. **6** herrühren:

$$(9b) \quad \tilde{\varphi} = \varphi^0 + \sigma(\varphi^0_x u + \cdots + \varphi^0_{x_a} u_a + \cdots) \\ + \frac{\sigma^2}{2}\left(\varphi^0_{xx} u^2 + \varphi^0_{xy} uv + \cdots + \varphi^0_{xx_a} uu_a + \cdots + \varphi^0_{x_a x_a} u_a^2 + \varphi^0_{x_a x_b} u_a u_b + \cdots\right),$$

[92] *P. Duhem* Ann. Éc. Norm., (3) 21 (1904), p. 117 ff. Auch separat: Récherche sur l’élasticité, Paris 1906.

[93] Z. B. in der *Navier*schen Theorie des elastischen Potentials (vgl. IV 23, Nr. **5**a, *Müller-Timpe*) und in der Theorie der Kapillarität von *P. S. Laplace* und *C. Fr. Gauss* (vgl. V 9, Nr. **13**, *Minkowski*).

[94] *H. Poincaré*, Leçons sur la théorie de l’Élasticité, Paris 1892, p. 54 ff.; *E.* u. *F. Cosserat*, Ann. de la Fac. des Sciences de Toulouse 10 (l896), p. J. 70 ff.

and from the identity (3) [it] therefore follows for a medium, which allows for all continuous virtual displacements, the force and stress components at the point a, b, c:

$$(8)\qquad \begin{cases} \varrho_0 X = -\iiint\limits_{(V_0)} \frac{\partial(\varphi+\varphi_1)}{\partial x} d\bar{a}\, d\bar{b}\, d\bar{c}, \\ X_a \;=\; \iiint\limits_{(V_0)} \frac{\partial(\varphi+\varphi_1)}{\partial x_a} d\bar{a}\, d\bar{b}\, d\bar{c}; \end{cases} \qquad \left(\begin{matrix} x, y, z \\ X, Y, Z \end{matrix}; a,\ b,\ c\right)$$

thereby φ_1 corresponds to the function arising from φ by the permutation of the overlined and non-overlined arguments. As above the material laws, which express $X_x, \ldots$ by means of the one function φ, emerge directly out of this; *P. Duhem* has developed this [Ansatz] with respect to special assumptions corresponding with the circumstances of a pure theory of elasticity.[92]) Basically, there are approaches of this type, which are frequently used for the foundations of the mechanics of continua based on the *perception of molecules*.[93]) The double sums, which one formulates there for the potentials of the systems of molecules, become within the limit processes directly to integrals of type (7), and it is the question of the theory to formulate such assumptions, that for a correct guidance of the limit processes they transform into potentials of the simple forms (1) or (6); One confers for instance the presentation of *H. Minkowski* in V 9, No. **14**.

To be emphasized particularly is again the formulation of the potential-based approaches for the case of *"infinitesimal" deformation of the continuum* (No. **6**, (6)). By neglecting the quadratic terms in σ[94]), the expressions of force and stress components turn according to (4) into

$$(9a)\qquad \varrho_0 X = -\frac{1}{\sigma}\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial u}, \quad X_a = -\frac{1}{\sigma}\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial u_a}, \qquad \left(\begin{matrix} u, v, w \\ X, Y, Z \end{matrix}; a,\ b,\ c\right)$$

thereby $\tilde{\varphi}$ corresponds to those terms of the power series of the energy density φ being linear and quadratic in σ, which arise from the terms linear in σ of the series (6) of No. **6**:

$$(9b)\quad \tilde{\varphi} = \varphi^0 + \sigma(\varphi^0_x u + \cdots + \varphi^0_{x_a} u_a + \cdots) \\ + \frac{\sigma^2}{2}\left(\varphi^0_{xx}u^2 + \varphi^0_{xy}uv + \cdots + \varphi^0_{xx_a}uu_a + \cdots + \varphi^0_{x_a x_a}u_a^2 + \varphi^0_{x_a x_b}u_a u_b + \cdots\right),$$

[92] *P. Duhem* Ann. Éc. Norm., (3) 21 (1904), p. 117 ff. Also separately: Récherche sur l'élasticité, Paris 1906.

[93] E. g. in *Navier*'s theory of the elastic potential (cf. IV 23, No. **5**a, *Müller-Timpe*) and in the theory of capillarity of *P. S. Laplace* and *C. Fr. Gauss* (cf. V 9, No. **13**, *Minkowski*).

[94] *H. Poincaré*, Leç ons sur la théorie de l'Élasticité, Paris 1892, p. 54 ff.; *E.* and *F. Cosserat*, Ann. de la Fac. des Sciences de Toulouse 10 (l896), p. J. 70 ff.

worin die mit der Marke 0 versehenen Ableitungen von φ für $\sigma = 0$, d. h. für die Argumente $x = a, \dots, x_a = 1, x_b = 0, \dots$ zu nehmen sind. Die Ausdrücke (9a) haben in der Tat den in Nr. **6**, (3′) betrachteten Typus des *Hooke*schen Gesetzes; vorausgesetzt ist dabei natürlich, dass die $\tilde{\varphi}$ zusammensetzenden Glieder der Entwicklung von φ nicht identisch verschwinden. Die auf die deformierte Lage des Kontinuums bezogenen Spannungskomponenten $X_x, \dots$ unterscheiden sich gemäß Nr. **3**c, (8) von den $X_a, \dots$ um folgende in σ lineare Ausdrücke:

$$X_x - X_a = \sigma(-\varphi^0_{x_a}(v_b + w_c) + \varphi^0_{x_b} u_b + \varphi^0_{x_c} u_c), \dots, \tag{10}$$

und diese werden nur dann Null bzw. von der Grössenordnung σ^2 der sonst vernachlässigten Grössen, wenn die durch $\varphi^0_{x_a}$ gegebenen „Anfangsspannungen" vor der unendlichkleinen Deformation verschwinden.[95]) — Es bedarf danach keiner genaueren Ausführungen, wie man in ähnlicher Weise den allgemeineren *Duhem*schen Potentialansatz (7), für unendlichkleine Deformationen umzubilden hat.

7b. Der Potentialansatz für Medien mit orientierten Teilchen. Nach dem Vorgange von *E.* und *F. Cosserat*[96]) kann man diesen Potentialansatz auch auf die Kontinua ausdehnen, deren Teilchen mit einer bestimmten Orientierung behaftet sind; man braucht nur anzunehmen, dass die sonst wie in Nr. **7**a definierte Energiedichte φ ausser von den bisher betrachteten Grössen auch von den die momentane Orientierung des Teilchens a, b, c bestimmenden Parametern λ, μ, ν (Nr **2**b, (9)) und deren (ersten) Ableitungen nach a, b, c abhängt:

$$\varphi = \varphi(\lambda(a, b, c), \dots; \lambda_a(a, b, c), \dots, \nu_c(a, b, c)). \tag{11}$$

Eine virtuelle Drehung der einzelnen Teilchen Nr. **2** (10) liefert zur Variation des Potentials dann den folgenden Beitrag:

$$\delta\Phi = \iiint\limits_{(V_0)} \sum_{(\lambda\,\mu\,\nu)} \Big(\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\delta\lambda + \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_a}\delta\lambda_a + \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_b}\delta\lambda_b + \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_c}\delta\lambda_c\Big) da\, db\, dc.$$

Führt man nun vermöge Nr. **2**, (11), (12) die Winkelgeschwindigkeiten $\delta\pi, \delta\kappa, \delta\varrho$ der virtuellen Verdrehung ein und beachtet, dass

$$\delta\lambda_a = \frac{\partial\delta\lambda}{\partial a} = \sum_{\binom{lmn}{\pi\kappa\varrho}} \Big(\frac{\partial l_1}{\partial a}\delta\pi + l_1\frac{\partial\delta\pi}{\partial a}\Big) \qquad \Big(\begin{matrix}\lambda, \mu, \nu\\ 1, 2, 3\end{matrix}; a,\ b,\ c\Big),$$

so ergeben sich durch Identifikation von $-\delta\Phi$ mit dem Arbeitsausdruck Nr. **4**, (2) bzw. (2′) die folgenden Formeln für die auf die

[95] *J. Boussinesq*, a. a. O.[89]), p. 598, *E. u. F. Cosserat*, l. c., p. J. 74 f.

[96] *E.* und *F. Cosserat*, „Corps déformables" [5]), chap. IV, p. 122 ff.

wherein the derivatives of φ signed with the label 0 have to be evaluated for $\sigma = 0$, i. e. for the arguments $x = a, \dots, x_a = 1, x_b = 0, \dots$. The expressions (9a) are in fact of the class of *Hooke*'s law considered in No. **6**, (3′); thereby [it] is naturally required, that the terms of the expansion of φ constituting $\tilde{\varphi}$ do not vanish identically. The stress components with respect to the deformed position of the continuum $X_x, \dots$ differ according to No. **3**c, (8) from $X_a, \dots$ by the following expressions linear in σ:

$$X_x - X_a = \sigma(-\varphi^0_{x_a}(v_b + w_c) + \varphi^0_{x_b} u_b + \varphi^0_{x_c} u_c), \dots, \tag{10}$$

and these become only zero or of the order of magnitude σ^2 of the otherwise neglected quantities, when the "initial stresses" given by $\varphi^0_{x_a}$ vanish before the infinitesimal deformation.[95]) — Thereafter no more detailed presentation is required, how one reformulates in a similar way the more general potential-based approach of *Duhem* (7) for infinitesimal deformations.

7b. The potential-based approach for media with oriented particles.

According to the procedure of *E.* and *F. Cosserat*[96]) one can extend this potential-based approach also to continua, whose particles are endowed with a certain orientation; one only has to assume, that the energy density φ, usually defined as in No. **7**a, depends besides the so far considered quantities also on the parameters λ, μ, ν, [which] determine the actual orientation of the particle a, b, c (No. **2**b, (9)), and the (first) derivatives with respect to a, b, c of these [parameters]:

$$\varphi = \varphi(\lambda(a,b,c), \dots; \lambda_a(a,b,c), \dots, \nu_c(a,b,c)). \tag{11}$$

A virtual rotation of the individual particles No. **2** (10) then yields the following contribution to the variation of the potential:

$$\delta\Phi = \iiint\limits_{(V_0)} \sum_{(\lambda\,\mu\,\nu)} \Big(\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\delta\lambda + \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_a}\delta\lambda_a + \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_b}\delta\lambda_b + \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_c}\delta\lambda_c\Big) da\, db\, dc.$$

If one introduces now due to No. **2**, (11), (12) the angular velocities $\delta\pi, \delta\kappa, \delta\varrho$ of the virtual rotation and by considering that

$$\delta\lambda_a = \frac{\partial\delta\lambda}{\partial a} = \sum_{\binom{lmn}{\pi\kappa\varrho}} \Big(\frac{\partial l_1}{\partial a}\delta\pi + l_1\frac{\partial\delta\pi}{\partial a}\Big) \qquad \Big(\begin{matrix}\lambda, \mu, \nu \\ 1, 2, 3\end{matrix}\,;\ a,\ b,\ c\Big),$$

then, by identification of $-\delta\Phi$ with No. **4**, (2) and (2′), respectively, the following formulas for the

[95] *J. Boussinesq*, op. cit.[89]), p. 598, *E. and F. Cosserat*, l. c., p. J. 74 f.

[96] *E.* and *F. Cosserat*, "Corps déformables" [5]), chap. IV, p. 122 ff.

Massen- und Flächenelemente wirkenden Drehmomente[97]):

$$(12)\qquad \begin{cases} \varrho_0 L = -\sum\limits_{\binom{\lambda\mu\nu}{123}} \left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\cdot l_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_a}\frac{\partial l_1}{\partial a} + \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_b}\frac{\partial l_1}{\partial b} + \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_c}\frac{\partial l_1}{\partial c} \right\}, \\ L_a \;= \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_a} l_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial\mu_a} l_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial\nu_a} l_3. \end{cases} \begin{pmatrix} L, M, N \\ l, m, n \end{pmatrix}; a, b, c \Big)$$

Es ist vielfach zweckmäßig, in diese Formeln die den $\delta\pi, \delta\kappa, \delta\varrho$ analogen Winkelgeschwindigkeiten einzuführen, die bei der Überführung des zu einem Teilchen gehörigen Dreikantes in das eines Nachbarteilchens auftreten; wir betrachten speziell die in der Richtung der Parameterlinien a, b, c benachbarten Teilchen, also die Winkelgeschwindigkeitskomponenten

$$(13)\qquad p_a = \sum_{(123)} \beta_1 \frac{\partial\gamma_1}{\partial a},\ q_a = \sum_{(123)} \gamma_1 \frac{\partial\alpha_1}{\partial a},\ r_a = \sum_{(123)} \alpha_1 \frac{\partial\beta_1}{\partial a} \quad (a, b, c).$$

Dann hat man analog den Relationen (12) von Nr. **2**

$$\frac{\partial\lambda}{\partial a} = l_1 p_a + m_1 q_a + n_1 r_a \qquad \left(\begin{matrix}\lambda, \mu, \nu \\ 1, 2, 3\end{matrix};\ a,\ b,\ c\right),$$

und kann in dem Ausdruck (11) der Energiedichte die $\lambda_a, \ldots, \nu_c$ durch die Winkelgeschwindigkeiten $p_a, \ldots, r_c$ ersetzen:

$$(14)\qquad \varphi = \varphi(\lambda, \mu, \nu; p_a, p_b, \ldots, r_c).$$

Bildet man aus diesem Ausdruck $\delta\Phi$ und berücksichtigt die aus (13) folgenden Relationen (das Analogon der sog. „Übergangsgleichungen“[98]) der Kinetik)

$$\delta p_a = \frac{\partial\delta\pi}{\partial a} + r_a\delta\kappa - q_a\delta\varrho \qquad \left(\begin{matrix}p, q, r \\ \pi, \kappa, \varrho\end{matrix};\ a,\ b,\ c\right),$$

so ergiebt sich durch analoge Betrachtungen, wie sie zu (12) führten[97]):

$$(15)\qquad \begin{cases} \varrho_0 L = -\left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} l_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial\mu} l_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} l_3 + \sum\limits_{(abc)} \left(q_a \frac{\partial\varphi}{\partial r_a} - r_a \frac{\partial\varphi}{\partial q_a} \right) \right\} & \begin{pmatrix} L, M, N \\ l, m, n \end{pmatrix} \\ L_a \;= \frac{\partial\varphi}{\partial p_a}. & \left(\begin{matrix} L, M, N \\ p, q, r \end{matrix};\ a,\ b,\ c\right) \end{cases}$$

Der Übergang zu den auf das deformierte Kontinuum bezogenen Drehmomentkomponenten $L_x, \ldots, N_z$ ist mit Hilfe von Nr. **4**b, (5) leicht zu vollziehen.

---

[97] Diese Formeln finden sich in dem *Cosserat*schen Buche nicht explizit angegeben, da dort die unten ausgeführte Annahme eines „Euklidischen“ Potentiales an der Spitze steht; sie sind indessen in den Gleichungen von p. 132 ff. und 141 bzw. p. 130 ff. und 134 ff. enthalten; die Identifizierung geschieht am leichtesten von den p. 138 ff. angegebenen Formeln für die Arbeit aus.

[98] Sie gehen in diese über, wenn a durch den Zeitparameter ersetzt wird; vgl. IV **6** (*P. Stäckel*), No. **30**, p. 584 f. und Anm.[417]) sowie IV 11 (*K. Heun*), No. **14**c.

torques acting at the mass and surface elements emerge[97]):

$$(12)\qquad \begin{cases} \varrho_0 L = -\sum\limits_{\binom{\lambda\mu\nu}{123}} \left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\cdot l_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_a}\frac{\partial l_1}{\partial a} + \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_b}\frac{\partial l_1}{\partial b} + \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_c}\frac{\partial l_1}{\partial c} \right\}, \\ L_a \;=\; \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_a} l_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial\mu_a} l_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial\nu_a} l_3. \end{cases} \begin{pmatrix} L, M, N \\ l, m, n \end{pmatrix}; a, b, c \Big)$$

Often it is useful to introduce in these formulas the angular velocities analogously to the $\delta\pi, \delta\kappa, \delta\varrho$, which appear in the transition from one triad of a particle to the one of the neighboring particle; we consider especially the neighboring particles in direction of the parameter lines a, b, c, i. e. the components of the angular velocities

$$(13)\qquad p_a = \sum_{(123)} \beta_1 \frac{\partial\gamma_1}{\partial a},\; q_a = \sum_{(123)} \gamma_1 \frac{\partial\alpha_1}{\partial a},\; r_a = \sum_{(123)} \alpha_1 \frac{\partial\beta_1}{\partial a} \quad (a, b, c).$$

Then one has analogously to the relation (12) of No. **2**

$$\frac{\partial\lambda}{\partial a} = l_1 p_a + m_1 q_a + n_1 r_a \qquad \Big(\begin{matrix}\lambda, \mu, \nu \\ 1, 2, 3\end{matrix}\,;\ a,\ b,\ c\Big),$$

and [one] can substitute the $\lambda_a, \ldots, \nu_c$ with the angular velocities $p_a, \ldots, r_c$ in the expression (11) of the energy density:

$$(14)\qquad \varphi = \varphi(\lambda, \mu, \nu; p_a, p_b, \ldots, r_c).$$

If one computes $\delta\Phi$ with this expression and by considering the relation following from (13) (the analogue to the so called "transition equations"[98]) of kinetics)

$$\delta p_a = \frac{\partial\delta\pi}{\partial a} + r_a\delta\kappa - q_a\delta\varrho \qquad \Big(\begin{matrix}p, q, r \\ \pi, \kappa, \varrho\end{matrix}\,;\ a,\ b,\ c\Big),$$

then similar considerations which lead to (12)[97]) result in:

$$(15)\qquad \begin{cases} \varrho_0 L = -\left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} l_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial\mu} l_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} l_3 + \sum\limits_{(abc)} \left(q_a \frac{\partial\varphi}{\partial r_a} - r_a \frac{\partial\varphi}{\partial q_a} \right) \right\} \begin{pmatrix} L, M, N \\ l, m, n \end{pmatrix} \\ L_a \;=\; \frac{\partial\varphi}{\partial p_a}. \qquad\qquad \Big(\begin{matrix} L, M, N \\ p, q, r \end{matrix}\,;\ a,\ b,\ c\Big) \end{cases}$$

Using No. **4**b, (5), the transformation to the components of the torques with respect to the deformed continuum $L_x, \ldots, N_z$ can be carried out easily.

---

[97] These formulas cannot be found explicitly in the book of the *Cosserat*s, since therein the assumption of a "Euclidean" potential, which is achieved below, forms the basis; however, they are contained in the equations of p. 132 ff. and 141 or p. 130 ff. and 134 ff.; The identification occurs easiest starting from the formulas for the work given on p. 138 ff.

[98] They change into these [equations], when a is replaced by a time parameter; cf. IV **6** (*P. Stäckel*), No. **30**, p. 584 f. and remark[417]) as well as IV 11 (*K. Heun*), No. **14**c.

E. und *F. Cosserat* betrachten insbesondere die durch diesen Ansatz dargestellten *inneren Wirkungen* in einem Medium, bei denen φ als Funktion der $x, \dots$ und $\lambda, \dots$ invariant gegen rechtwinklige Koordinatentransformationen im x-y-z-Raume ist, oder — was dasselbe bedeutet — bei denen jede Bewegung des mitsamt den adjungierten Dreikanten erstarrt gedachten Kontinuums das Potential ungeändert lässt; ein solches Potential nennen sie ein *euklidisches* (*action Euclidienne*). Um diese Klasse von Potentialen zu umschreiben, verwenden sie in jedem Punkte x, y, z als (bewegliches) Bezugssystem die momentane Lage des dem gerade dort befindlichen Teilchen angehefteten Dreikantes; an Stelle der Komponenten $p_a, \dots, r_c$ treten die Komponenten der gleichen Winkelgeschwindigkeiten in Bezug auf diese neuen Axen:

$$\text{(16a)} \qquad \mathfrak{p}_a = \alpha_1 p_a + \beta_1 q_a + \gamma_1 r_a = \alpha_3 \frac{\partial \alpha_2}{\partial \alpha} + \beta_3 \frac{\partial \beta_2}{\partial \alpha} + \gamma_3 \frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha} \begin{pmatrix} \mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r} \\ 1, 2, 3 \end{pmatrix} ; a,\ b,\ c \Big),$$

und in gleicher Weise mögen die 9 Deformationsgrössen $x_a, \dots, z_c$ transformiert werden in:

$$\text{(16b)} \qquad \mathfrak{x}_a = \alpha_1 x_a + \beta_1 y_a + \gamma_1 z_a \qquad \Big(\begin{matrix} \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z} \\ 1, 2, 3 \end{matrix} ; a,\ b,\ c \Big).$$

Dann ist das allgemeinste euklidische Potential, das höchstens von den ersten Ableitungen der Deformationsfunktionen abhängt, eine willkürliche Funktion dieser 18 Grössen $\mathfrak{p}_a, \dots \mathfrak{z}_c$, die ausserdem noch explizit a, b, c enthalten kann[99]):

$$\text{(17)} \qquad \varphi = \varphi(a, \dots; \mathfrak{x}_a, \dots, \mathfrak{z}_c; \mathfrak{p}_a, \dots, \mathfrak{r}_c).$$

Zur Herleitung der Gleichgewichtsbedingungen für diesen Ansatz führt man auch die Komponenten der virtuellen Verrückung und Verdrehung nach den neuen beweglichen Axen ein:

$$\begin{aligned} \delta \mathfrak{x} &= \alpha_1 \delta x + \beta_1 \delta y + \gamma_1 \delta z, \\ \delta \mathfrak{i} &= \alpha_1 \delta \pi + \beta_1 \delta \kappa + \gamma_1 \delta \varrho; \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z} \\ \mathfrak{i},\ \mathfrak{j},\ \mathfrak{k} \\ 1, 2, 3 \end{pmatrix}$$

dann hat man die „Übergangsgleichungen“

$$\begin{aligned} \delta \mathfrak{x}_a &= \tfrac{\partial \delta \mathfrak{x}}{\partial a} + \mathfrak{q}_a \delta \mathfrak{z} - \mathfrak{r}_a \delta \mathfrak{y}_a \delta \mathfrak{k} - \mathfrak{z}_a \delta \mathfrak{j}, \\ \delta \mathfrak{p}_a &= \tfrac{\partial \delta \mathfrak{i}}{\partial a} + \mathfrak{q}_a \delta \mathfrak{k} - \mathfrak{r}_a \delta \mathfrak{j} \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z} & \\ \mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}; & a, b, c \\ \mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k} & \end{pmatrix}$$

und kann daher die Variation des mit (17) gebildeten Potentiales

$$\delta \Phi = \iiint\limits_{(V_0)} \sum_{\left(\substack{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z} \\ \mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}} ; a, b, c \right)} \Big(\frac{\partial \varphi}{\partial \mathfrak{x}_a} \delta \mathfrak{x}_a + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathfrak{p}_a} \delta \mathfrak{p}_a \Big) da\, db\, dc$$

[99] *E.* u. *F. Cosserat*, „Corps déformables“ , p. 127.

E. and *F. Cosserat* considered in particular the *internal actions* in a medium represented by this ansatz[.] For these [actions] φ is, as a function of $x, \ldots$ and $\lambda, \ldots,$ invariant with respect to orthogonal coordinate transformations in the x-y-z-space, or — what implies the same — these [actions for which] every motion of the continuum together with the adjoint triads being regarded as rigid leaves the potential unchanged; they call such a potential a *euclidean* one (*action Euclidienne*). To describe this class of potentials, they use in every point x, y, z as (moving) frame of reference the actual position of the triad attached to the particle just located there; The components $p_a, \ldots, r_c$ are substituted by the components of the same angular velocities formulated with respect to these new axes:

$$\text{(16a)} \qquad \mathfrak{p}_a = \alpha_1 p_a + \beta_1 q_a + \gamma_1 r_a = \alpha_3 \frac{\partial \alpha_2}{\partial \alpha} + \beta_3 \frac{\partial \beta_2}{\partial \alpha} + \gamma_3 \frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha} \begin{pmatrix} \mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r} \\ 1, 2, 3 \end{pmatrix}; a,\ b,\ c\Big),$$

and in a similar way the 9 deformation quantities $x_a, \ldots, z_c$ shall be transformed to:

$$\text{(16b)} \qquad \mathfrak{x}_a = \alpha_1 x_a + \beta_1 y_a + \gamma_1 z_a \qquad \left(\begin{matrix} \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z} \\ 1, 2, 3 \end{matrix}; a,\ b,\ c\right).$$

Then the most general euclidean potential, which depends at most on the first derivatives of the deformation functions, is an arbitrary function of these 18 quantities $\mathfrak{p}_a, \ldots \mathfrak{z}_c$, [functions] which moreover can explicitly contain a, b, c[99]):

$$\text{(17)} \qquad \varphi = \varphi(a, \ldots; \mathfrak{x}_a, \ldots, \mathfrak{z}_c; \mathfrak{p}_a, \ldots, \mathfrak{r}_c).$$

For the derivation of the equilibrium conditions for this ansatz one also introduces the components of the virtual displacement and rotation with respect to the new moving axes:

$$\begin{aligned} \delta\mathfrak{x} &= \alpha_1 \delta x + \beta_1 \delta y + \gamma_1 \delta z, \\ \delta\mathfrak{i} &= \alpha_1 \delta \pi + \beta_1 \delta \kappa + \gamma_1 \delta \varrho; \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z} \\ \mathfrak{i},\ \mathfrak{j},\ \mathfrak{k} \\ 1, 2, 3 \end{pmatrix}$$

then one has the "transition equations"

$$\begin{aligned} \delta\mathfrak{x}_a &= \tfrac{\partial \delta \mathfrak{x}}{\partial a} + \mathfrak{q}_a \delta\mathfrak{z} - \mathfrak{r}_a \delta\mathfrak{y}_a \delta\mathfrak{k} - \mathfrak{z}_a \delta\mathfrak{j}, \\ \delta\mathfrak{p}_a &= \tfrac{\partial \delta \mathfrak{i}}{\partial a} + \mathfrak{q}_a \delta\mathfrak{k} - \mathfrak{r}_a \delta\mathfrak{j} \end{aligned} \qquad \left(\begin{matrix} \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z} \\ \mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}; \\ \mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k} \end{matrix}\ a, b, c\right)$$

and is therefore immediately able to compare the variation of the potential formulated with (17)

$$\delta\Phi = \iiint\limits_{(V_0)} \sum_{\left(\begin{smallmatrix} \mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z} \\ \mathfrak{p},\mathfrak{q},\mathfrak{r} \end{smallmatrix}; a, b, c\right)} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mathfrak{x}_a} \delta\mathfrak{x}_a + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathfrak{p}_a} \delta\mathfrak{p}_a\right) da\, db\, dc$$

---

[99] *E.* and *F. Cosserat*, "Corps déformables", p. 127.

unmittelbar mit der folgenden Form der virtuellen Arbeit vergleichen:

$$\delta A = \iiint\limits_{(V_0)} \sum_{\binom{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}}{\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}};\binom{\mathfrak{L}\mathfrak{M}\mathfrak{N}}{\mathfrak{i}\mathfrak{j}\mathfrak{k}}} \left\{\varrho_0 \mathfrak{X} \delta\mathfrak{x} + \varrho_0 \mathfrak{L}\delta\mathfrak{i} - \sum_{(abc)} \left(\mathfrak{X}_a \frac{\partial \delta\mathfrak{x}}{\partial a} + \mathfrak{L}_a \frac{\partial \delta\mathfrak{i}}{\partial a}\right)\right\} da\, db\, dc,$$

in der die Komponenten der früher betrachteten Kräfte, Spannungen und Momente in bezug auf das bewegliche Koordinatenkreuz auftreten. Es ergeben sich danach Formeln[100].) vom Typus

$$\text{(18)} \quad \begin{cases} \varrho_0 \mathfrak{X} = \sum\limits_{(abc)} \left(\mathfrak{r}_a \dfrac{\partial\varphi}{\partial\mathfrak{y}_a} - \mathfrak{q}_a \dfrac{\partial\varphi}{\partial\mathfrak{y}_a}\right), \quad \mathfrak{X}_a = \dfrac{\partial\varphi}{\partial\mathfrak{x}_a} \\ \varrho_0 \mathfrak{L} = \sum\limits_{(abc)} \left(\mathfrak{r}_a \dfrac{\partial\varphi}{\partial\mathfrak{q}_a} - \mathfrak{q}_a \dfrac{\partial\varphi}{\partial\mathfrak{r}_a} + \mathfrak{z}_a \dfrac{\partial\varphi}{\partial\mathfrak{y}_a} - \mathfrak{y}_a \dfrac{\partial\varphi}{\partial\mathfrak{z}_a}\right), \quad \mathfrak{L}_a = \dfrac{\partial\varphi}{\partial\mathfrak{p}_a}. \end{cases}$$

7c. Der Potentialansatz für zwei- und eindimensionale Kontinua. Für die zwei- und eindimensional ausgedehnten Kontinua im dreidimensionalen Raume kann man den Potentialansatz ohne Schwierigkeit durch ganz analoge Betrachtungen gewinnen.[101]) Die Energiedichte φ — der als existierend vorausgesetzte Grenzwert des Quotienten aus dem Potential eines immer kleiner werdenden Teiles des Kontinuums und dessen Flächeninhalt bzw. Länge — wird eine gegebene Funktion der 6 Funktionen $x, y, z, \lambda, \mu, \nu$ von a, b (bzw. von a) und ihrer Ableitungen, das Potential selbst also ein zwei- bzw. eindimensionales Integral:

$$\Phi = \iint\limits_{(S_0)} \varphi\, da\, db \quad \text{bzw.} \quad \Phi = \int_0^l \varphi\, da.$$

Die Variation dieser Potentiale und daher die die auf die Anfangsparameter bezogenen Kraft-, Spannungs-, und Momentkomponenten ergeben sich unmittelbar aus den entsprechenden Formeln des dreidimensionalen Falles durch Fortlassen der auf c bzw. b und c bezüglichen Glieder; der Übergang zu den auf den deformierten Zustand bezüglichen Grössen erfolgt dann nach Nr. **3**e, (16) und Nr. **4**b, (12).

Richtet man sein Augenmerk besonders auf orientierte Teilchen, so spielen die wie in Nr. **7**b definierten Winkelgeschwindigkeitskomponenten $p_a, \ldots$ wieder eine wichtige Rolle, und zwar hat man jetzt natürlich nur 2 bzw. 1 Tripel dieser Grössen. *E.* und *F. Cosserat* haben die Theorie solcher Medien unter Verwendung des jedem Teilchen

---

[100] *E.* u. *F. Cosserat*, l. c., p. 130 f.; vgl. auch IV **11** *K. Heun* Nr. **21**.

[101] Bereits *Lagrange* wendet ihn bei den von ihm behandelten Problemen aus diesem Gebiet[23]) an; er wurde dann in der Theorie der elastischen Fäden und Platten (vgl. IV 6 (*P. Stäckel*), Nr. **23**, **24** und IV 25, Kap. III, *Tedone-Timpe*), besonders aber auch in der Theorie der Kapillarität (vgl. V 9 (*Minkowski*), Nr. **2**) weiterentwickelt.

with the following form of the virtual work:

$$\delta A = \iiint\limits_{(V_0)} \sum_{\binom{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}}{\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}};\binom{\mathfrak{L}\mathfrak{M}\mathfrak{N}}{\mathfrak{i}\mathfrak{j}\mathfrak{k}}} \left\{ \varrho_0 \mathfrak{X}\delta\mathfrak{x} + \varrho_0 \mathfrak{L}\delta\mathfrak{i} - \sum_{(abc)} \left(\mathfrak{X}_a \frac{\partial \delta\mathfrak{x}}{\partial a} + \mathfrak{L}_a \frac{\partial \delta\mathfrak{i}}{\partial a} \right) \right\} da\, db\, dc,$$

in which the components of the earlier considered forces, stresses and torques appear with resepct to the moving coordinate triad. Accordingly, this results in formulas[100]) of the type

$$(18) \qquad \begin{cases} \varrho_0 \mathfrak{X} = \sum\limits_{(abc)} \left(\mathfrak{r}_a \frac{\partial\varphi}{\partial\mathfrak{y}_a} - \mathfrak{q}_a \frac{\partial\varphi}{\partial\mathfrak{y}_a} \right), \quad \mathfrak{X}_a = \frac{\partial\varphi}{\partial\mathfrak{x}_a} \\ \varrho_0 \mathfrak{L} = \sum\limits_{(abc)} \left(\mathfrak{r}_a \frac{\partial\varphi}{\partial\mathfrak{q}_a} - \mathfrak{q}_a \frac{\partial\varphi}{\partial\mathfrak{r}_a} + \mathfrak{z}_a \frac{\partial\varphi}{\partial\mathfrak{y}_a} - \mathfrak{y}_a \frac{\partial\varphi}{\partial\mathfrak{z}_a} \right), \quad \mathfrak{L}_a = \frac{\partial\varphi}{\partial\mathfrak{p}_a}. \end{cases}$$

7c. The potential-based approach for two- and one-dimensional continua. For the two- and one-dimensional extended continua in the tree-dimensional space, one can gain the potential-based approach without any difficulties using rather similar considerations.[101]) The energy density φ — as the assumed existing limit of the quotient between the potential of a part of the continuum becoming continuously smaller and the area or length thereof — becomes a given function of the 6 functions $x, y, z, \lambda, \mu, \nu$ of a, b (or of a) and the derivatives thereof, the potential itself [becomes] consequently a two- or one-dimensional integral:

$$\Phi = \iint\limits_{(S_0)} \varphi\, da\, db \quad \text{or} \quad \Phi = \int\limits_0^l \varphi\, da.$$

The variation of these potentials and therefore the force, stress and torque components formulated with respect to the initial parameters are obtained immediately from the corresponding formulas of the three-dimensional case by omitting the terms concerning c or b and c; The transformation to the quantities formulated with respect to the deformed state follows then according to No. **3**e, (16) and No. **4**b, (12).

If one focuses on oriented particles, then the angular velocities $p_a, \ldots$ as defined in No. **7**b play again a crucial role, and indeed one has now naturally only 2 or 1 triple of these quantities. *E.* and *F. Cosserat* have widely developed the theory of such media using

[100] *E.* and *F. Cosserat*, l. c., p. 130 f.; cf. also IV **11** *K. Heun* No. **21**.

[101] Already *Lagrange* applied [the ansatz] to the problems in this area which he considered[23]); [the ansatz] was developed further in the theory of elastic wires and plates (cf. IV 6 (*P. Stäckel*), No. **23**, **24** and IV 25, Kap. III, *Tedone-Timpe*), but particularly also in the theory of capillarity (cf. V 9 (*Minkowski*), No. **2**).

zugeordneten Dreikantes als beweglichen Bezugssystemes weitgehend ausgebaut[102]) und haben auch hier die inneren Wirkungen betrachtet, die sich aus einem wie oben definierten *euklidischen Potential* herleiten; der Ausdruck dieses Potentials und die zugehörigen Kraft-, Spannungs-, und Momentformeln ergeben sich wiederum durch Spezialisierung der Gleichungen (16) ff. von Nr. **7**b.

7d. Die Bedeutung des wirklichen Minimums. Ein wesentlicher Vorteil der Existenz eines Potentiales Φ der gesamten Kraftwirkungen ist die Möglichkeit, die Gleichgewichtsbedingungen ohne explizite Verwendung unendlichkleiner Verrückungen auszusprechen. Die Gleichgewichtsbedingung $\delta\Phi = 0$ ist nämlich die Bedingung dafür, dass Φ für die betrachtete Deformation einen Extremwert (Maximum oder Minimum, ev. aber auch einen sog. „Sattelwert") besitzt[103]): *Für eine Gleichgewichtslage des Quantums V_0 des Kontinuums wird also das Potential von V_0 ein Extremwert (im weitesten Sinne), verglichen mit den Werten für alle benachbarten nur den etwa stattfindenden Nebenbedingungen genügenden Deformationszuständen.* Damit ordnet sich die Gleichgewichtsbedingung genau dem normalen Problem der Variationsrechnung ein, innerhalb eines gegebenen Bereiches V_0 der Variablen a, b, c die Funktionen $x, \dots, \lambda, \dots$ von ihnen so zu bestimmen, dass ein gewisses diese Funktionen und ihre Ableitungen enthaltendes Raum- und Oberflächenintegral ein Extremum wird — bei möglicherweise noch unbestimmten Randwerten; Differentialgleichungen und Randbedingungen, die hieraus nach den Regeln der Variationsrechnung entspringen, sind genau die früher aufgestellten Gleichgewichtsbedingungen.

Besonders hervorgehoben wird oft der Fall, dass Φ nur das Potential der im Inneren des Kontinuums angreifenden Wirkungen ist; dann tritt zu $-\delta\Phi$ in der Gleichgewichtsbedingung noch ein Oberflächenintegral, die virtuelle Arbeit der am Rande angreifenden äusseren Druckkräfte, hinzu, und $\delta\Phi$ selbst verschwindet notwendig nur für diejenigen virtuellen Verrückungen, die auf S den Wert Null haben. *Für eine Gleichgewichtslage also wird das Potential Φ der im Innern von V_0 angreifenden Kräfte und Spannungen ein Extremum, verglichen mit allen benachbarten, den etwa bestehenden Nebenbedingungen*

[102] Man sehe die ausführliche Darstellung in chap. II, III der „corps déformables", wo die Gleichgewichtsbedingungen solcher Medien mit euklidischem Potential bei Verwendung der verschiedenen möglichen Koordinatensysteme und unter den mannigfachsten Spezialisierungen entwickelt sind.

[103] Die Bedeutung dieser Auffassung hat *Lagrange* auch für die Kontinua in der Méc. anal. nachdrücklich betont (s. 1. Part., sect. IV, § III).

the triad associated with every particle as moving frame of reference[102]) and have considered also here the internal actions, which are derived from a *euclidean potential* as defined above; the expression of this potential and the corresponding force, stress and torque formulas are again obtained by the specialization of the equations (16) ff. of No. **7**b.

7d. The relevance of the effective minimum. An essential advantage of the existence of a potential Φ of the total force effects is the possibility to express the equilibrium conditions without explicitly using infinitesimal displacements. The equilibrium condition $\delta\Phi = 0$ is namely the condition that Φ has for the considered deformation an extremum (maximum or minimum, but possibly also a so called "saddle point")[103]): *For an equilibrium position of the portion V_0 of the continuum, the potential of V_0 therefore becomes an extremum (in the broadest sense), compared with the values for all neighboring states of deformations admissible with respect to possibly occurring constraints.* Hence, the equilibrium conditions can be classified just as the common problem of the calculus of variations, to determine inside a given domain V_0 of the variables a, b, c the functions $x, \dots, \lambda, \dots$ thereof, such that a certain spatial and surface integral including these functions and their derivatives becomes an extremum — for possibly yet undetermined boundary values; differential equations and boundary conditions, which originate herefrom according to the rules of the calculus of variations, correspond exactly to the previously formulated equilibrium conditions.

Particularly emphasized is often the case, that Φ is only the potential of the effects applied within the continuum; then to $-\delta\Phi$ in the equilibrium condition a surface integral, the virtual work of the external compressive forces applied to the boundary, is added, and $\delta\Phi$ itself vanishes necessarily only for those virtual displacements, which have the value zero on S. *For an equilibrium position, thus the potential Φ of the forces and stresses applied within V_0 becomes an extremum, compared with all neighboring states of deformations, admissible with respect*

[102] One shall have a look at the extensive presentation in chap. II, III of "corps déformables", in which the equilibrium conditions of such media with euclidean potential are developed using the various possible coordinate systems and according to most manifold specializations.

[103] In the Méc. anal. (see 1. Part., sect. IV, § III) *Lagrange* has particularly emphasized the relevance of this perception also for continua.

genügenden Deformationszuständen, für die jedes Grenzteilchen von V_0 denselben Ort innehat wie in der Gleichgewichtslage; die Lösung dieses Variationsproblems ist natürlich nur dann bestimmt, wenn die Lage der Randteilchen, d. h. die Randwerte der Deformationsfunktionen, direkt gegeben sind.

Das Hauptinteresse, das sich mit diesen Formulierungen verknüpft, gehört der Frage, ob hier wie in der Mechanik diskreter Massen sich je nach der Art des Extremums von Φ auch die *Art des Gleichgewichts* bestimmt, insbesondere, ob das *Dirichlet*sche Stabilitätskriterium[104]) gilt, *dass für das Eintreten stabilen Gleichgewichts das Stattfinden eines wirklichen Minimums entscheidend ist*. Die allgemeine Beantwortung dieser Frage kann nur auf die Theorie der *Bewegung* des Kontinuums gegründet werden, und zwar kommt es darauf an, ob eine durch kleine Impulse aus einem Gleichgewichtszustand hervorgerufene Bewegung im Falle eines wirklichen Minimums von Φ stets in beliebiger Nähe eben dieses Deformationszustandes verläuft. Freilich kann man dabei den Begriff der „beliebigen Nähe" verschieden interpretieren, je nachdem man die Entfernung jedes einzelnen Teilchens von seiner Gleichgewichtslage beschränkt, oder diese Forderung nur im Mittel für das ganze Kontinuum oder für einzelne Teilbereiche stellt; man erhält danach verschiedene Arten von Stabilität.

Abgesehen von den Fällen der gewöhnlichen Elastizitätstheorie, wo die Verhältnisse sehr einfach liegen[105]), sind nur für wenige Probleme Stabilitätsuntersuchungen vollständig durchgeführt worden; und meist wurde ihnen überdies das Dirichletsche Kriterium oder ein äquivalenter Satz direkt zugrunde gelegt.[106]) Unter Hinweis auf diesen Sachverhalt und auf die Schwierigkeiten, die der direkten Übertragung des Dirichletschen Beweises auf Kontinua entgegenstehen, hat *A. Kneser*[107]) die Richtigkeit des Dirichletschen Kriteriums für die Kettenlinie gezeigt; für das Problem der elastischen Linie hat den Beweis *M. Born*[108]) unter ausdrücklicher Benutzung des *Osgood*schen Satzes[109]) der Variationsrechnung in einer auch auf andere eindimensionale Probleme übertragbaren Weise erbracht. Allgemein jedoch,

---

[104] *P. L. Dirichlet*, Journ. f. Math. 32 (1846), p. 85 = Werke II (Berlin 1897), p. 5.

[105] Vgl. die Übersicht in IV 25, Nr. **21**, *Tedone-Timpe*.

[106] S. IV 25, Nr. **21**, p. 211.

[107] *A. Kneser*, Journ. f. Math. 125 (1903), p. 189.

[108] *M. Born*, Untersuch. über die Stabilität der elastischen Linie. Preisschrift, Göttingen 1906, Anhang.

[109] *W. F. Osgood*, Amer. Trans. 2 (1901), p. 273; vgl. II A 8 a (*H. Hahn* u. *E. Zermelo*), Anm.[11]).

to possibly occurring constraints, [and] for [those states of deformations in] which every boundary particle of V_0 is located at the same point as in the equilibrium position; certainly, the solution of this variational problem is only determined when the position of the boundary particles, i. e. the boundary conditions of the deformation functions, are given directly.

The main interest, which is associated with this formulation, belongs to the question, if here, as in the mechanics of discrete masses, depending on the type of extremum of Φ also the *type of equilibrium* is determined, in particular, if *Dirichlet*'s stability criterion[104]) holds, *that for the appearance of a stable equilibrium the occurrence of an effective minimum is crucial*. The general answer of this question can only be founded on the theory of the *motion* of the continuum, and indeed it depends, if in the case of an effective minimum Φ a motion out of the equilibrium state caused by small impulses takes place always in the arbitrary neighborhood of exactly this state of deformation. However, in doing that one can interpret the notion of "arbitrary neighborhood" differently, depending on whether one bounds the distance of every individual particle from its equilibrium position, or [one] imposes this requirement only in average for the whole continuum or for individual subdomains; one obtains accordingly various types of stability.

Apart from the cases of the ordinary theory of elasticity, where the circumstances are very easy[105]), only for a few problems complete analyses of stability have been carried out; and moreover, mostly Dirichlet's criterion or an equivalent theorem is taken directly as a basis.[106]) With reference to this circumstance and to the difficulty, which the direct transition of Dirichlet's proof to continua is opposed to, *A. Kneser*[107]) has shown the validity of Dirichlet's criterion for the catenary; for the problem of the elastic line *M. Born*[108]) has elaborated the proof with explicit use of *Osgood*'s theorem[109]) of the calculus of variations in a way [which is] also applicable to other one-dimensional problems. Nevertheless in general,

[104] *P. L. Dirichlet*, Journ. f. Math. 32 (1846), p. 85 = Werke II (Berlin 1897), p. 5.

[105] Cf. the overview in IV 25, No. **21**, *Tedone-Timpe*.

[106] See IV 25, No. **21**, p. 211.

[107] *A. Kneser*, Journ. f. Math. 125 (1903), p. 189.

[108] *M. Born*, Untersuch. über die Stabilität der elastischen Linie. Preisschrift, Göttingen 1906, Appendix.

[109] *W. F. Osgood*, Amer. Trans. 2 (1901), p. 273; cf. II A 8 a (*H. Hahn* and *E. Zermelo*), Remark [11]).

für mehrdimensionale Integrale, dürfte der Osgoodsche Satz und daher auch das Dirichletsche Kriterium nicht ohne weiteres gelten.[110])

7e. Direkte Bestimmung der Spannungskomponenten. Für manche Zwecke wichtig ist eine Umformung des Prinzips vom Energieminimum, die der sog. *kanonischen Transformation* der Dynamik diskreter Medien analog ist.[111]) Sie besteht zunächst darin — wenn wir der Kürze halber uns nur auf den ersten Fall von Nr. **7**a beziehen — dass man an Stelle der 9 Ableitungen $x_a, \ldots, z_c$ als neue unbekannte Funktionen die 9 zugehörigen auf die Anfangsparameter bezogenen Spannungskomponenten

$$X_a = \frac{\partial \varphi}{\partial x_a}, \quad X_b = \frac{\partial \varphi}{\partial x_b}, \ldots, \; Z_c = \frac{\partial \varphi}{\partial z_c} \tag{19}$$

— unter Voraussetzung des Nichtverschwindens der entsprechenden Funktionaldeterminants — einführt. Bestimmt man sodann

$$H = \varphi - \sum_{(xyz\,;\,abc)} x_a X_a = H(x, \ldots; X_a, \ldots, Z_c) \tag{20}$$

als Funktion der x, y, z und der neuen Grössen $X_a, \ldots, Z_c$ so zeigt man leicht mit Hilfe der bekannten Methoden der Variationsrechnung[112]), dass das Verschwinden von $\delta\Phi$ gleichbedeutend ist mit dem Verschwinden der ersten Variation des Integrales

$$\iiint\limits_{(V_0)} \Bigl(H(x, \ldots; X_a, \ldots, Z_c) + \sum_{(xyz\,;\,abc)} \frac{\partial x}{\partial a} X_a\Bigr) da\, db\, dc, \tag{21}$$

das als unbekannte Funktionen x, y, z nebst ihren (linear auftretenden) Ableitungen und ausserdem $X_a, \ldots, Z_c$ ohne Ableitungen enthält. Daraus ergiebt sich dann die neue „kanonische“ Form der im Innern geltenden Gleichgewichtsbedingungen:

$$\frac{\partial X_a}{\partial a} + \frac{\partial X_b}{\partial b} + \frac{\partial X_c}{\partial c} - \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \quad \begin{pmatrix} X, Y, Z \\ x, y, z \end{pmatrix}, \tag{22a}$$

$$\frac{\partial H}{\partial X_a} + \frac{\partial x}{\partial a} = 0 \qquad \begin{pmatrix} X, Y, Z \\ x, y, z \end{pmatrix}; a,\ b,\ c\Bigr). \tag{22b}$$

Die Gleichungen (22b) spielen dadurch, dass sie als Auflösung von (19) den expliziten Ausdruck der Deformation durch die Spannungskomponenten geben, in der Elastizitätstheorie eine wesentliche Rolle.

---

[110] Nach mündlicher Mitteilung von *A. Haar*. Haar hat jedoch bewiesen, dass ein analoger Satz wieder gilt sowie hinreichend hohe Ableitungen im Integranden des Variationsproblemes auftreten (vgl. den Bericht über einen Vortrag i. d. math. Ges. Göttingen, Jahresber. d. d. Math.-Ver. 19 (1910), p. 254.

[111] Vgl. IV 12, *P. Stäckel* sowie etwa die Darstellung der *Jacobi-Hamilion*schen Theorie in II A 5, Nr. **31**, *E. v. Weber*. Eine Ausdehnung auf mehrere unabhängige Veränderliche giebt *M. Born*[108]), Anhang.

[112] Vgl. *M. Born*, l. c. [108]) p. 91 ff.

for multidimensional integrals, Osgood's theorem and therefore also Dirichlet's criterion may not hold without further ado.[110])

7e. Direct determination of the stress components. For some purposes a transformation of the principle of minimum energy is important, which is analogue to the so called *canonical transformation* of the dynamics of discrete media.[111]) At first it involves — when for the sake of brevity, we refer only to the first case of No. **7**a — that one introduces in place of the 9 derivatives $x_a, \ldots, z_c$ as new unknowns, the 9 corresponding components of stress formulated with respect to the initial parameters

$$X_a = \frac{\partial \varphi}{\partial x_a}, \quad X_b = \frac{\partial \varphi}{\partial x_b}, \ldots, \ Z_c = \frac{\partial \varphi}{\partial z_c} \tag{19}$$

— provided that the corresponding Jacobians do not vanish. If one determines then

$$H = \varphi - \sum_{(xyz\,;\,abc)} x_a X_a = H(x, \ldots; X_a, \ldots, Z_c) \tag{20}$$

as a function of x, y, z and the new quantities $X_a, \ldots, Z_c$, then one shows easily with the help of known methods form the calculus of variations[112]), that the vanishing $\delta\Phi$ is equivalent to the vanishing of the first variation of the integral

$$\iiint\limits_{(V_0)} \Big(H(x, \ldots; X_a, \ldots, Z_c) + \sum_{(xyz\,;\,abc)} \frac{\partial x}{\partial a} X_a \Big) da\, db\, dc, \tag{21}$$

which contains as unknown functions x, y, z together with their (linearly appearing) derivatives and moreover $X_a, \ldots, Z_c$ without derivatives. Thereof, the new "canonical" form of the equilibrium conditions follow, [which] hold in the interior:

$$\frac{\partial X_a}{\partial a} + \frac{\partial X_b}{\partial b} + \frac{\partial X_c}{\partial c} - \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \quad \begin{pmatrix} X, Y, Z \\ x, y, z \end{pmatrix}, \tag{22a}$$

$$\frac{\partial H}{\partial X_a} + \frac{\partial x}{\partial a} = 0 \qquad \begin{pmatrix} X, Y, Z \\ x, y, z \end{pmatrix};\ a,\ b,\ c \Big). \tag{22b}$$

In the theory of elasticity, the equations (22b) play a crucial role, since they give as solution of (19) an explicit expression of the deformation with respect to the stress components.

---

[110] According to a private communication of *A. Haar*. However, Haar has proven, that a similar theorem holds again as soon as sufficiently high derivatives appear in the integrand of the variational problem (cf. the report on a presentation in the math. Ges. Göttingen, Jahresber. d. d. Math.-Ver. 19 (1910), p. 254.[)]

[111] Cf. IV 12, *P. Stäckel* as well as for instance the presentation of the *Jacobi-Hamilion* theory in II A 5, No. **31**, *E. v. Weber*. An extension to several independent variables is given by *M. Born*[108]), Appendix.

[112] Cf. *M. Born*, l. c. [108]) p. 91 ff.

Das Charakteristische dieses neuen *Variationsprinzips, dass in ihm nicht sowohl die Deformationsgrössen, als vielmehr die Spannungskomponenten hervortreten*, kommt noch deutlicher in dem speziellen Fall zum Ausdruck, *dass die Energiedichte φ von den Werten der Deformationen x, y, z selbst unabhängig ist*, also nur von der Formänderung (im weitesten Sinne) abhängt. Dann enthält also H nur die Spannungskomponenten, und man kann (21) durch das folgende *Variationsprinzip mit Nebenbedingungen* ersetzen, das dem in der Theorie der Fachwerke als *Prinzip* von *L. F. Menabrea* und *A. Castigliano*[113]) bekannten analog ist: *Es soll die erste Variation des Integrales*

$$\iiint H(X_a, X_b, \ldots, Z_c)da\,db\,dc \tag{23}$$

verschwinden, wobei zum Vergleich alle Systeme von Funktionen $X_a, \ldots, Z_c$ zugelassen werden, die den 3 Bedingungsgleichungen

$$\frac{\partial X_a}{\partial a} + \frac{\partial X_b}{\partial b} + \frac{\partial X_c}{\partial c} = 0 \qquad (X, Y, Z) \tag{23a}$$

genügen; bezeichnet man mit x, y, z drei diesen Nebenbedingungen zugeordnete Lagrangesche Faktoren, so ergeben sich hieraus in der Tat die Gleichungen (22b). Durch Elimination dieser Lagrangeschen Faktoren aus (22b) folgen für die 9 unbekannten Funktionen allein die 6 Gleichungen:

$$\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial H}{\partial X_a}\right) = \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial H}{\partial X_b}\right) \qquad (a, b, c; X, Y, Z); \tag{24}$$

das sind die sog. *Kompatibilitätsbedingungen*[114]) der Elastizitätstheorie, die ausdrücken, dass ein den Bedingungen (23a) genügendes Spannungssystem tatsächlich Gleichgewichtssystem in einem Kontinuum mit der Energiedichte φ bzw. H sein kann. — Dies *Castiglianische Prinzip* wird besonders in solchen Fällen bedeutsam, wo in einem Medium nur Spannungen gewisser Art stattfinden können; die diese Einschränkungen darstellenden Bedingungen können ihm ohne weiteres als Nebenbedingungen hinzugefügt werden.[115])

7f. Die entsprechenden Ansätze für die Kinetik. Auch bei bewegten Medien kommen in erster Linie die bisher betrachteten

---

[113] *L. P. Menabrea*, Torino Mem. (2) 25 (1871), p. 141 und *A. Castigliano*, Théorie d'équilibre des systèmes élastiques (Turin 1879); vgl. IV 29a, Nr. **7** ff., *M. Grüning*. Vgl. auch *E.* und *F. Cosserat*, Corps déform., p. 26 ff. für den Fall des eindimensionalen Kontinuums.

[114] S. IV 24, Nr. **7**a, *Tedone*; vgl. auch *A. Haar* u. *Th. v. Kármán*, Gött. Nachr., math.-phys. Kl. 1909, p. 204 ff.

[115] *Haar* u. *Kármán*, l. c. [114]), p. 212.

The characteristics of this new *variational principle, that not only the deformation quantities but rather the stress components do appear*, finds expression even more for the special case, *that the energy density φ is independent of the values of the deformation functions x, y, z*, [that it] depends therefore only on the shape change (in the broadest sense). Then H contains thus only the stress components, and one can substitute (21) with the following *variational problem with constraints*, which is analogous to the [principle] known in the theory of frameworks as the *principle* of *L. F. Menabrea* and *A. Castigliano*[113]): *The first variation of the integral*

$$(23) \qquad \iiint H(X_a, X_b, \ldots, Z_c) da\, db\, dc$$

shall vanish, where for comparison all systems of functions $X_a, \ldots, Z_c$ are allowed, which satisfy the 3 equations

$$(23a) \qquad \frac{\partial X_a}{\partial a} + \frac{\partial X_b}{\partial b} + \frac{\partial X_c}{\partial c} = 0 \qquad (X, Y, Z);$$

If one denotes the Lagrange multipliers associated with these three constraints by x, y, z, then herefrom the equations (22b) are obtained after all. By elimination of these Lagrange multipliers from (22b), for the 9 unknown functions just the 6 equations follow:

$$(24) \qquad \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial H}{\partial X_a}\right) = \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial H}{\partial X_b}\right) \qquad (a, b, c; X, Y, Z);$$

these are the so called *compatibility conditions*[114]) of the theory of elasticity, which express, that a system of stresses being compatible with the conditions (23a) can in fact be an equilibrium system in a continuum with energy density φ or H. — This *principle of Castigliano* becomes particularly important in such cases, where in the medium only stresses of a certain type can appear; the conditions representing these restrictions can easily be added [to the principle] as constraints.[115])

7f. The appropriate approaches to kinetics. In the first place, also for moving media the so far considered

[113] *L. P. Menabrea*, Torino Mem. (2) 25 (1871), p. 141 and *A. Castigliano*, Théorie d'équilibre des systèmes élastiques (Turin 1879); cf. IV 29a, No. **7** ff., *M. Grüning*. Cf. also *E.* and *F. Cosserat*, Corps déform., p. 26 ff. for the case of the one-dimensional continuum.

[114] See IV 24, No. **7**a, *Tedone*; cf. also *A. Haar* and *Th. v. Kármán*, Gött. Nachr., math.-phys. Kl. 1909, p. 204 ff.

[115] *Haar* and *Kármán*, l. c. [114]), p. 212.

Wirkungen in Betracht, in die nur t als Parameter eingeht. Fasst man zunächst den Ansatz von Nr. **7**a mit dem Ausdruck des *Hamiltonschen Prinzips* Nr. **5**, (5), (6) zusammen, so ergiebt sich der der Formulierung von **7**d analoge Satz: *Für die wirkliche Bewegung des Kontinuums V_0 im Zeitintervall $t_0 \leqq t \leqq t_1$ hat das vierfache Integral*

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \iiint\limits_{(V_0)} dV_0 \left\{ \tfrac{1}{2}\varrho_0(x'^2 + y'^2 + z'^2) - \varphi \right\} \tag{25}$$

einen Extremwert gegenüber seinen Werten für alle benachbarten, den etwa stattfindenden Nebenbedingungen genügenden Bewegungen, die zu den Zeiten t_0 und t_1 das Kontinuum in derselben Lage belassen.

Diesen Ansatz kann man, wie man es im Falle endlich vieler Freiheitsgrade tut, sofort wesentlich ausdehnen, indem man von der speziellen Abhängigkeit des Integranden von den zeitlichen Ableitungen abgeht. Man braucht dazu, um sogleich auch den Fall orientierter Teilchen mit zu umfassen, nur an die Formeln (10), (12) von Nr. **5**d anzuschliessen und analog wie im Anfang von Nr. **7**a zu fordern: *Die virtuelle Arbeit des bewegten Kontinuums im Zeitintervall t_0, t_1 soll für jede virtuelle Verrückung gleich sein der Variation eines einzigen nur von dem jeweiligen Bewegungszustande abhängigen Ausdruckes*, der speziell ein vierfaches Integral über eine bekannte Funktion der Bewegungsfunktionen und ihrer zeitlichen und räumlichen Ableitungen sei:

$$\Phi = \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint\limits_{(V_0)} dV_0 \varphi(a, b, c, t; x, \dots, \nu; x_a, \dots, \nu_c; x', \dots, \nu'; x'_a, \dots, \nu'_c), \tag{26}$$

und *Wirkungsintegral (action)* heisse.[116]) Dann bleiben die Formeln für Kraft-, Spannungs- und Momentkomponenten im wesentlichen umgeändert, nur für die Impulskomponenten treten die Gleichungen hinzu

$$X_t = -\frac{\partial\varphi}{\partial x'},\ L_t = -\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda'} l_1 - \frac{\partial\varphi}{\partial\mu'} l_2 - \frac{\partial\varphi}{\partial\nu'} l_3 \quad \left(x,\ y,\ z;\ \begin{matrix} L, M, N \\ l,\ m,\ n \end{matrix}\right). \tag{27}$$

E. und *F. Cosserat*[117]) haben auch hier die Annahme eines „*euklidischen Potentiales*“ verfolgt, das sich bei einer jeden Bewegung des samt seinen Dreikanten erstarrt gedachten Kontinuums nicht ändert; es wird ausser den Grössen (16) noch die (nichtholonomen) Geschwindigkeitskoordinaten in bezug auf das bewegliche Koordinatensystem

$$\mathfrak{x} = \alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1 z',\ \mathfrak{p} = \alpha_3\alpha_2' + \beta_3\beta_2' + \gamma_3\gamma_2' \quad \begin{pmatrix} \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z} \\ \mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r} \\ 1, 2, 3 \end{pmatrix} \tag{28}$$

---

[116] Vgl. *E.* und *F. Cosserat*, Corps déform., p. 4.

[117] „Corps déformables“, p. 156 ff.

effects, in which only t enters as parameter, come into consideration. If one summarizes at first the ansatz of No. **7**a with the expression of *Hamilton's principle* No. **5**, (5), (6), then the theorem being analogous to the formulation of **7**d is obtained: *For the actual motion of the continuum V_0 within the time interval $t_0 \leqq t \leqq t_1$ the fourfold integral*

$$(25) \qquad \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint_{(V_0)} dV_0 \left\{ \tfrac{1}{2} \varrho_0 (x'^2 + y'^2 + z'^2) - \varphi \right\}$$

has an extremum with respect to its values for all neighboring motions being admissible with respect to possibly occurring constraints, which, at the time instants t_0 and t_1, leave the continuum in the same position.

As one does it in the case of finitely many degrees of freedom, one can immediately extend this ansatz, by giving up the special dependency of the integrand on the [terms with] time derivatives. To readily include also the case of oriented particles, one only needs to make the connection to the formulas (10), (12) of No. **5**d and to demand analogously like in the beginning of No. **7**a: *For every virtual displacement, the virtual work of the moving continuum in the time interval t_0, t_1 shall be equal to the variation of a single expression depending only on the respective motion*, which shall specifically be a fourfold integral over a known function of the functions of motion and the temporal and spatial derivatives thereof:

$$(26) \qquad \Phi = \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint_{(V_0)} dV_0 \varphi(a, b, c, t; x, \dots, \nu; x_a, \dots, \nu_c; x', \dots, \nu'; x'_a, \dots, \nu'_c),$$

and [shall] be called *action integral*.[116]) In that case, the formulas for the force, stress and torque components remain basically unchanged, only for the components of momentum additional equations do appear

$$(27) \qquad X_t = -\frac{\partial \varphi}{\partial x'}, \ L_t = -\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda'} l_1 - \frac{\partial \varphi}{\partial \mu'} l_2 - \frac{\partial \varphi}{\partial \nu'} l_3 \quad \left(x, \ y, \ z; \ \begin{matrix} L, M, N \\ l, \ m, \ n \end{matrix} \right).$$

Also here, *E.* and *F. Cosserat*[117]) have followed the assumption of a "*euclidean potential*", which does not change for an arbitrary motion of the continuum together with its triads being regarded as rigid; Besides the quantities (16) it will also include the (nonholonomic) velocity coordinates with respect to the movable coordinate system

$$(28) \qquad \mathfrak{x} = \alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1 z', \ \mathfrak{p} = \alpha_3 \alpha_2' + \beta_3 \beta_2' + \gamma_3 \gamma_2' \quad \begin{pmatrix} \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z} \\ \mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r} \\ 1, 2, 3 \end{pmatrix},$$

---

116 Cf. *E.* and *F. Cosserat*, Corps déform., p. 4.

117 "Corps déformables", p. 156 ff.

enthalten, und hiernach lassen sich die in die Bewegungsgleichungen eingehenden Komponenten analog (18) unmittelbar bestimmen.

Auch hier lässt sich analog zu Nr. **7**e die kanonische Transformation durchführen; transformiert man nur in Hinblick auf die zeitlichen Ableitungen, so entsteht, falls φ von t unabhängig ist, in

$$E = \varphi - \sum_{(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})} \mathfrak{x} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathfrak{x}} - \sum_{(\mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{r})} \mathfrak{p} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathfrak{p}}$$

die *Energiedichte des bewegten Systems*.[118])

Neben dieser weittragenden Verallgemeinerung ist noch eine speziellere Art des Eingehens der *zeitlichen* Ableitungen der Bewegungsfunktionen in die Wirkungskomponenten hervorzuheben, wie sie bei *Reibungswirkungen* u. dgl. auftritt und bei der ein dem Potentialansatz in gewisser Weise analoger Ansatz auftritt. Beschränken wir uns darauf, dass die Spannungsdyade einen von den zeitlichen Ableitungen der 9 Deformationsgrössen $x'_a, \dots, z'_c$ abhängigen Teil enthält, so handelt es sich um die Besonderheit, dass die Spannungskomponenten gerade die Ableitungen einer bekannten Funktion $F(x'_a, x'_b, \dots, z'_c)$ nach $x'_a, \dots, z'_c$ sind:

$$X_a = \frac{\partial F}{\partial x'_a}, \quad X_b = \frac{\partial F}{\partial x'_b}, \dots, \quad Z_c = \frac{\partial F}{\partial z'_c}. \tag{29}$$

Zu der während der wirklichen Bewegung geleisteten Arbeit liefert diese Spannungsdyade den Beitrag (auf die Zeiteinheit berechnet):

$$- \sum_{(xyz;abc)} X_a \frac{dx_a}{dt} = - \sum_{(xyz;abc)} \frac{\partial F}{\partial x'_a} \cdot x'_a = -D(x'_a, \dots, z'_c). \tag{30}$$

Ist D eine positiv definite Funktion seiner 9 Argumente, so wird während der Bewegung durch die Spannungen $X_a, \dots$ stets Arbeit verzehrt, und zwar in einem durch die Funktion D gemessenen Betrage; D heisst die zu der Spannung gehörige *Dissipationsfunktion*.[119]) Tatsächlich wird übrigens lediglich der Fall benutzt, dass F eine quadratische Funktion der $x'_a, \dots$ ist; dann ist auch

$$X_a = \frac{1}{2} \frac{\partial D}{\partial x'_a}, \quad X_b = \frac{1}{2} \frac{\partial D}{\partial x'_b} \ \dots, \quad Z_c = \frac{1}{2} \frac{\partial D}{\partial z'_c}. \tag{29'}$$

In ganz ähnlicher Weise kann man auch die Abhängigkeit von höheren zeitlichen Ableitungen in Betracht ziehen und die zugehörigen Dissipationsfunktionen bestimmen; für lineare Abhängigkeit der $X_a, \dots$ von den Ableitungen hat das *W. Voigt*[120]) durchgeführt.

---

[118] *M. Born*, l. c. p. 94 f.; *E.* und *F. Cosserat*, Corps déform., p. 171, 219.

[119] *Lord Rayleigh (J. W. Strutt)*, Lond. Math. Soc. Proc. 4 (1873), p. 357.

[120] *W. Voigt*, Kompendium I, p. 459 ff.; Lehrbuch der Krystallphysik, Leipzig 1910, p. 792 ff.

and according to this, the components entering the equations of motion can be determined immediately analogously to (18).

Also here a canonical transformation, analogous to No. **7**e, can be carried out; if one transforms merely with respect to the time derivatives, then for φ being independent of t it appears

$$E = \varphi - \sum_{(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})} \mathfrak{x}\frac{\partial\varphi}{\partial\mathfrak{x}} - \sum_{(\mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{r})} \mathfrak{p}\frac{\partial\varphi}{\partial\mathfrak{p}}$$

the *energy density of the moving system.*[118])

Besides this far-reaching generalization there is to be pointed out additionally a special kind of emergence of the *temporal* derivatives of the functions of motion in the effects, which appears in *frictional effects* and similar ones and for which an ansatz appears being in a way analogous to the potential-based approach. If we restrict us, that the stress dyad contains a part depending on the time derivatives of the 9 deformation quantities $x'_a, \dots, z'_c$, then it is about the specialty, that the stress components are just the derivatives of a known function $F(x'_a, x'_b, \dots, z'_c)$ with respect to $x'_a, \dots, z'_c$:

$$X_a = \frac{\partial F}{\partial x'_a}, \quad X_b = \frac{\partial F}{\partial x'_b}, \dots, \quad Z_c = \frac{\partial F}{\partial z'_c}. \tag{29}$$

Additional to the work done during the actual motion, the stress dyad contributes with (computed per unit of time):

$$-\sum_{(xyz;abc)} X_a \frac{dx_a}{dt} = -\sum_{(xyz;abc)} \frac{\partial F}{\partial x'_a} \cdot x'_a = -D(x'_a, \dots, z'_c). \tag{30}$$

If D is a positive definite function of its 9 arguments, then the stresses $X_a, \dots$ always use work, and indeed [they use work] in an amount measured by the function D; D is called the *dissipation function* associated to the stresses.[119]) By the way, merely the case of F being a quadratic function of $x'_a, \dots$ is effectively used; then it follows

$$X_a = \frac{1}{2}\frac{\partial D}{\partial x'_a}, \quad X_b = \frac{1}{2}\frac{\partial D}{\partial x'_b} \ \dots, \quad Z_c = \frac{1}{2}\frac{\partial D}{\partial z'_c}. \tag{29'}$$

In a quite similar way one can also consider the dependency on higher time derivatives and determine the corresponding dissipation functions; this has been carried out by *W. Voigt*[120]) for linear dependency of $X_a, \dots$ on the derivatives.

[118] *M. Born*, l. c. p. 94 f.; *E.* and *F. Cosserat*, Corps déform., p. 171, 219.

[119] *Lord Rayleigh (J. W. Strutt)*, Lond. Math. Soc. Proc. 4 (1873), p. 357.

[120] *W. Voigt*, Kompendium I, p. 459 ff.; Lehrbuch der Krystallphysik, Leipzig 1910, p. 792 ff.

8. Grenzfälle des gewöhnlichen dreidimensionalen Kontinuums. Endlich bleibt noch zu erörtern, wie man durch gewisse typische Grenzübergänge aus der Theorie des *freien dreidimensionalen* Kontinuums die bisher ohne direkten Zusammenhang mit ihr in rein formaler Analogie aufgestellten Ansätze für Kontinua anderer Art gewinnen kann; dabei genüge es, alles auf den Fall der Existenz eines Potentials der einfachsten Art (Nr. **7**a, Anfang) zu beziehen.

8a. Unendlichdünne Platten und Drähte. In erster Linie handelt es sich um die Theorie der Medien, deren Ausdehnung nach einer oder zwei Dimensionen hin als unendlichklein angesehen werden kann (Platten und Drähte). In Wahrheit liegt hier jedesmal ein *dreidimensional* ausgedehntes Gebiet $\mathfrak{V}$ vor, das von einem jene sehr kleinen Ausdehnungen messenden Parameter ε abhängt; die abstrakten Grenzfälle *unendlichkleiner* Ausdehnung werden wir darstellen, wenn wir eine ganze Schar von Gebieten $\mathfrak{V}$ betrachten, die sich im Limes $\varepsilon = 0$ dem bei der direkten Behandlung (s. Nr. **2**c) zugrunde gelegten Flächen- oder Linienstück — wir dürfen noch annehmen: gleichmässig — annähern. Auf Grund dieser Vorstellung kann man die Theorie der Platten und Drähte an die Theorie der dreidimensionalen Kontinua anschliessen, und tatsächlich hat bereits *S. D. Poisson* in einem Falle[121]) konsequent diesen Weg eingeschlagen: Man wird die charakteristischen Grössen für das Gebiet $\mathfrak{V}$ als Funktion von ε darstellen und dann durch ebenjenen Prozess $\lim \varepsilon = 0$ bzw. durch Beschränkung auf die ersten Glieder der Reihenentwicklung nach ε zu den für den Grenzfall geltenden Gesetzen gelangen. Axiomatisch gesprochen würde dieses Verfahren die Konsequenz eines *allgemeinen Stetigkeitspostulates* sein, das man so formulieren kann: In einem Medium, dessen Gestalt oder physikalisches Verhalten von einem kontinuierlich variablen Parameter abhängt, ändern sich die Zustandsgleichungen ausnahmslos stetig mit diesem Parameter.

Die Ausführung dieses Verfahrens möge an das Variationsprinzip angeschlossen werden[122]). Als typisches Beispiel werde ein Medium

[121] Bei der Behandlung des Problems der elastischen Platte; Mém. de l'Acad., Paris 8 (1829), p. 523 ff.

[122] Solche Reihenentwicklungen und Grenzbetrachtungen liegen mehr oder weniger ausgesprochen allen Theorien der Platten und Drähte seit *Poisson* zugrunde (s. IV 25, Nr. **13** ff., *Tedone-Timpe*); nur wird die Übersicht dadurch erschwert, daß man sich von vornherein auf unendlichkleine Deformationen in kleinen Teilgebieten beschränkt und erst hinterher unter Heranziehung von Hilfehypothesen zu der endlichen Deformation des Ganzen übergeht. Der Text folgt der Darstellung, die *C. Carathéodory* in einer Göttinger Vorlesung im W.-S. 1906/7 für die elastischen Linie vorgetragen hat.

8. Limit cases of the ordinary three-dimensional continuum. Eventually it remains to be discussed how one can gain by certain typical limit processes from the theory of the *free three-dimensional* continuum the foundations of other classes of continua which [have been obtained] so far without direct connection by a purely formal analogy; thereby it is sufficient to relate everything to the case of an existing potential of the most simple form (No. **7**a, beginning).

8a. Infinitely thin plates and wires. Primarily, it is about the theory of media whose extension in one or two dimensions can be considered as infinitesimal (plates and wires). In reality there exists always a *three-dimensional* extended domain $\mathfrak{V}$, which depends on a parameter ε measuring those very small extensions; we will express the abstract limit cases of *infinitesimal* extension, when we consider a whole family of domains $\mathfrak{V}$, which in the limit $\varepsilon = 0$ — furthermore we may assume: continuously — approach the surface or line element, which the direct approach (s. No. **2**c) is based on. Due to this perception, the theory of plates and wires can be connected to the theory of three-dimensional continua, and in fact already *S. D. Poisson* has chosen this way consistently for one case[121]): One is formulating the characteristic quantities for the domain $\mathfrak{V}$ as a function of ε and arrives at the laws holding for the limit case by the just mentioned process $\lim \varepsilon = 0$ or else by the restriction to the first terms in the series expansion with respect to ε. From an axiomatic point of view, this approach would be the consequence of a *general continuity postulate*, which can be formulated as follows: In a medium, whose shape or physical property depends on a continuously variable parameter, the equations of state change without exception continuously with this parameter.

The presentation of this approach shall be based on the variational principle[122]). As a typical example a medium

---

[121] For the treatment of the problem of the elastic plate; Mém. de l'Acad., Paris 8 (1829), p. 523 ff.

[122] Such series expansions and limit processes are since *Poisson* the more or less declared basis for all theories of plates and wires (s. IV 25, No. **13** ff., *Tedone-Timpe*); but the overall view is complicated by restricting oneself from the beginning to infinitesimal deformations in small subdomains and only afterwards one changes over to the finite deformation of the whole under citation of auxiliary hypotheses. The text follows the exposition, which *C. Carathéodory* presented for the elastic line in a "Göttinger Vorlesung" in the winter term 1906/7.

betrachtet, das im Anfangszustande das über einem Flächenstück S_0 der a-b-Ebene gelegene Gebiet $-\varepsilon \leqq c \leqq +\varepsilon$ erfüllt; sein Potential sei:

$$\Phi = \iint\limits_{(S_0)} da db \int\limits_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} dc \varphi(a, b, c; x, \ldots; x_a, \ldots). \tag{1}$$

Die Gleichgewichtsfunktionen $x = x(a, b, c), \ldots$, die unter gewissen Randbedingungen Φ zum Minimum machen, werden nun von ε abhängen; sie mögen in eine Potenzreihe in ε und c entwickelbar sein:

$$x = x^{(0)}(a, b) + c x_c^{(0)}(a, b) + \varepsilon x^{(1)}(a, b) + \varepsilon c x_c^{(1)}(a, b) + \cdots \quad (x, y, z). \tag{2}$$

Führt man diese Ausdrücke in φ ein und entwickelt danach φ selbst nach Potenzen von ε und c, so ergiebt sich für Φ eine Reihe

$$\Phi = \varepsilon \iint\limits_{(S_0)} \varphi_0 da db + \varepsilon^2 \iint\limits_{(S_0)} \varphi_1 da db + \cdots \tag{3}$$

wo

$$\varphi_0 = 2\varphi\left(a, b, 0; x^{(0)}, \ldots; \frac{\partial x^{(0)}}{\partial a}, \frac{\partial x^{(0)}}{\partial b}, x_c^{(0)}, \ldots\right)$$

lediglich von den Funktionen $x^{(0)}, \ldots$, ihren ersten partiellen Ableitungen nach a, b und den Funktionen $x_c^{(0)}, \ldots$ abhängt, während in $\varphi_1, \ldots$ immer mehr der als Entwicklungskoeffizienten der Reihen (2) auftretenden Funktionen von a, b eingehen können. Die eigentliche Aufgabe ist nun, die durch die Grenzfunktionen

$$\lim_{\varepsilon=0} x(a, b, 0) = x^{(0)}(a, b) \qquad (x, y, z)$$

bestimmte Gleichgewichtslage der „unendlichdünnen" Platte (bzw. ihrer Mittelebene $c = 0$) zu ermitteln. Daneben kann aber auch die Bestimmung weiterer Glieder der Reihen (2) wichtig werden, z. B. der Funktionen $x_c^{(0)}(a, b)$, die die neue Lage der ursprünglichen Normalen der Platte d. h. die Verbiegung ihres Materials gegen die geometrische Gestalt der Mittelebene bestimmen. Diese Funktionen gehören tatsächlich zu den Bestimmungsstücken der Deformation, eben weil es sich in Wahrheit nicht um ein *streng* ein- bzw. zweidimensionales Medium handelt; bei der direkten Theorie werden sie durch das *Cosserat*sche Dreikant geliefert.

Da nun Φ für jedes ε unter den angenommenen Randbedingungen ein Minimum werden soll, so muss nach (3) *in erster Linie* auch $\iint_{S_0} \varphi_0 da db$ ein Minimum werden; dies ist aber gerade eine Bedingung für jene Funktionen $x^{(0)}(a, b), \ldots, x_c^{(0)}(a, b)$, $\ldots$, wobei zum Vergleich alle die Funktionen zuzulassen sind, welche die aus den gegebenen Randbedingungen mittels (2) für $x^{(0)}, \ldots, x_c^{(0)}$ folgenden Randbedingungen erfüllen.

is considered, which in the initial state occupies the domain $-\varepsilon \leqq c \leqq +\varepsilon$ lying over the surface element S_0 of the a-b-plane; let its potential be:

$$\Phi = \iint\limits_{(S_0)} da\,db \int\limits_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} dc\,\varphi(a, b, c; x, \ldots; x_a, \ldots). \tag{1}$$

The functions of equilibrium $x = x(a, b, c), \ldots,$ which under certain boundary conditions make Φ to a minimum, will depend now on ε; let them be expandable in a series expansion of ε and c:

$$x = x^{(0)}(a, b) + c x_c^{(0)}(a, b) + \varepsilon x^{(1)}(a, b) + \varepsilon c x_c^{(1)}(a, b) + \cdots \qquad (x, y, z). \tag{2}$$

If one introduces these expressions in φ and subsequently expands φ itself with respect to the powers of ε and c, then the [following] series for Φ is obtained

$$\Phi = \varepsilon \iint\limits_{(S_0)} \varphi_0\,da\,db + \varepsilon^2 \iint\limits_{(S_0)} \varphi_1\,da\,db + \cdots \tag{3}$$

where

$$\varphi_0 = 2\varphi\Big(a, b, 0; x^{(0)}, \ldots; \frac{\partial x^{(0)}}{\partial a}, \frac{\partial x^{(0)}}{\partial b}, x_c^{(0)}, \ldots\Big)$$

depends merely on the functions $x^{(0)}, \ldots,$ their first partial derivatives with respect to a, b and the functions $x_c^{(0)}, \ldots,$ while in $\varphi_1, \ldots$ more and more coefficients can enter, [which] appear in the series expansion (2) as functions of a, b. The actual problem is now to calculate the equilibrium position of the "infinitely thin" plate (or rather its midsurface $c = 0$) determined by the limit function

$$\lim_{\varepsilon=0} x(a, b, 0) = x^{(0)}(a, b) \qquad (x, y, z).$$

Besides, also the determination of further terms in the series (2) can be important, for instance the functions $x_c^{(0)}(a, b)$, which determine the new position of the initial normals of the plate, i. e. the deflection of the material against the geometric shape of the midsurface. These functions belong in fact to the characteristic quantities of the deformation, just because in reality it is not about a *strict* one- or two-dimensional medium; in the direct theory they are given by the *Cosserat* triad.

Now, since Φ with respect to the considered boundary conditions shall become a minimum for every ε, according to (3) *primarily* $\iint_{S_0} \varphi_0\,da\,db$ must become a minimum; but this is directly a condition for those functions $x^{(0)}(a, b), \ldots, x_c^{(0)}(a, b), \ldots,$ where for comparison all the functions are allowed, which satisfy the boundary conditions for $x^{(0)}, \ldots, x_c^{(0)}$ induced by the given boundary conditions together with (2).

Es ist nun möglich, dass hierdurch die Funktionen $x^{(0)}, \ldots$ noch nicht völlig bestimmt werden, sondern dass sich nur gewisse Relationen zwischen ihnen ergeben. Beschränkt man sich alsdann auf Funktionen, die diesen Relationen genügen, so folgt *zweitens*, dass $x^{(0)}(a, b), \ldots$ und die weiterhin noch in φ_1 eingehenden Funktionen auch das zweite Glied der Reihe (3), $\iint_{(S_0)} \varphi_1 da db$, zum Minimum machen, wobei sich die Randbedingungen analog wie vorhin ergeben; lassen jene Relationen etwa die Elimination von $x_c^{(0)}, \ldots$ zu, so kann dies neue Variationsprinzip höhere Ableitungen der Funktionen $x^{(0)}, \ldots$ enthalten. Fährt man ev. mit dieser Schlussweise fort, so bekommt man für die Funktionen $x^{(0)}, \ldots$ eine *Reihe zweidimensionaler Variationsprobleme*, die *höhere Ableitungen* enthalten und zu denen Nebenbedingungen hinzutreten können.

Bei der Durchführung dieses Ansatzes entsteht jedoch eine wesentliche Schwierigkeit: es wird hierbei für die Lösung des dreidimensionalen Problems Entwickelbarkeit in eine Reihe der Form (2) vorausgesetzt, d. h. es wird ein bestimmtes reguläres Verhalten dieser Lösungen als Funktionen eines in der Randgleichung des Kontinuums enthaltenen Parameters ε gefordert. Nun braucht der Wert $\varepsilon = 0$ für Probleme dieser Art nicht nur keine reguläre Stelle zu sein, sondern er könnte sogar eine wesentlich singuläre Stelle sein[123]); die Möglichkeit einer Entwicklung (2) bleibt also zunächst durchaus problematisch. Solange daher nicht die Abhängigkeit der Lösungen von Parametern in den Randbedingungen eingehend erforscht ist, ist auf diesem Wege eine völlig befriedigende, über die Aufdeckung des formalen Zusammenhanges mit den Eigenschaften der dreidimensionalen Medien hinausgehende Theorie der Platten und Drähte nicht zu erzielen, und die direkten Ansätze, wie sie besonders *E.* und *F. Cosserat* ausgebildet haben (s. Nr. **3**e, **7**c) bleiben vorläufig das einzige Auskunftsmittel.

8b. Medien mit einer kinematischen Nebenbedingung. Prinzipiell gleichwertige Betrachtungen kann man anstellen, um aus der Theorie des frei deformierbaren Kontinuums die Gesetze solcher Medien abzuleiten, die Nebenbedingungen unterworfen sind, und für die der direkte Ansatz in Nr. **4c** gegeben wurde. Es handele sich, um wieder nur einen typischen einfachen Fall zu erörtern, um ein Medium $\mathfrak{M}$, zwischen dessen Deformationsgrössen die Nebenbedingung

$$\omega(x, \ldots; x_a, x_b, \ldots) = 0 \tag{4}$$

besteht, die übrigens ev. auch $a, \ldots$ explizit enthalten kann. In

[123] *E.* und *F. Cosserat*, Paris C. R. 145 (1907), p. 1139; 146 (1908), p. 169.

Now it is possible, that the functions $x^{(0)}, \dots$ are hereby not yet completely determined, but that only certain relations between them emerge. If thereupon one restricts oneself to functions, which satisfy these relations, then it follows *secondly*, that $x^{(0)}(a,b), \dots$ and the functions still entering φ_1 make the second term in the series $\iint_{(S_0)} \varphi_1 da db$ to a minimum, where the boundary conditions emerge analogously as before; if those relations allow for instance for the elimination of $x_c^{(0)}, \dots$, then this new variational principle can contain higher derivatives of the functions $x^{(0)}, \dots$. If one possibly continues with this procedure, then one obtains for the functions $x^{(0)}, \dots$ a *series of two-dimensional variational problems*, which contain *higher derivatives* and to which constraints can be added.

Carrying out this ansatz, however, a crucial difficulty arises: for the solution of the three-dimensional problem, hereby the expansibility into a series of the form (2) is assumed, i. e. a certain regular behavior of these solutions as functions of a parameter ε included in the boundary equation of the continuum is demanded. For problems of this kind, the value $\varepsilon = 0$ now does not only need to be not a regular point, but it could even be an essentially singular point[123]); the possibility of an expansion (2) remains therefore a priori quite questionable. Hence, as long as the dependency of the solutions on the parameters in the boundary conditions is not explored in detail, in this way, a completely satisfying theory of plates and wires, which goes beyond the disclosure of the formal connection with the properties of the three-dimensional media, is not obtained, and the direct approaches, which have especially been formulated by *E.* and *F. Cosserat* (see No. **3**e, **7**c) remain the only reference for now.

8b. Media with one kinematic constraint. In principle, one can make equivalent considerations to derive from the theory of the freely deformable continuum the laws of such media which are subjected to constraints, and for which the direct ansatz in No. **4**c has been given. To discuss again only one typical easy case, it is about a medium $\mathfrak{M}$, for which there exists the constraint

$$\omega(x, \dots; x_a, x_b, \dots) = 0 \tag{4}$$

between its deformation quantities[;] by the way [the constraint] can also contain $a, \dots$ explicitly. Now in

[123] *E.* and *F. Cosserat*, Paris C. R. 145 (1907), p. 1139; 146 (1908), p. 169.

Wahrheit wird nun ein solches Medium in der Natur niemals streng realisiert sein, vielmehr liegt hier wiederum nur eine Abstraktion aus der Betrachtung solcher Medien $\mathfrak{M}_\varepsilon$, vor, die die Relation (4) *nahezu* erfüllen. $\mathfrak{M}_\varepsilon$ mag durch ein Potential von der Gestalt Nr. **7**, (1) mit der Energiedichte φ_ε charakterisiert sein, und es soll von einem Parameter ε derart abhängen, dass für jede Gleichgewichtslage durchweg

$$|\omega(x, \ldots; x_a, \ldots, z_c)| < \varepsilon \tag{5}$$

bleibt. Solche Medien $\mathfrak{M}_\varepsilon$ betrachten wir nun für eine Schar gegen 0 konvergierender Werte des Parameters ε; nach dem oben ausgesprochenen allgemeinen Stetigkeitspostulat (S. 658) werden dann in der Grenze $\varepsilon = 0$ die Gesetze des Verhaltens von $\mathfrak{M}$ folgen.[124])

φ_ε ist folgendermassen charakterisiert: es hänge ausser von den Deformationsfunktionen und ihren Ableitungen auch noch von dem Ausdruck ω explizit ab:

$$\varphi_\varepsilon = \varphi_\varepsilon(x, \ldots; x_a, \ldots; \omega(x, \ldots; x_a, \ldots)). \tag{6a}$$

Betrachtet man φ_ε speziell als Funktion des letzten Argumentes ω, so soll $\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial \omega}$ mit wachsendem ω stets wachsen, für $\omega = 0$ identisch in allen andern Argumenten verschwinden und in jedem 0 nicht enthaltenden Intervall für $\lim \varepsilon = 0$ gleichmässig den Grenzwert $\pm\infty$ (je nachdem $\omega \gtrless 0$) haben; ferner soll für den Wert $\omega = 0$ φ_ε gleichmässig in dem in Betracht kommenden Variabilitätsbereich einen Limes haben:

$$\lim_{\varepsilon=0} \varphi_\varepsilon(x, \ldots; x_a, \ldots; 0) = \varphi_0(x, \ldots; x_a, \ldots). \tag{6b}$$

Ein Beispiel einer derartigen Funktion wäre $\varphi_\varepsilon = \varphi_0 + \frac{\omega^2}{2\varepsilon}$.

Die Gleichgewichtsdeformation von $\mathfrak{M}_\varepsilon$, wird nun, unter den betr. Randbedingungen, durch das Variationsprinzip

$$\delta \iiint\limits_{(V_0)} \varphi_\varepsilon(x, \ldots; x_a, \ldots; \omega(x, \ldots; x_a, \ldots)) da\, db\, dc = 0 \tag{7}$$

bestimmt. Zur Vorbereitung des Grenzüberganges dient eine der kano-

[124] Ein solcher Grenzübergang hat offenbar *Lagrange* vorgeschwebt, als er in seiner analytischen Mechanik den zu $\omega = 0$ gehörigen Multiplikator als „Kraft“ bezeichnet, die die Funktion ω zu ändern bestrebt ist; man vergleiche insbesondere die Sect. II, Nr. 9, Sect. IV, Nr. 6, 18, Sect. V, Nr. 53, Sect. VII, Nr. 21 des ersten Teiles, sowie die Noten von *J. Bertrand* hierzu — näher ausgeführt ist der Übergang indessen nicht. Die Darstellung des Textes ist nach Hinweisen ausgestaltet, die *D. Hilbert* in einer Göttinger Vorlesung im W.-S. 1906/7 für die Behandlung der inkompressiblen Flüssigkeiten gegeben hat.

reality such a medium will never be realized strictly in nature, moreover this here is again only an abstraction from considerations of such media $\mathfrak{M}_\varepsilon$, which *almost* satisfy the relation (4). $\mathfrak{M}_\varepsilon$ may be characterized by a potential of the form No. **7**, (1) with the energy density φ_ε, and it shall depend on a parameter ε, such that without exception for every equilibrium position

$$(5) \qquad |\omega(x, \ldots; x_a, \ldots, z_c)| < \varepsilon$$

holds. We consider now such media $\mathfrak{M}_\varepsilon$ for a family of values of the parameter ε converging to 0; according to the above declared general continuity postulate (p. 658), in the limit $\varepsilon = 0$ the laws of the behavior of $\mathfrak{M}$ will follow.[124])

φ_ε is characterized as follows: besides the deformation functions and the derivatives thereof it depends also on the expression ω explicitly:

$$(6a) \qquad \varphi_\varepsilon = \varphi_\varepsilon(x, \ldots; x_a, \ldots; \omega(x, \ldots; x_a, \ldots)).$$

If one considers φ_ε especially as a function of the last argument ω, then with increasing ω, $\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial \omega}$ shall increase continuously, for $\omega = 0$ [it shall] vanish identically for all other arguments and for every interval [which] does not contain 0, for $\lim \varepsilon = 0$ [it shall] have uniformly the limit $\pm\infty$ (depending on whether $\omega \gtrless 0$); furthermore, for the value $\omega = 0$, [the function] φ_ε shall have uniformly a limit within the domain of variability coming into consideration.

$$(6b) \qquad \lim_{\varepsilon=0} \varphi_\varepsilon(x, \ldots; x_a, \ldots; 0) = \varphi_0(x, \ldots; x_a, \ldots).$$

An example of such a function would be $\varphi_\varepsilon = \varphi_0 + \frac{\omega^2}{2\varepsilon}$.

The equilibrium deformation of $\mathfrak{M}_\varepsilon$, considering the corresponding boundary conditions, is now determined by the variational principle

$$(7) \qquad \delta \iiint\limits_{(V_0)} \varphi_\varepsilon(x, \ldots; x_a, \ldots; \omega(x, \ldots; x_a, \ldots))da\, db\, dc = 0$$

For the preparation of the limit process

---

[124] Apparently, *Lagrange* had such a limit process in mind, as he denoted in his analytical mechanics the multiplier associated to $\omega = 0$ as "force", which tries to change the function ω; one shall compare in particular Sect. II, No. 9, Sect. IV, No. 6, 18, Sect. V, No. 53, Sect. VII, No. 21 of the first part, as well as the notes of *J. Bertrand* hereto — meanwhile the transition is not carried out in more detail. The presentation of the text is formulated following suggestions, which *D. Hilbert* has given in a "Göttinger Vorlesung" in the winter term 1906/7 for the treatment of incompressible fluids.

nischen Transformation der Mechanik analoge Transformation[112]): aus

$$\frac{\partial \varphi_\varepsilon(x, \ldots; x_a, \ldots; \omega)}{\partial \omega} = \lambda \tag{8a}$$

wird ω als Funktion von λ sowie $x, \ldots; x_a, \ldots$ ausgedrückt:

$$\omega = \overline{\omega}_\varepsilon(x, \ldots; x_a, \ldots; \lambda) \tag{8b}$$

und damit der Ausdruck

$$\varphi_\varepsilon(x, \ldots; x_a, \ldots; \overline{\omega}) - \overline{\omega}_\varepsilon \cdot \lambda = H_\varepsilon(x, \ldots; x_a, \ldots; \lambda) \tag{9}$$

als Funktion von $\lambda, x, \ldots, x_a, \ldots$ gebildet. Dann folgt aus bekannten Methoden der Variationsrechnung[112]), dass (7) dem Variationsprinzip

$$\delta \iiint_{(V_0)} \{H_\varepsilon(x, \ldots; x_a, \ldots; \lambda) + \lambda \cdot \omega(x, \ldots; x_a, \ldots)\} da\, db\, dc = 0 \tag{10}$$

für die *vier* unbekannten Funktion x, y, z, λ äquivalent ist.

Hierin kann nun der Grenzübergang leicht vollzogen werden; nach den Annahmen über φ_ε konvergiert $\overline{\omega}_\varepsilon(x, \ldots; x_a, \ldots; \lambda)$ mit abnehmendem ε gleichmässig gegen 0, und da aus (9)

$$\frac{\partial H_\varepsilon(x, \ldots; x_a, \ldots; \lambda)}{\partial \lambda} = -\overline{\omega}$$

folgt, ergiebt sich unter Berücksichtigung von (6b) leicht die gleichmässige Existenz des Limes

$$\lim_{\varepsilon=0} H_\varepsilon(x, \ldots; x_a, \ldots; \lambda) = \varphi_0(x, \ldots; x_a, \ldots), \tag{11}$$

der unabhängig von λ ist. Also erhält man schliesslich als Grenzfall von (10) das Variationsprinzip

$$\delta \iiint_{(V_0)} \{\varphi_0(x, \ldots; x_a, \ldots) + \lambda \cdot \omega(x, \ldots; x_a, \ldots)\} da\, db\, dc = 0; \tag{12}$$

hierin aber kann man endlich λ als Lagrangeschen Faktor ansehen und hat damit tatsächlich genau den Ansatz von Nr. **4**c für ein Medium mit der Energiedichte φ_0 und der Nebenbedingung (4) gewonnen. Obendrein kann man dieser Überlegung noch die Bedeutung des Lagrangeschen Faktors entnehmen: nach (8a) steht λ zu der Verbindung ω der Deformationsgrössen in der gleichen Beziehung, wie die Spannungskomponente X_a zu der Deformationsgrösse x_a (s. Nr. **7**, (4)); es ist also gewissermassen die dieser Verbindung ω zugehörige Spannungskomponente, genauer: der Faktor von $\delta\omega$ im Ausdruck der virtuellen Arbeit bei einem „nahezu" der Bedingung $\omega = 0$ genügenden Medium.[124]) So sind die aus dem Stattfinden von Nebenbedingungen entspringenden *Reaktionswirkungen* als Grenzfälle den bisher durchgehends betrachteten *eingeprägten Wirkungen* eingeordnet.[125])

---

[125] Vgl. oben Nr. **7**e, S. 654 sowie Anm.[111]).

a transformation is used [which is] analogous to the canonical transformation of mechanics.[112]): Using

$$\text{(8a)} \qquad \frac{\partial \varphi_\varepsilon(x, \dots; x_a, \dots; \omega)}{\partial \omega} = \lambda$$

ω is expressed as a function of λ as well as of $x, \dots; x_a, \dots$:

$$\text{(8b)} \qquad \omega = \overline{\omega}_\varepsilon(x, \dots; x_a, \dots; \lambda)$$

and thereby the expression

$$\text{(9)} \qquad \varphi_\varepsilon(x, \dots; x_a, \dots; \overline{\omega}) - \overline{\omega}_\varepsilon \cdot \lambda = H_\varepsilon(x, \dots; x_a, \dots; \lambda)$$

as a function of $\lambda, x, \dots, x_a, \dots$ is set up. Then from the well-known methods of the calculus of variations[112]) it follows that (7) is equivalent to the variational principle

$$\text{(10)} \qquad \delta \iiint\limits_{(V_0)} \{H_\varepsilon(x, \dots; x_a, \dots; \lambda) + \lambda \cdot \omega(x, \dots; x_a, \dots)\} da\, db\, dc = 0$$

for the *four* unknown functions x, y, z, λ.

Herein the limit process can easily be carried out; according to the assumptions on φ_ε, $\overline{\omega}_\varepsilon(x, \dots; x_a, \dots; \lambda)$ converges with decreasing ε uniformly to 0, and since from (9)

$$\frac{\partial H_\varepsilon(x, \dots; x_a, \dots; \lambda)}{\partial \lambda} = -\overline{\omega}$$

follows, under consideration of (6b), the uniform existence of the limit

$$\text{(11)} \qquad \lim_{\varepsilon=0} H_\varepsilon(x, \dots; x_a, \dots; \lambda) = \varphi_0(x, \dots; x_a, \dots),$$

is easily obtained, which is independent of λ. Hence, one obtains finally as limit case of (10) the variational principle

$$\text{(12)} \qquad \delta \iiint\limits_{(V_0)} \{\varphi_0(x, \dots; x_a, \dots) + \lambda \cdot \omega(x, \dots; x_a, \dots)\} da\, db\, dc = 0;$$

herein one can consider λ finally as Lagrange multiplier and has therewith in fact provided exactly the ansatz of No. **4**c for a medium with energy density φ_0 and constraint (4). Moreover one can gather from this consideration the relevance of the Lagrange multiplier: according to (8a), λ is related to the connection of the deformation quantities ω in the same sense as the stress components X_a [are related] to the deformation quantities x_a (see No. **7**, (4)); it is in a way the stress component associated to this connection ω, more precisely: the factor of $\delta\omega$ in the expression of the virtual work for a medium "almost" satisfying the constraint $\omega = 0$.[124]) Thus, the *reactive effects* originating from the occurrence of constraints are to be classified as limit cases of the *impressed effects* thoroughly considered so far.[125])

---

[125] Cf. above No. **7**e, p. 654 as well as remark[111]).

B. Individualisierung für einzelne Gebiete.

9. Eigentliche Elastizitätstheorie. Es handelt sich nun darum aufzuweisen, an welchen Stellen der in Teil A entwickelten allgemeinen Schemata sich die für die Behandlung der einzelnen Disziplinen der Mechanik der Kontinua bisher hauptsächlich verwendeten Ansätze einordnen; beginnen wir mit der Elastizitätslehre im engeren Sinne, die ja dieser ganzen Entwicklung den Weg gewiesen hat.

Ein *vollkommen elastisches Medium* ist dadurch charakterisiert, dass der Spannungszustand in ihm jeweils lediglich abhängt von denjenigen Verbindungen der ersten Ableitungen der Deformationsfunktionen, die die *reine Formänderung* der kleinsten Teile gegenüber der Ausgangslage bestimmen:

$$(1) \qquad e_a = \tfrac{1}{2}(x_a^2 + y_a^2 + z_a^2 - 1), \quad g_{bc} = x_b x_c + y_b y_c + z_b z_c \qquad (a, b, c);$$

diese Grössen bleiben bei rechtwinkligen Transformationen des x-y-z-Koordinatensystems, auf das die deformierte Lage bezogen ist, einzeln ungeändert, während sie sich bei Transformationen der Anfangskoordinaten a, b, c wie Komponenten einer symmetrischen Dyade verhalten[126]). Bezieht man sich, wie man es in der Regel tut, auf den Fall der Existenz eines Potentiales Φ der einfachsten Form von Nr. **7**a, so leiten sich also die inneren Spannungen aus einer Energiedichtenfunktion φ her, die lediglich von den 6 Deformationskomponenten (1) abhängt[127]):

$$(2) \qquad \varphi = \varphi(e_a, e_b, e_c, g_{bc}, g_{ca}, g_{ab});$$

dabei ist es irrelevant, ob man die Dichte pro Volumelement des deformierten oder undeformierten Zustandes rechnet, da die event. als Faktor hinzutretende Volumdilatation Δ selbst lediglich von den Grös-sen (1) abhängt. Aus den Formeln (4), (5) von Nr. **7** entnimmt man nun unmittelbar die verschiedenen Ausdrücke der Spannungs-

[126] Vgl. IV 14, Nr. **17**, **18**, *M. Abraham.*

[127] *G. Green* hat diesen Ansatz zuerst für unendlichkleine Deformationen entwickelt (Trans. Cambr. Phil. Soc. 1838 = Math. Pap., London 1871, p. 248 ff.); später (Trans. Cambr. Phil. Soc. 1839 = Math. Pap., p. 295 ff.) hat er ihn auch für endliche Deformationen ausgesprochen, ohne ihn indessen bis zur Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen durchzuführen. Das hat zuerst *G. Kirchhoff* (Sitzungsber. Wien, math.-phys. Kl. 9 (1852), p. 762) getan, allerdings nur im Hinblick auf isotrope Körper, und später allgemein *W. Thomson* (Phil. Trans. Royal Soc. 153 (1863) = Math. Phys. Pap., London 1910, vol. III, p. 386 = Appendix C. zu Vol. I, 2 des Treat. on natur. philos. von *Thomson* und *Tait*).

B. Individualization for particular fields.

9. Effective theory of elasticity. Now, it is about to exhibit, at which places in the general schemes developed in part A, the fundamentals for the treatment of the particular fields of the mechanics of continua, mainly used so far, are integrated; let us start with the theory of elasticity in the narrower sense, which has pointed this whole development in the right direction.

A *purely elastic medium* is characterized in this way, that the stress state inside [the medium] depends in each case merely on those expressions of the first derivatives of the deformation functions, which determine the *pure shape change* of the smallest parts with respect to the initial position:

$$(1) \qquad e_a = \tfrac{1}{2}(x_a^2 + y_a^2 + z_a^2 - 1), \quad g_{bc} = x_b x_c + y_b y_c + z_b z_c \qquad (a, b, c);$$

each of these quantities remain unchanged for orthogonal transformations of the x-y-z-coordinate system being related to the deformed position, while they behave like the components of a symmetric dyad for transformations of the initial coordinates a, b, c[126]). If one refers, as one usually does, to the case of the existence of a potential Φ of the most simple form of No. **7**a, then the internal stresses are derived thus from the energy density function φ, which depends merely on the 6 deformation components (1)[127]):

$$(2) \qquad \varphi = \varphi(e_a, e_b, e_c, g_{bc}, g_{ca}, g_{ab});$$

thereby it is irrelevant, if one computes the density with respect to the volume element of the deformed or undeformed state, since the volume dilatation Δ, appearing possibly as a factor, depends itself merely on the quantities (1). From the formulas (4), (5) of No. **7** one extracts immediately the various expressions of the stress

[126] Cf. IV 14, No. **17**, **18**, *M. Abraham.*

[127] *G. Green* has first developed this ansatz for infinitesimal deformations (Trans. Cambr. Phil. Soc. 1838 = Math. Pap., London 1871, p. 248 ff.); later (Trans. Cambr. Phil. Soc. 1839 = Math. Pap., p. 295 ff.) he also stated [this ansatz] for finite deformations, but without carrying out the derivation of the equilibrium conditions. This has been done first by *G. Kirchhoff* (Sitzungsber. Wien, math.-phys. Kl. 9 (1852), p. 762), however, only with respect to isotropic bodies, and later in general by *W. Thomson* (Phil. Trans. Royal Soc. 153 (1863) = Math. Phys. Pap., London 1910, vol. III, p. 386 = Appendix C. to Vol. I, 2 of the Treat. on natur. philos. of *Thomson* and *Tait*).

komponenten, insbesondere wird[128])

$$(3)\qquad \begin{cases} X_x = \sum\limits_{(abc)} \dfrac{\partial\overline{\varphi}}{\partial e_a} x_a^2 + 2 \sum\limits_{(abc)} \dfrac{\partial\overline{\varphi}}{\partial g_{ab}} x_a x_b + \overline{\varphi} \\ X_y = \sum\limits_{(abc)} \dfrac{\partial\overline{\varphi}}{\partial e_a} x_a y_a + 2 \sum\limits_{(abc)} \dfrac{\partial\overline{\varphi}}{\partial g_{ab}} (x_a y_b + x_b y_a), \ldots\ldots, \end{cases}$$

und hieraus oder aus der Bemerkung, dass bei jeder starren Rotation des Mediums sich die $e_a, \ldots$ nicht ändern, also auch $\delta\Phi$ und damit die virtuelle Arbeit der Spannungsdyade verschwindet, folgen die wichtigen Relationen

$$(3')\qquad X_y = Y_x, \quad Y_z = Z_y, \quad Z_x = X_z.$$

Es ist nun die Aufgabe der speziellen Elastizitätstheorie zu untersuchen, welche Form die Funktion (2) von sechs Veränderlichen für die einzelnen Medien besitzt; indessen ist dieser allgemeine Fall endlicher Deformationen zugunsten der unendlichkleinen Deformationen in der Elastizitätslehre sehr zurückgetreten[129]). Speziell hervorgehoben sei hier nur der Fall des *isotropen* elastischen Mediums; wegen der Gleichwertigkeit der Richtungen im Medium können dann die 6 Formänderungskomponenten nur durch Vermittlung ihrer 3 Orthogonalinvarianten gegenüber Transformationen des Koordinatensystems a, b, c in (2) eingehen, d. h. es wird

$$(4)\qquad \varphi = \varphi(A, B, C)$$

wo A, B, C die Koeffizienten der Fundamentalgleichung

$$(4a)\qquad \begin{vmatrix} e_a - \Lambda, & \frac{1}{2} g_{ab}, & \frac{1}{2} g_{ac} \\ \frac{1}{2} g_{ab}, & e_b - \Lambda, & \frac{1}{2} g_{bc}, \\ \frac{1}{2} g_{ac}, & \frac{1}{2} g_{bc}, & e_c - \Lambda, \end{vmatrix} \equiv -\Lambda^3 + A\Lambda^2 - B\Lambda + C$$

sind, an deren Stellen natürlich auch die Wurzeln dieser Gleichung (Axenlängen des Deformationsellipsoides) treten können[130]). Diese Formeln umfassen ohne weiteres auch den Fall, dass das Medium im

[128] *J. Boussinesq*, Mém. prés. par div. sav., Paris 20 (1872), p. 594; die in 127) zitierten Autoren haben nur die Ausdrücke für die auf die Anfangsparameter bezogenen Spannungskomponenten $X_a, \ldots$. Vgl. auch Chap. III der zusammenfassenden Darstellung von *E.* u. *F. Cosserat*, Ann. de Toul. 10 (1896), p. J. 59.

[129] φ als homogene quadratische Funktion der 6 Argumente hat *W. Thomson*, a. a. O.[127]), p. 390, andere für bestimmte Arten der Wellenfortpflanzung charakteristische Gestalten *J. Hamadard*, Leçons sur la propagation des ondes (Paris 1903), p. 257 ff. betrachtet.

[130] Konkrete Ansätze für den isotropen Körper finden sich bei *G. Kirchhoff*, a. a. O.[127]), p. 773 und *M. Brillouin*, C. R. Paris 112 (1891), p. 1500.

components, in particular [it] is[128])

$$
(3) \qquad \begin{cases} X_x = \sum\limits_{(abc)} \dfrac{\partial\overline{\varphi}}{\partial e_a} x_a^2 + 2 \sum\limits_{(abc)} \dfrac{\partial\overline{\varphi}}{\partial g_{ab}} x_a x_b + \overline{\varphi} \\ X_y = \sum\limits_{(abc)} \dfrac{\partial\overline{\varphi}}{\partial e_a} x_a y_a + 2 \sum\limits_{(abc)} \dfrac{\partial\overline{\varphi}}{\partial g_{ab}} (x_a y_b + x_b y_a), \ldots.., \end{cases}
$$

and herefrom or from the remark, that the $e_a, \ldots$ do not change for every rigid rotation of the medium [and that] therefore also $\delta\Phi$ and consequently the virtual work of the stress dyad vanishes, the important relations follows

$$
(3') \qquad X_y = Y_x, \quad Y_z = Z_y, \quad Z_x = X_z.
$$

It is now the task of the particular theory of elasticity to study the form of the function (2) of the six variables for the individual media; meanwhile this general case of finite deformations recedes much in the theory of elasticity in favor of the infinitesimal deformations[129]). Here only the case of the *isotropic* elastic medium shall be emphasized especially; due to the equivalence of the directions in the medium, the 6 components of the shape change can enter (2) just by using their 3 orthogonal invariants with respect to transformations of the coordinate system a, b, c, i. e. it becomes

$$
(4) \qquad \varphi = \varphi(A, B, C)
$$

where A, B, C are the coefficients of the fundamental equation

$$
(4\text{a}) \qquad \begin{vmatrix} e_a - \Lambda, & \frac{1}{2} g_{ab}, & \frac{1}{2} g_{ac} \\ \frac{1}{2} g_{ab}, & e_b - \Lambda, & \frac{1}{2} g_{bc}, \\ \frac{1}{2} g_{ac}, & \frac{1}{2} g_{bc}, & e_c - \Lambda, \end{vmatrix} \equiv -\Lambda^3 + A\Lambda^2 - B\Lambda + C,
$$

which can be substituted certainly also by the square roots of this equation (lengths of axes of the deformation ellipsoid)[130]). These formulas include readily the case, that the medium

[128] *J. Boussinesq*, Mém. prés. par div. sav., Paris 20 (1872), p. 594; the authors cited in 127) have only expressions for the stress components with respect to the initial parameters $X_a, \ldots$. Cf. also Chap. III of the summarizing presentation of *E.* and *F. Cosserat*, Ann. de Toul. 10 (1896), p. J. 59.

[129] φ as a homogeneous quadratic function of the 6 arguments has been considered by *W. Thomson*, op. cit.[127]), p. 390, other forms, being characteristic for certain types of wave propagation, [have been considered] by *J. Hamadard*, Leçons sur la propagation des ondes (Paris 1903), p. 257 ff.

[130] Specific approaches for isotropic bodies can be found in *G. Kirchhoff*, op. cit.[127]), p. 773 and *M. Brillouin*, C. R. Paris 112 (1891), p. 1500.

undeformierten Anfangszustand „Selbstspannungen“ aufweist; andernfalls müssen die Spannungskomponenten (3) für verschwindende e, g verschwinden, d. h. es muss die Potenzentwicklung von φ nach seinen 6 Argumenten mit quadratischen Gliedern beginnen[131]).

Es sei noch erwähnt, dass *P. Duhem* seinen Potentialansatz (Nr. **7**, (7)), der eine direkte Einwirkung der Deformationszustände an je zwei verschiedenen Stellen aufeinander annimmt, speziell auf isotrope elastische Medien angewandt hat.[132]) Dabei sind die Variablen, die in φ eingehen, neben der Entfernung der beiden betrachteten Stellen die $2 \cdot 3$ Invarianten der Formänderung an ihnen sowie die Bestimmungsstücke der Orientierung der Deformationsellipsoide an beiden Stellen gegeneinander und gegen die Verbindungsstrecke.

Die grösste Rolle in der Elastizitätstheorie spielt die Betrachtung *unendlichkleiner Deformationen*. Die ersten, in σ linearen Glieder der Formänderungskomponenten (1) sind alsdann in den früheren Bezeichnungen (Nr. **6**, (6)) vom Faktor abgesehen:[126])

$$\varepsilon_a = \frac{\partial u}{\partial a}, \quad \gamma_{bc} = \frac{\partial v}{\partial c} + \frac{\partial w}{\partial b} \qquad \binom{a, b, c}{u, v, w}; \tag{5}$$

die Funktion $\tilde{\varphi}$ aber, aus der sich gemäss Nr. **7**a, (9) die Spannungskomponenten

$$X_a = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial u_a}, \ldots \tag{6}$$

als lineare Funktion der Verrückungskomponenten ergeben, wird

$$\tilde{\varphi} = \sigma \varphi_1(\varepsilon_a, \gamma_{bc}) + \sigma^2 \varphi_1\left(\frac{u_a^2 + v_a^2 + w_a^2}{2}, u_b u_c + v_b v_c + w_b w_c\right) + \sigma^2 \varphi_2(\varepsilon_a, \gamma_{bc}), \tag{6a}$$

wo φ_1 bzw. φ_2, die linearen bzw. quadratischen Terme der Potenzentwicklung von φ nach seinen 6 Argumenten bedeutet, und der Kürze halber immer nur eines von je 3 Argumenten hingeschrieben ist[133]).

Treten keine Anfangsspannungen auf, so wird φ eine quadratische Form der 6 Komponenten der unendlichkleinen Formänderung, und das ist der Fall, der den Ausgangspunkt der gewöhnlichen Elastizitätstheorie bildet (vgl. IV 24, Nr. **1**, (1), *O. Tedone*); dort wird dann insbesondere untersucht, welche Gestalten diese Funktion je nach den Symmetrieeigenschaften, die das Medium in bezug auf die Richtungen

---

[131] Auch für endliche Deformationen bereits angedeutet bei *G. Green*, a. a. O.[127]), p. 298. Vgl. auch *E.* und *F. Cosserat*, a. a. O.[128]), p. J. 70.

[132] *P. Duhem*, Ann. Éc. Norm., (3) 21 (1904), p. 117 ff.

[133] Eine solche Entwicklung benutzte schon *G. Green*, a. a. O.[127]), p. 299.Vgl. auch *H. Poincaré*, Leçons sur la théorie de l'élasticité, Paris 1892, p. 47 ff. sowie *E.* und *F. Cosserat*, a. a. O.[128]), p. J. 73 f.

has "residual stresses" in the undeformed initial state; otherwise for vanishing e, g, the stress components (3) must vanish, i. e. the series expansion of φ with respect to its six arguments must begin with quadratic terms[131]).

Furthermore, it has to be mentioned, that *P. Duhem* has applied his potential based approach (No. **7**, (7)), which considers a direct effect of the states of deformation at two different points on each other, especially for isotropic elastic media.[132]) Thereby, the variables which enter φ are besides the distance between the two considered points, the $2 \cdot 3$ invariants of the shape change [at those positions] as well as the characteristic quantities of the orientation of the deformation ellipsoids at both points with respect to each other and with respect to the connecting line segment.

The biggest issue in the theory of elasticity is the consideration of *infinitesimal deformations*. The first terms of the components of the shape change (1) being linear in σ are then, apart from the factor, in the former notations (No. **6**, (6)):[126])

$$\varepsilon_a = \frac{\partial u}{\partial a}, \quad \gamma_{bc} = \frac{\partial v}{\partial c} + \frac{\partial w}{\partial b} \qquad \begin{pmatrix} a, b, c \\ u, v, w \end{pmatrix}; \tag{5}$$

the function $\tilde{\varphi}$ however, from which according to No. **7**a, (9) the stress components

$$X_a = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial u_a}, \ldots \tag{6}$$

emerge as linear functions of the displacement components, becomes

$$\tilde{\varphi} = \sigma\varphi_1(\varepsilon_a, \gamma_{bc}) + \sigma^2\varphi_1\left(\frac{u_a^2+v_a^2+w_a^2}{2}, u_b u_c + v_b v_c + w_b w_c\right) + \sigma^2\varphi_2(\varepsilon_a, \gamma_{bc}), \tag{6a}$$

where φ_1 and φ_2 denote the linear and quadratic terms in the series expansion of φ with respect to its 6 arguments, respectively, and [where] due to the sake of brevity throughout only one of each 3 arguments is written[133]).

If there appear no residual stresses, then φ becomes a quadratic form of the 6 components of the infinitesimal shape change, and this is the case which provides the starting point of the ordinary theory of elasticity (cf. IV 24, No. **1**, (1), *O. Tedone*); there it is then studied in particular of what forms this function will be, depending on the symmetry properties which the medium has with respect to the directions

---

[131] Also already indicated for finite deformations by *G. Green*, op. cit.[127]), p. 298. Cf. also *E.* and *F. Cosserat*, op. cit.[128]), p. J. 70.

[132] *P. Duhem*, Ann. Éc. Norm., (3) 21 (1904), p. 117 ff.

[133] Such an expansion has already been used by *G. Green*, op. cit.[127]), p. 299. Cf. also *H. Poincaré*, Leçons sur la théorie de l'élasticité, Paris 1892, p. 47 ff. as well as *E.* and *F. Cosserat*,op. cit.[128]), p. J. 73 f.

durch einen Punkt etwa besitzt, von der allgemeinen Form mit 21 Konstanten (den *Elastizitätskoeffizienten*) bis hin zu der speziellsten mit 2 Konstanten (beim isotropen Medium) annehmen kann (vgl. IV 24, Nr. **2**b, **2**c). In diesem Falle nimmt das transformierte Variationsprinzip (23) von Nr. **7**e eine besonders einfache Form an, indem H bis aufs Vorzeichen gleich der Energiedichte wird; seine Koeffizienten sind die *Elastizitätsmoduln* des Mediums.

Älter als dieser Gedankengang ist eine etwas andere Betrachtungsweise, die die Annahme, dass alle möglichen Deformationen des Mediums unendlichklein seien, mehr in den Vordergrund bringt. Das elastische Medium erscheint hier dadurch charakterisiert, dass sein Potential φ lediglich von den Formänderungkomponenten ε, γ der unendlichkleinen Deformation abhängt:[134])

$$\varphi = \varphi(\varepsilon_a, \varepsilon_b, \varepsilon_c, \gamma_{bc}, \gamma_{ca}, \gamma_{ab}), \tag{7}$$

während sich die Spannungskomponenten daraus als Ableitungen nach $u_a, \dots$ ergeben. Im einfachsten Fall des Mediums ohne Selbstspannungen macht das freilich keinen Unterschied, sofern man sich wieder auf quadratische Glieder beschränkt. Man hat aber diesen Ansatz auch zur Behandlung von Selbstspannungen[135]) und auch zur Erzielung einer über das Hookesche Gesetz hinausgehenden Annäherung an die Naturvorgänge durch Berücksichtigung von Gliedern dritter und höherer Dimension[136]) verwendet; natürlich treffen diese Ansätze dann für andersartige Medien zu als die früheren.

Von einem ein wenig abweichenden Gesichtspunkte aus hat noch *J. Finger*[137]) die Grundformeln der Elastizitätstheorie endlicher Deformationen auszubauen versucht; er zieht nicht nur die Formänderungskomponenten (1) in Betracht, sondern lässt φ von allen 9 Ableitungen $x_a, \dots, z_c$ abhängen, wobei er — für ein isotropes Medium — lediglich symmetrisches Auftreten der drei Koordinatenrichtungen sowie Bestehen der Relationen (3′) voraussetzt und Glieder bis zur dritten Ordnung berücksichtigt.

Auch die Elastizitätslehre der *Körper mit einer oder zwei unendlichkleinen Dimensionen* ordnet sich dem Potentialsatz (für zwei bzw. eine

---

[134] Dies ist der ursprüngliche Ansatz von *G. Green*, a. a. O.[127]), p. 249; vgl. auch IV 23, Nr. **5**b, *Müller-Timpe*.

[135] Vgl. z. B. *H. von Helmholtz*, Dynamik kontinuierlich verbreiteter Massen (Leipzig 1902), p. 93.

[136] *W. Voigt* (Gött. Nachr., 1893, p. 534, math.-phys. Kl. 1894, p. 33; Ann. d. Phys, (3) 52 (1894), p. 536; Kompend. I, p. 339) zieht für isotrope Körper auch die Orthogonalinvariante dritter Ordnung der ε, γ heran.

[137] *J. Finger*, Sitzungsber. Wien 103^{IIa} (1894), p. 163, 231; s. speziell p. 175 ff.

through a point[; is it] of the most general form with 21 constants (the *elasticity constants*) [or is it] up to the most special [form] with 2 constants (for the isotropic medium) (cf. IV 24, No. **2**b, **2**c). In this case the transformed variational principle (23) of No. **7**e is of particular simple form, as H corresponds up to the sign with the energy density; its coefficients are the *elasticity moduli* of the medium.

Older than this line of thought is another perspective, which gives priority to the assumption, that all possible deformations of the medium shall be infinitesimal. The elastic medium appears here to be characterized in this way, that its potential φ depends merely on the components of the shape change ε, γ of the infinitesimal deformation:[134])

$$\varphi = \varphi(\varepsilon_a, \varepsilon_b, \varepsilon_c, \gamma_{bc}, \gamma_{ca}, \gamma_{ab}), \tag{7}$$

while the stress components emerge thereout as derivatives with respect to $u_a, \ldots$. In the most simple case of a medium without residual stresses, this makes certainly no difference, as far as one restricts oneself again to quadratic terms. However, one has also used this ansatz for the treatment of residual stresses[135]) and also for reaching an approximation of the natural processes going beyond Hooke's law by considering also terms of third and higher [polynomial] orders[136]); naturally, these approaches apply for different media than for the former ones.

Starting from a slightly different point of view, *J. Finger*[137]) has tried to extend the basic formulas of the theory of elasticity for finite deformations; He not only considers the components of the shape change (1), but lets also depend φ on all 9 derivatives $x_a, \ldots, z_c$, whereby he assumes — for an isotropic medium — merely symmetric appearance of the three coordinate directions as well as the existence of the relation (3′) and [whereby he] considers terms up to third order.

Also the theory of elasticity of *bodies with one or two infinitesimal dimensions* are subordinate to the potential-based approach (for two or one

[134] This is the original ansatz by *G. Green*, op. cit.[127]), p. 249; cf. also IV 23, No. **5**b, *Müller-Timpe*.

[135] Cf. e. g. *H. von Helmholtz*, Dynamik kontinuierlich verbreiteter Massen (Leipzig 1902), p. 93.

[136] *W. Voigt* (Gött. Nachr., 1893, p. 534, math.-phys. Kl. 1894, p. 33; Ann. d. Phys, (3) 52 (1894), p. 536; Kompend. I, p. 339) uses for isotropic bodies also the orthogonal invariants of third order of ε, γ.

[137] *J. Finger*, Sitzungsber. Wien 103^{IIa} (1894), p. 163, 231; see especially p. 175 ff.

Dimension; Nr. **7**c) unter; gegenüber den dreidimensionalen elastischen Medien ist dabei neu das Auftreten höherer Ableitungen der Deformationsfunktionen in der Energiedichte, wie es durch den Grenzübergang von Nr. **8**a erklärt ist. Dies Charakteristikum zeigt sich bereits bei dem Ausdruck des Potentiales

$$\Phi = \int_0^l \varphi \, da \tag{8}$$

der *ebenen Elastika*, d. h. eines an eine Ebene $z = 0$ gebunden gedachten elastischen Drahtes; es wird nämlich φ eine Funktion des Krümmungsradius ϱ der Kurve[138])

$$\varphi = \frac{E}{2} \cdot \frac{1}{\varrho^2} = \frac{E}{2}\left\{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2\right\} \tag{9}$$

wofern als Nebenbedingung noch Unausdehnbarkeit der Kurve $(s = a)$ zu der Bedingung des Potentialminimums hinzutritt — andernfalls erhält φ noch ein von der Längsdilatation $\frac{ds}{da}$ abhängiges Glied. Durch den Grenzübergang von Nr. **8**b kann man die hier auftretenden Konstanten mit den Elastizitätskonstanten des dreidimensional ausgedehnten Mediums in Zusammenhang bringen.

Bei der *räumlichen Elastika* kommt die oben (S. 659) bereits angedeutete Tatsache hinzu, dass auch die Verschiebung des Materiales des Drahtes gegen die Lage seiner Zentralkurve die Energie beeinflusst. Die nähere Beschreibung geschieht am bequemsten mit Hilfe des Cosseratschen Dreikants. Man denke das jedem Teilchen der Kurve angeheftete rechtwinklige Dreikant in der Ruhelage so orientiert, dass die dritte Axe in die Kurventangente fällt, während die andern beiden die Grenzlagen der Hauptträgheitsaxen des Normalschnittes durch den betr. Punkt bei abnehmender Dicke des Drahtes markieren; fügt man dann noch die Nebenbedingung hinzu, dass die letzte Axe des Dreikants bei jeder Deformation die Kurve tangiert:

$$\alpha_3 : \beta_3 : \gamma_3 = \frac{dx}{ds} : \frac{dy}{ds} : \frac{dz}{ds} = x_a : y_a : z_a, \tag{10}$$

die von der in Nr. **4**c betrachteten Form ist, so hat man ein Cosseratsches Medium, das genau die Elastika darstellt. Der Eigenschaft elastischer Medien, ein nur von den Formänderungskomponenten abhängiges Potential zu besitzen, entspricht hier offenbar die Annahme eines *euklidischen Potentials* im Cosseratschen Sinne (Nr. **7**b, (17)), und

[138] *D. Bernoulli* in einem Brief an *Euler*; *P. H. Fuss*, Cerresp. mathém. et phys., T. II, St. Pétersbourg 1843, p. 507. Vgl. auch *L. Euler*, Methodus inveniendi lineas maximi minimive proprietate gaudentes, Lausannae 1744, im Anhang „de curvis elasticis“.

dimensions; No. **7**c); compared to the three-dimensional elastic media, thereby the appearance of higher derivatives of the deformation functions in the energy density is new, as it is explained by the limit process of No. **8**a. This characteristics arises already in the expression of the potential

$$\Phi = \int_0^l \varphi \, da \tag{8}$$

of the *planar elastica*, i. e. an elastic wire thought to be constraint to the plane $z = 0$; namely, φ becomes a function of the curvature radius ϱ of the curve[138])

$$\varphi = \frac{E}{2} \cdot \frac{1}{\varrho^2} = \frac{E}{2} \left\{ \left(\frac{d^2x}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2} \right)^2 \right\} \tag{9}$$

provided that the inextensibility of the curve ($s = a$) is added as a constraint to the requirement of the minimum of the potential — otherwise φ is augmented by a term depending on the longitudinal dilatation $\frac{ds}{da}$. Due to the limit process of No. **8**b, one can relate the here appearing constants with the elasticity constants of the three-dimensional extended medium.

For the *spatial elastica* the above mentioned (p. 659) fact is added to, that the displacement of the material of the wire with respect to the position of the center curve influences the energy. The detailed description is most conveniently done with the help of the Cosserat triad. One thinks of the orthogonal triad attached to every particle of the curve being oriented in the position of rest such that the third axis coincides with the tangent of the curve, while the other two indicate the border locations of the principal axes of the normal cut through the considered point for decreasing thickness of the wire; if one adds then additionally the constraint, that for every deformation the last axis of the triad is tangent to the curve:

$$\alpha_3 : \beta_3 : \gamma_3 = \frac{dx}{ds} : \frac{dy}{ds} : \frac{dz}{ds} = x_a : y_a : z_a, \tag{10}$$

which is of the form considered in No. **4**c, then one has a Cosserat medium, which just describes the elastica. The property of elastic media, to have a potential depending only on the components of the shape change, corresponds here apparently with the assumption of a *euclidean potential* in the sense of the Cosserats (No. **7**b, (17)), and

[138] *D. Bernoulli* in a letter to *Euler*; *P. H. Fuss*, Cerresp. mathém. et phys., T. II, St. Pétersbourg 1843, p. 507. Cf. also *L. Euler*, Methodus inveniendi lineas maximi minimive proprietate gaudentes, Lausannae 1744, in the appendix "de curvis elasticis".

da aus (10) und Nr. **7**, (16b) $\mathfrak{x}_a = \mathfrak{y}_a = 0$ folgt, kann die Energiedichte nur noch abhängen von $\mathfrak{z}_a$, das die Dehnung des Drahtes bestimmt, und den Winkelgeschwindigkeitskomponenten $\mathfrak{p}_a, \mathfrak{q}_a, \mathfrak{r}_a$, die die geometrische Krümmung des deformierten Drahtes und den *Drall* (*twist*) des Materiales messen (vgl. IV 25, Nr. **17**, *Tedone-Timpe*)[139]):

$$\varphi = \varphi(\mathfrak{z}_a, \mathfrak{p}_a, \mathfrak{q}_a, \mathfrak{r}_a) \tag{11}$$

Der spezielle Ansatz, der die Theorie der Elastika liefert, ist wiederum der einer quadratischen Form, und zwar — wenn wie oben noch die Nebenbedingung der Unausdehnbarkeit hinzugenommen wird — [140]):

$$\varphi = \frac{E}{2}(J_1 \mathfrak{p}_a^2 + J_2 \mathfrak{q}_a^2) + \frac{C}{2}\mathfrak{r}_a^2; \tag{12}$$

hierbei sind E, J_1, J_2, C Materialkonstanten; ist speziell $J_1 = J_2$ (was einem kreisförmigen Querschnitt des Drahtes entspricht), so tritt wie in (9) die Krümmung $\frac{1}{\varrho^2} = \mathfrak{p}^2 + \mathfrak{q}^2$ der Kurve auf. Durch Annahmen ähnlicher Art über die Verknüpfung der Lage des Dreikants mit der Kurve kann man von dem gleichen Ansatz aus auch alle übrigen in der Elastizitätstheorie behandelten Typen von Stäben, Drähten, Fäden darstellen, wie das *E.* und *F. Cosserat* [141]) ausführlich entwickelt haben.

Ganz analoge Betrachtungen gelten für die Theorie der *Platten*; sie seien hier nur kurz angedeutet. Man kann die Platte ansehen als ein zweidimensionales Medium mit orientierten Teilchen, deren Dreikante mit der dritten Axe stets normal zu der vom Medium jeweils erfüllten Fläche stehen sollen[142]); dann ist $\mathfrak{z}_a = \mathfrak{z}_b = 0$ und

$$\varphi = \varphi(\mathfrak{x}_a, \mathfrak{y}_a, \mathfrak{x}_b, \mathfrak{y}_b; \mathfrak{p}_a, \ldots, \mathfrak{r}_c)$$

hängt von der Dehnung und Krümmung der deformierten Fläche und der inneren Verwindung der Materie auf ihr in orthogonal invarianter Weise ab. Auch hier haben *E.* und *F. Cosserat*[143]) im einzelnen ausgeführt, wie man daraus den Energieansatz für die übliche Näherungstheorie der elastischen Platte[144]) sowie überhaupt für alle behandelten Typen elastischer Platten, Membrane und Schalen[145]) herleiten kann.

10. Dynamik idealer Flüssigkeiten. Die idealen Flüssigkeiten ordnen sich ohne weiteres als Sonderfall denjenigen elastischen Medien

[139] *E.* und *F. Cosserat*, Corps déformables, p. 37 ff.

[140] *Thomson-Tait*, natural philos., new ed. I 2, p. 133 ff.; dort wird auch ein allgemeinerer quadratischer Ansatz in Betracht gezogen. Vgl. auch IV 25, Nr. **17**.

[141] *E.* und *F. Cosserat*, Corps déformables, Nr. 15—28.

[142] Vgl. *E.* und *F. Cosserat*, Corps déformables, p. 105 ff.

[143] *E.* und *F. Cosserat*, Corps déformables, Nr. 41—46.

[144] *Thomson-Tait*, a. a. O.[140]) I 2, p. 184 ff.

[145] Vgl. insbesondere die Angaben in IV 26, Nr. **5**, *H. Lamb*.

since from (10) and No. **7**, (16b) $\mathfrak{x}_a = \mathfrak{y}_a = 0$ follows, the energy density can only depend on $\mathfrak{z}_a$, which determines the elongation of the wire, and the components of the angular velocities $\mathfrak{p}_a, \mathfrak{q}_a, \mathfrak{r}_a$, which measure the geometric curvature of the deformed wire and the twist (*Drall*) of the material (cf. IV 25, No. **17**, *Tedone-Timpe*)[139]):

$$(11) \qquad \varphi = \varphi(\mathfrak{z}_a, \mathfrak{p}_a, \mathfrak{q}_a, \mathfrak{r}_a)$$

The special ansatz, which is provided by the theory of the elastica, is again the one of a quadratic form, and indeed — when as above additionally the inextensibility constraint is added — [140]):

$$(12) \qquad \varphi = \frac{E}{2}(J_1\mathfrak{p}_a^2 + J_2\mathfrak{q}_a^2) + \frac{C}{2}\mathfrak{r}_a^2;$$

hereby E, J_1, J_2, C are material constants; If especially $J_1 = J_2$ (what corresponds to a circular cross section of the wire), then the curvature $\frac{1}{\varrho^2} = \mathfrak{p}^2 + \mathfrak{q}^2$ of the curve appears as in (9). By assumptions similar in kind about the relation between the position of the triad and the curve, one can represent all other types of bars, wires, strings treated in the theory of elasticity, how it has been developed extensively by *E.* and *F. Cosserat* [141]).

Very similar considerations apply to the theory of *plates*; which are treated here only briefly. One can consider a plate as a two-dimensional medium with oriented particles, whose triads shall stand [in such a way, that] the third axis stands always normal to the surface filled with the medium[142]); then $\mathfrak{z}_a = \mathfrak{z}_b = 0$ and

$$\varphi = \varphi(\mathfrak{x}_a, \mathfrak{y}_a, \mathfrak{x}_b, \mathfrak{y}_b; \mathfrak{p}_a, \ldots, \mathfrak{r}_c)$$

depends on the stretch and the curvature of the deformed surface and the internal twisting of the matter on [the surface] in an orthogonal invariant manner. Also here, *E.* and *F. Cosserat* [143]) have carried out in detail, how one can derive thereout the energy theorem for the common approximation theory of the elastic plate[144]) as well as anyway for all types of elastic plates, membranes and shells[145]).

10. Dynamics of ideal fluids. The ideal fluids are subordinate readily as a special case of those elastic media

---

[139] *E.* and *F. Cosserat*, Corps déformables, p. 37 ff.

[140] *Thomson-Tait*, natural philos., new ed. I 2, p. 133 ff.; there also a more general quadratic ansatz is considered. Cf. also IV 25, No. **17**.

[141] *E.* and *F. Cosserat*, Corps déformables, No. 15—28.

[142] Cf. *E.* and *F. Cosserat*, Corps déformables, p. 105 ff.

[143] *E.* and *F. Cosserat*, Corps déformables, No. 41—46.

[144] *Thomson-Tait*, op. cit.[140]) I 2, p. 184 ff.

[145] Cf. in particular the statement in IV 26, No. **5**, *H. Lamb*.

unter, die beliebige endliche Deformationen gestatten; sie sind dadurch charakterisiert, dass Arbeit nur für solche Deformationen aufgewendet werden muss, die mit einer Volumendilatation oder Kompression der kleinsten Teilchen verbunden sind[146]), und dass also die Energiedichte φ allein von der durch die Funktionaldeterminante Δ gemessenen momentanen Volumdilatation an jeder Stelle abhängt[147]):

$$\varphi = \varphi(\Delta) \tag{1}$$

Da Δ als Orthogonalinvariante der Deformation eine Funktion der Grössen A, B, C (Nr. **9**, (4a)) ist ($\Delta^2 = 1 + 2A + 4B + 8C$), so ist (1) tatsächlich nur ein spezieller Fall des Ansatzes (4) von Nr. **9**. Aus Nr. **7**, (5) ergeben sich leicht als Komponenten der zu diesem Potential gehörigen inneren Spannung:

$$\begin{cases} X_x = Y_y = Z_z = \frac{d\varphi}{d\Delta} = p, \\ X_y = Y_x = Y_z = Z_y = Z_x = X_z = 0, \end{cases} \tag{2}$$

d. h. die Spannungsdyade bestimmt einen in jeder Richtung gleichmässig wirkenden „*Flüssigkeitsdruck*“ p. Man erhält dasselbe Resultat auch direkter[148]), wenn man mit Hilfe der Relation (vgl. Nr. **2**, (8′))

$$\delta\Delta = \Delta \cdot \left(\frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z} \right)$$

die Variation des Gesamtpotentiales $\iiint \varphi dV_0$ bestimmt und sie dem Ausdruck Nr. **3**, (1) der virtuellen Arbeit gleich setzt. — Diese Überlegungen gelten sowohl für die Hydrostatik als für die Hydrodynamik; durch Einsetzen von (2) in die Gleichungen von Nr. **3**c bzw. Nr. **5**a ergeben sich die bekannten Grundgleichungen.

Die Gleichung (1) erscheint in der Hydrodynamik gewöhnlich in einer etwas anderen Gestalt. Da nämlich Δ umgekehrt proportional der Dichte ϱ des Mediums ist (Nr. **2**, (7)), so kann man sagen, dass sie φ als Funktion von ϱ giebt, und damit ist nach (2) auch der Druck als Funktion von ϱ gegeben:

$$p = \frac{d\varphi}{d\Delta} = p(\varrho); \tag{3}$$

umgekehrt ist durch (3) auch die Relation (1) im wesentlichen bestimmt. In der Form (3) wird die „Zustandsgleichung“ der Hydrodynamik gewöhnlich gegeben[149]).

---

[146] *Lagrange*, Méc. anal., 1. part., sect. VIII, Nr. **1**

[147] *J. Hadamard*, Leçons sur la propagation des ondes (Paris 1903), p. 247 ff.

[148] Dies ist im wesentlichen das Verfahren von *Lagrange*[146]); vgl. auch sect. VII, Nr. 11.

[149] Vgl. die näheren Angaben in IV 15, Nr. **5**, *Love*.

which allow for arbitrary finite deformations; they are characterized in this way, that only work must be expended for such deformations which are related to the volume dilatation or compression of the smallest particles[146]), and that the energy density φ depends consequently only on the current volume dilatation measured by the Jacobian Δ at every point[147]):

$$\varphi = \varphi(\Delta) \tag{1}$$

Since Δ is as an orthogonal invariant of the deformation, a function of the quantities A, B, C (No. **9**, (4a)) ($\Delta^2 = 1 + 2A + 4B + 8C$), (1) is in fact only a special case of the ansatz (4) of No. **9**. From No. **7**, (5) the components of the internal stress related to this potential easily emerge as:

$$\begin{cases} X_x = Y_y = Z_z = \frac{d\varphi}{d\Delta} = p, \\ X_y = Y_x = Y_z = Z_y = Z_x = X_z = 0, \end{cases} \tag{2}$$

i. e. the stress dyad determines a "*fluid pressure*" p acting uniformly in every direction. One obtains the same result also more directly[148]), when one determines with the help of the relation (cf. No. **2**, (8′))

$$\delta\Delta = \Delta \cdot \left(\frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z}\right)$$

the variation of the total potential $\iiint \varphi dV_0$ and by equating [the variation] with the expression No. **3**, (1) of the virtual work. — These considerations are valid both for hydrostatics and for hydrodynamics; Using (2) in the equations of No. **3**c and No. **5**a, respectively, the well-known fundamental equations are obtained.

In hydrodynamics, equation (1) appears usually in a slightly different form. Since Δ is namely inversely proportional to the density ϱ of the medium (No. **2**, (7)), one can say, that [equation (1)] gives φ as a function of ϱ, so that according to (2) also the pressure is given as a function of ϱ:

$$p = \frac{d\varphi}{d\Delta} = p(\varrho); \tag{3}$$

the other way round, using (3), also the relation (1) is determined essentially. Usually, the "equation of state" of hydrodynamics is given in the form (3)[149]).

---

[146] *Lagrange*, Méc. anal., 1. part., sect. VIII, No. **1**

[147] *J. Hadamard*, Leçons sur la propagation des ondes (Paris 1903), p. 247 ff.

[148] This is basically the procedure of *Lagrange*[146]); cf. also sect. VII, No. 11.

[149] Cf. the details in IV 15, No. **5**, *Love*.

Eine grosse Rolle spielt bekanntlich der Fall der *inkompressiblen Flüssigkeit*, die durch die Nebenbedingung

$$\Delta = 1 \tag{4}$$

charakterisiert ist. Für ein solches Medium verliert die Zustandsgleichung (1) ihre Bedeutung; approximiert man es aber nach Nr. **8**b durch ein „nahezu inkompressibles" Medium, so wird der Druck $p = \frac{d\varphi}{d\Delta}$ in der Grenze zum Lagrangeschen Faktor der Gleichung (4), wenn man sie direkt als Nebenbedingung dem Prinzip der virtuellen Arbeit oder dem d'Alembertschen Prinzip hinzufügt, in das dann freilich nur noch äussere bzw. Trägheitskräfte, keine inneren Spannungen mehr eingehen[150]).

Die üblichen Darstellungen der Hydrodynamik gehen meist nicht von dieser Auffassung der Flüssigkeitsbewegung als einer der Elastizitätslehre einzuordnenden endlichen Deformation aus, sondern stellen die sog. *Euler*sche Auffassung in den Vordergrund, d. h. die Betrachtung des Geschwindigkeitsvektors x', y', z' an jeder Stelle. Der Flüssigkeitsdruck wird dann direkt gemäss den Gleichungen (2) zwischen den Spannungskomponenten definiert[151]) und die Bewegungsgleichungen aus dem d'Alembertschen oder aus dem Gaussschen Prinzip[152])

$$\delta \iiint\limits_{(V)} \tfrac{1}{2}\varrho \sum_{(x,y,z)} (x'' - X)^2 dV - \iiint\limits_{(V)} p \sum_{(x,y,z)} \frac{\partial \delta x''}{\partial x} dV = 0$$

gewonnen — bei Inkompressibilität wird p Lagrangescher Faktor.

Auch speziell der Hydrodynamik hat *P. Duhem*[153]) seinen verallgemeinerten Potentialansatz Nr. **7**, (7) angepasst, indem er die Energiedichte φ von den Dichtigkeiten an beiden betrachteten Stellen und deren Entfernung abhängen lässt; damit umfasst und verallgemeinert er Kräfte, die *H. A. E. Faye* [154]) zur Erklärung der Kometenschweife in Betracht gezogen hat, nämlich Attraktionskräfte, deren Intensität von der Dichte der wirkenden Teilchen abhängt.

11. Innere Reibung und elastische Nachwirkung. Bei *bewegten* elastischen Medien und Flüssigkeiten treten neben den bisher erörterten Spannungen und Drucken noch Zusatzspannungen auf, die

[150] In *Lagranges* Darstellung ist die inkompressible Flüssigkeit das primäre; man vgl. jedoch die Bemerkung in 124) (Nr. **8**).

[151] Das entspricht der Auffassung von *Euler*; vgl. IV 15, Nr. **2**, **8**, *Love*.

[152] Vgl. die ausführliche Darstellung von *A. Brill*, Mechanik raumerf. Massen[64]), p. 84 ff.

[153] *P. Duhem*, Ann. Éc. Norm. (3) 10 (1893), p. 183.

[154] *H. A. E. Faye*, Paris C. R. 47 (1858), p. 939. 1043.

As is generally known, the case of the *incompressible fluid* being characterized by the constraint

$$\Delta = 1 \tag{4}$$

looms large. For such a medium the equation of state (1) looses its meaning; however, if one approximates it according to No. **8**b as a "nearly incompressilbe" medium, the pressure $p = \frac{d\varphi}{d\Delta}$ becomes in the limit the Lagrangian multiplier of equation (4), if one adds [the equation] directly as a constraint to the principle of virtual work or to the principle of d'Alembert, in which then certainly only external and inertial forces and no more internal stresses enter[150]).

The common presentations of hydrodynamics do not start with this perception of the fluid motion as a finite deformation subordinated to the theory of elasticity, but give priority to the so called *Euler*ian perception, i. e. the consideration of the velocity vector x', y', z' at every point. According to the equations (2), the fluid pressure is then directly defined between the stress components[151]) and the equations of motion are gained from the principle of d'Alembert or the principle of Gauss[152])

$$\delta \iiint\limits_{(V)} \tfrac{1}{2}\varrho \sum_{(x,y,z)} (x'' - X)^2 dV - \iiint\limits_{(V)} p \sum_{(x,y,z)} \frac{\partial \delta x''}{\partial x} dV = 0$$

— for incompressibility p becomes a Lagrange multiplier.

Also especially for hydrodynamics *P. Duhem*[153]) has adapted his generalized potential-based approach No. **7**, (7), by letting the energy density φ depend on the densities at both considered points and the distance between them; thereby he includes and generalizes forces, which *H. A. E. Faye* [154]) has taken into consideration for the explanation of the cometary train, in fact, attractive forces, whose intensity depend on the density of the acting particles.

11. Internal friction and elastic hysteresis. For *moving* elastic media and fluids there appear besides the so far discussed stresses and pressures also additional stresses, which

---

[150] In *Lagrange*'s presentation the incompressible fluid is the primitive; however, one cf. the remark in 124) (No. **8**).

[151] This corresponds to the perception of *Euler*; cf. IV 15, No. **2**, **8**, *Love*.

[152] Cf. the extensive presentation of *A. Brill*, Mechanik raumerf. Massen[64]), p. 84 ff.

[153] *P. Duhem*, Ann. Éc. Norm. (3) 10 (1893), p. 183.

[154] *H. A. E. Faye*, Paris C. R. 47 (1858), p. 939. 1043.

durch innere Reibungen hervorgerufen werden, die also von den zeitlichen Ableitungen der Deformationsgrößen abhängen[155]). Verwendet man zur Darstellung der Bewegung nach der sog. Eulerschen Manier die Geschwindigkeitskomponenten als Funktionen des augenblicklichen Ortes jedes Teilchens

$$\mathfrak{u} = x' = \mathfrak{u}(x, y, z; t) \qquad \binom{x, y, z}{\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}}, \tag{1}$$

so können die 9 Ableitungen $x'_a, \dots, z'_c$, die oben (Nr. **6**, S. 640 und Nr. **7**f, S. 657) verwendet wurden, auch ersetzt werden durch die 9 Ableitungen $\mathfrak{u}_x, \mathfrak{u}_y, \dots, \mathfrak{w}_z$ die lineare Funktionen von ihnen sind. Die Funktionen (1) bestimmen die unendlichkleine Deformation, die das Medium vermöge der Bewegung in einem Zeitelement erleidet; die Komponenten der zugehörigen reinen Formänderung (vgl. Nr. **9**, (5)) sind:

$$\mathfrak{e}_x = \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x}, \quad \mathfrak{g}_{yz} = \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial z} \qquad \binom{x, y, z}{\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}}, \tag{2}$$

und von diesen Grössen wird daher die innere Reibung allein abhängen, sofern man analog zu den Verhältnissen bei elastischen Medien annimmt, dass durch Drehgeschwindigkeiten der Teilchen keine Reibungswiderstände entstehen können[156]). Man erkennt übrigens leicht, dass die Komponenten der durch (2) bestimmten symmetrischen Dyade in Bezug auf das a-b-c-Koordinatensystem gerade die zeitlichen Ableitungen der Formänderungskomponenten Nr. **9**, (1), sind.

Die Theorie der Reibungskräfte bei endlichen Deformationen ist bisher nur in der Hydrodynamik vollständig ausgebildet; die Grundannahme dabei ist die der Existenz einer Dissipationsfunktion D, die eine homogene quadratische Funktion der Grössen (2) ist, und die obendrein — entsprechend der isotropen Konstitution der Flüssigkeit — nur von deren Orthogonalinvarianten abhängt[157]):

$$D = a_1(\mathfrak{e}_x + \mathfrak{e}_y + \mathfrak{e}_z)^2 + a_2\left(\mathfrak{e}_x^2 + \mathfrak{e}_y^2 + \mathfrak{e}_z^2 + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{g}_{xy}^2 + \mathfrak{g}_{yz}^2 + \mathfrak{g}_{zx}^2)\right). \tag{3}$$

Nach Nr. **7**f, (29′) und nach Nr. **3**c, (8) werden die zugehörigen, auf den deformierten Zustand bezogenen Spannungskomponenten

$$\begin{cases} X_x^{(1)} = \frac{1}{2} \sum\limits_{(abc)} \frac{\partial D}{\partial x'_a} x_a = \frac{1}{2} \frac{\partial D}{\partial \mathfrak{u}_x} = a_1(\mathfrak{e}_x + \mathfrak{e}_y + \mathfrak{e}_z) + a_2 \mathfrak{e}_x \\ X_y^{(1)} = \frac{1}{2} \sum\limits_{(abc)} \frac{\partial D}{\partial x'_a} y_a = \frac{1}{2} \frac{\partial D}{\partial \mathfrak{u}_y} = \frac{1}{2} a_2 \mathfrak{g}_{xy}, \dots \end{cases} \tag{4}$$

[155] Vgl. die historischen Angaben zu Nr. **12** von IV 15, *Love*.

[156] *G. G. Stokes*, Cambr. Phil. Soc. Trans. 8 (1845) = Math. Phys. Papers I, p. 80.

[157] *W. Voigt*, Kompendium I, p. 462 ff.; einen allgemeineren Ansatz giebt *P. Duhem* Anm. Éc. Norm. (3) 21 (1904), p. 130 ff.

are caused by internal friction, and therefore depend on the time derivatives of the deformation quantities[155]). If one uses the velocity components as functions of the actual position of every particle for the representation of the motion in the sense of Euler

$$(1) \qquad \mathfrak{u} = x' = \mathfrak{u}(x, y, z; t) \qquad \begin{pmatrix} x, y, z \\ \mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w} \end{pmatrix},$$

then the 9 derivatives $x'_a, \ldots, z'_c$, which have been used above (No. **6**, p. 640 und No. **7**f, p. 657) can be substituted by the 9 derivatives $\mathfrak{u}_x, \mathfrak{u}_y, \ldots, \mathfrak{w}_z$ which are linear functions of the former [derivatives]. The functions (1) determine the infinitesimal deformation, which the medium undergoes due to the motion during one time element; the components of the associated pure shape change (cf. No. **9**, (5)) are:

$$(2) \qquad \mathfrak{e}_x = \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x}, \quad \mathfrak{g}_{yz} = \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial z} \qquad \begin{pmatrix} x, y, z \\ \mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w} \end{pmatrix},$$

and from these quantities the internal friction will merely depend on, as long as one considers analogously to the conditions in elastic media, that no frictional resistances can occur due to angular velocities of the particles[156]). By the way, one recognizes easily, that the components of the symmetric dyad determined by (2) with respect to the *a*-*b*-*c*-coordinate system just correspond to the time derivatives of the shape change components of No. **9**, (1).

So far, the theory of friction forces for finite deformations is developed completely only in hydrodynamics; the basic assumption thereby is the one of the existence of a dissipation function D, which is a homogeneous quadratic function of the quantities (2), and which moreover — according to the isotropic constitution of the fluid — depends merely on the orthogonal invariants[157]):

$$(3) \qquad D = a_1(\mathfrak{e}_x + \mathfrak{e}_y + \mathfrak{e}_z)^2 + a_2(\mathfrak{e}_x^2 + \mathfrak{e}_y^2 + \mathfrak{e}_z^2 + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{g}_{xy}^2 + \mathfrak{g}_{yz}^2 + \mathfrak{g}_{zx}^2)).$$

In accordance with No. **7**f, (29′) and No. **3**c, (8) the corresponding stress components with respect to the deformed state become

$$(4) \qquad \begin{cases} X_x^{(1)} = \frac{1}{2} \sum\limits_{(abc)} \frac{\partial D}{\partial x'_a} x_a = \frac{1}{2} \frac{\partial D}{\partial \mathfrak{u}_x} = a_1(\mathfrak{e}_x + \mathfrak{e}_y + \mathfrak{e}_z) + a_2 \mathfrak{e}_x \\ X_y^{(1)} = \frac{1}{2} \sum\limits_{(abc)} \frac{\partial D}{\partial x'_a} y_a = \frac{1}{2} \frac{\partial D}{\partial \mathfrak{u}_y} = \frac{1}{2} a_2 \mathfrak{g}_{xy}, \ldots \end{cases}$$

[155] Cf. the historical details in No. **12** of IV 15, *Love*.

[156] *G. G. Stokes*, Cambr. Phil. Soc. Trans. 8 (1845) = Math. Phys. Papers I, p. 80.

[157] *W. Voigt*, Kompendium I, p. 462 ff.; a more general Ansatz is given by *P. Duhem* Anm. Éc. Norm. (3) 21 (1904), p. 130 ff.

Diese Spannungen treten also als Einfluss der inneren Reibung zu dem Flüssigkeitsdruck hinzu; häufig spezialisiert man die beiden Konstanten noch durch die Annahme, dass das arithmetische Mittel der drei resultierenden Normaldrucke $p + X_x^{(1)}, p + Y_y^{(1)}, p + Z_z^{(1)}$ gleich p ist, was $a_1 = -\frac{a_2}{3}$ ergiebt[158]).

In der eigentlichen Elastizitätslehre hat man die innere Reibung nur erst für unendlichkleine Deformationen in Betracht gezogen. In diesem Falle unterscheiden sich die Grössen $\mathfrak{u}, \ldots; \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x}, \ldots; \mathfrak{e}_x, \ldots; \mathfrak{g}_{xy}, \ldots$ nur durch den Faktor σ von $u', \ldots;$ $u'_a, \ldots; \varepsilon'_a, \ldots; \gamma'_{bc}, \ldots$ (in der Bezeichnung von Nr. **6**, (6) und Nr. **9**, (5)), und demgemäss wird die Dissipationsfunktion eine quadratische, die Spannungskomponenten also lineare Formen der zeitlichen Ableitungen der Formänderungskomponenten der unendlichkleinen Deformation. *W. Voigt*[159]) hat die Abhängigkeiten, die hier auftreten können, eingehend untersucht.

In naher Beziehung zu diesen Ansätzen stehen die Versuche, die Erscheinungen der *elastischen Nachwirkung* im Rahmen der Mechanik der Kontinua theoretisch zu fassen, die freilich bisher an den grossen Komplex der hier zu umspannenden Tatsachen noch nicht vollständig herangekommen sind[160]). Typisch ist hier in erster Linie der Ansatz *L. Boltzmanns*[161]), der den elastischen Spannungskomponenten ein Zeitintegral von der in Nr **6**, (5) erörterten Form hinzufügt; er nimmt dabei — was natürlich nur für unendlichkleine Deformationen gilt — den Integranden als lineare Funktion der Formänderungskomponenten Nr. **9**, (5) an von analoger Form, wie sie die Spannungskomponenten im isotropen Medium haben:

$$(5)\qquad \begin{cases} X_x = \int\limits_{-\infty}^{t} [a_1(t-\tau)\{\varepsilon_a(\tau) + \varepsilon_b(\tau) + \varepsilon_c(\tau)\} + 2a_2(t-\tau)\cdot\varepsilon_a(\tau)]\,d\tau, \\ X_y = \int\limits_{-\infty}^{t} a_1(t-\tau)\gamma_{ab}(\tau)\,d\tau. \end{cases}$$

E. Wiechert[162]) hat diese Formeln durch spezielle Annahmen über die

158 *Stokes*, a. a. O.[156]). Vgl. auch IV 15, *Love*, Nr. **12—14** und für jene Relationen *H. Lamb*, Hydrodynamik (deutsche Ausg. Leipzig 1907), § 314.

159 Abhandl. Ges. d. Wiss. Göttingen 36 (1889); Kompendium I, p. 456 ff., 467 ff.; Lehrbuch der Krystallphysik, Leipzig 1910, p. 792 ff.

160 Vgl. IV 31, Nr. **13** u. **19** (*v. Kármán*).

161 Ann. d. Phys. u. Chem., Ergänzungsb. 7 (1876), p. 630.

162 Ann. d. Phys. (3) 50 (1893), p. 335.

Anyway, these stresses are added to the fluid pressure as influence of the internal friction; often one specifies the two constants in addition with the assumption that the arithmetic average of the three resulting normal pressures $p + X_x^{(1)}$, $p + Y_y^{(1)}$, $p + Z_z^{(1)}$ is equal to p, what results in $a_1 = -\frac{a_2}{3}$ [158]).

In the effective theory of elasticity, so far, one has taken into consideration the internal friction only for infinitesimal deformations. In this case the quantities $\mathfrak{u}, \ldots;$ $\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x}, \ldots;$ $\mathfrak{e}_x, \ldots;$ $\mathfrak{g}_{xy}, \ldots$ and $u', \ldots;$ $u'_a, \ldots;$ $\varepsilon'_a, \ldots;$ $\gamma'_{bc}, \ldots$ (in the notation of No. **6**, (6) and No. **9**, (5)) differ only by the factor σ, and accordingly the dissipation function becomes a quadratic [form and] the stress components [become] consequently linear forms of the time derivatives of the shape change components of the infinitesimal deformation. *W. Voigt*[159]) has thoroughly studied the dependences which can occur here.

In close relation to these approaches are the efforts to theoretically conceive the appearance of the *elastic hysteresis* in the context of the mechanics of continua, which however have not reached yet completely the large set of issues being treated here[160]). Typically is here in the first place the ansatz of *L. Boltzmann*[161]), which adds to the elastic stress components a time integral of the form as discussed in No. **6**, (5); thereby he assumes — what is certainly only valid for infinitesimal deformations — the integrand as linear function of the shape change components No. **9**, (5) to be of similar form as the stress components are in the isotropic medium:

$$(5) \qquad \begin{cases} X_x = \int\limits_{-\infty}^{t} [a_1(t-\tau)\{\varepsilon_a(\tau) + \varepsilon_b(\tau) + \varepsilon_c(\tau)\} + 2a_2(t-\tau)\cdot\varepsilon_a(\tau)]d\tau, \\ X_y = \int\limits_{-\infty}^{t} a_1(t-\tau)\gamma_{ab}(\tau)d\tau. \end{cases}$$

E. Wiechert[162]) has developed these formulas by special assumptions on the

[158] *Stokes*, op. cit.[156]). Cf. also IV 15, *Love*, No. **12—14** and for the latter relation *H. Lamb*, Hydrodynamik (German edition Leipzig 1907), § 314.

[159] Abhandl. Ges. d. Wiss. Göttingen 36 (1889); Kompendium I, p. 456 ff., 467 ff.; Lehrbuch der Krystallphysik, Leipzig 1910, p. 792 ff.

[160] Cf. IV 31, No. **13** and **19** (*v. Kármán*).

[161] Ann. d. Phys. u. Chem., Ergänzungsb. 7 (1876), p. 630.

[162] Ann. d. Phys. (3) 50 (1893), p. 335.

Funktionen a_1, a_2 von $t - \tau$ ausgestaltet. Eine Reihe hierin gehöriger Probleme hat neuerdings *V. Volterra* behandelt[163]) (vgl. S. 641).

Für den Fall bleibender Formänderungen, für plastische Medien also, haben *A. Haar* und *Th. v. Kármán*[164]) aus ganz andern Gesichtspunkten Ansätze abgeleitet. Sie gehen aus von dem Variationsprinzip Nr. **7**, (23), in dem (vgl. S. 655) für isotrope Medien H die Energiedichte und gleich einer homogenen quadratischen Funktion der ersten beiden Orthogonalinvarianten der (symmetrischen) Spannungsdyade wird:

$$(6) \qquad 2H = a_1(X_x + Y_y + Z_z)^2 + a_2(X_y^2 + Y_z^2 + Z_x^2 - X_xY_y - Y_yZ_z - Z_zX_x)$$

Zu diesem Variationsproblem mit seinen drei Nebenbedingungen (23a), Nr. **7** tritt nun als die für plastische Medien charakteristische Eigenschaft die Bedingung hinzu, dass die grösste irgendwo auftretende Schubspannung einen festen Wert K nicht überschreitet, d. h. dass die Differenzen je zweier Wurzeln der Gleichung

$$\begin{vmatrix} X_x - \Lambda, & X_y, & X_z \\ Y_x, & Y_y - \Lambda & Y_z \\ Z_x, & Z_y & Z_z - \Lambda \end{vmatrix} = 0$$

absolut genommen unterhalb K bleiben:

$$(7) \qquad |\Lambda_1 - \Lambda_2| \leqq K, \quad |\Lambda_2 - \Lambda_3| \leqq K, \quad |\Lambda_1 - \Lambda_3| \leqq K.$$

Eine Lösung dieses Variationsproblemes mit drei Gleichungs- und drei Ungleichungsnebenbedingungen wird in verschiedenen Teilgebieten verschiedene Eigenschaften haben, je nachdem für sie in den Bedingungen (7) das Gleichheits- oder Ungleichheitszeichen gilt. Gelten alle drei Ungleichheitszeichen, so kommt man auf die Gleichgewichtsbedingungen der gewöhnlichen Elastizitätstheorie zurück, andernfalls kommt man auf neue charakteristische „halbplastische“ oder „vollplastische“ Zustände.

Prinzipiell wäre es ein leichtes, diesen Ansatz auf *sandartige Massen (Erddrucktheorie)* zu übertragen; an Stelle von (7) treten als Nebenbedingungen andere Ungleichungen, die ausdrücken, dass die Richtung der Spannung auf jedes Flächenelement nicht ausserhalb eines gewissen „Reibungskegels“ fällt. Indessen fehlt es hier an sicherer Kenntnis eines Ausdruckes (6) der Verzerrungsenergie, so dass dieser Ansatz zunächst nur in dem extremen Fall brauchbar ist,

[163] Rom. Acc. Linc. Rend. (5) 18, 2 (1909), p. 295, 577; (19) 1 (1910), p. 107, 239; (22) 1 (1913), p. 529. Acta math. 35 (1912), p. 295.

[164] Gött. Nachr., math.-phys. Kl., 1909, p. 212.

functions a_1, a_2 of $t - \tau$. A series of problems, belonging here, has been treated recently by *V. Volterra*[163]) (cf. p. 641).

For the case of remaining shape changes, i. e. for plastic media, *A. Haar* and *Th. v. Kármán*[164]) have formulated the foundations concerning completely different aspects. They start with the variational principle No. **7**, (23), in which (cf. p. 655) H corresponds for isotropic media to the energy density and becomes a homogeneous quadratic function of the first two orthogonal invariants of the (symmetric) stress dyad:

$$(6) \qquad 2H = a_1(X_x + Y_y + Z_z)^2 + a_2(X_y^2 + Y_z^2 + Z_x^2 - X_xY_y - Y_yZ_z - Z_zX_x)$$

To this variational problem with its three constraints (23a), No. **7**, as characteristic property for plastic media, now the condition is added, that the largest shear stress appearing somewhere does not exceed a constant value K, i. e. that the differences between each of two roots of the equation

$$\begin{vmatrix} X_x - \Lambda, & X_y, & X_z \\ Y_x, & Y_y - \Lambda & Y_z \\ Z_x, & Z_y & Z_z - \Lambda \end{vmatrix} = 0$$

remain in absolute value below K:

$$(7) \qquad |\Lambda_1 - \Lambda_2| \leqq K, \quad |\Lambda_2 - \Lambda_3| \leqq K, \quad |\Lambda_1 - \Lambda_3| \leqq K.$$

A solution of this variational problem with three equality and three inequality constraints will have various properties in various cases, depending on whether in the conditions (7) the equalities or inequalities hold. If all three inequalities hold, then one comes back to the common theory of elasticity, otherwise one arrives at the newly characteristic "semi-plastic" or "fully-plastic" states.

Basically, it would be a simple task to transfer this ansatz to *sandy matter (theory of lateral earth pressure)*; in place of (7) other inequalities appear as constraints[. Inequalities] which express that the direction of the stress at every surface element lies not outside a certain "cone of friction". Meanwhile, there is missing here reliable information about the expression (6) of the deformation energy, such that this ansatz is so far only useful in the extreme case,

---

163 Rom. Acc. Linc. Rend. (5) 18, 2 (1909), p. 295, 577; (19) 1 (1910), p. 107, 239; (22) 1 (1913), p. 529. Acta math. 35 (1912), p. 295.

164 Gött. Nachr., math.-phys. Kl., 1909, p. 212.

wo zwei der Ungleichheitsnebenbedingungen als Gleichungen erfüllt sind; dann resultieren nämlich Differentialgleichungen, die von der speziellen Form des Energieausdruckes unabhängig sind[165]).

12. Kapillarität. Die Phänomene der Kapillarität enthalten den zuletzt betrachteten Erscheinungen gegenüber insofern ein wesentlich neues Moment, als sie an das Auftreten von *Grenzflächen* verschiedenartiger Medien gegeneinander geknüpft sind. Demgemäss wird man, sofern man an der Existenz eines Potentiales festhält, die Kapillaritätswirkungen aus einem Potentialbestandteil der Gestalt (6) von Nr. **7**a, nämlich einem Integral über jene Grenzflächen herleiten:

$$\Phi = \iint\limits_{(S)} \bar{\psi}\, dS = \iint\limits_{(S_0)} \psi\, dS_0. \tag{1}$$

Der Ansatz für $\bar{\psi}$, den *Gauss*[166]) durch den oben (S. 647)[93]) angedeuteten Grenzübergang hergeleitet hat, ist, dass ψ nur von der Beschaffenheit der aneinandergrenzenden Medien, nicht von den Deformationsfunktionen abhängt; dann wird, falls nur homogene Medien auftreten, Φ gleich einem linearen Aggregat der Inhalte $S_1, S_2, \ldots$ der verschiedenen Grenzflächen (im deformierten Zustande)[167]):

$$\Phi = C_1 S_1 + C_2 S_2 + \cdots. \tag{2}$$

Die Umformung von $\delta\Phi$ auf die Gestalt Nr. **3**e, (15) ergibt die folgenden Wirkungen: eine innerhalb der Fläche S_i senkrecht zu jedem Linienelement ds wirkende Spannung $C_i\, ds$, die nur an den Grenzkurven der Flächenteile S_i, zur Geltung kommt, und eine normal zu jedem inneren Flächenelement gerichtete und bis auf den Faktor $2C_i$ seiner mittleren Krümmung gleiche Druckkraft.[168])

Will man den Ansatz (1) enger mit der sonst im Vordergrunde stehenden Vorstellung räumlicher Verteilung der Energie verknüpfen, als es durch die S. 646 erwähnte rechnerische Transformation des Flächenintegrales in ein Raumintegral geschehen kann, so gelingt das

---

[165] *Haar* u. v. Kármán a. a. O.[164]), S. 217. Über die Erddrucktheorie vgl. IV 27 (*Reissner*), im übrigen ausser der dort gegebenen Litteratur auch *J. Sylvester* Phil. Mag. (4) 20 (1860), p. 489 = Collected Papers, vol. 2, Cambridge 1908, p. 215 und *J. Massau*, Mémoire sur l'intégration graphique des équations aux dérivées partielles, fasc. 2 et 3. Mons 1902 und 1904. (Extrait des Annales des Ingénieurs sortis des Écoles spéciales de Gand.)

[166] *C. F. Gauss*, Princ. generalia theoriae figurae fluiderum Comment. soc. reg. scient. Gotting. recent. 7 (1830) = Werke V, p. 29.

[167] A. a. O. Nr. **18**.

[168] Vgl. die ausführliche Darstellung dieser Entwicklung in V 9, Nr. **2** ff. (*Minkowski*).

where two of the inequality constraints hold as equality; then [this] results namely in differential equations which are independent of the special form of the energy expression[165]).

12. Capillarity. The phenomena of capillarity include in contrast to the lastly considered phenomena insofar an essential new aspect, as they are related to the occurrence of *interfaces* of various media against each other. Hence, one will, as long as one holds on to the existence of a potential, derive the effects of capillarity from a potential constituent of the form (6) of No. **7**a, namely from an integral over those interfaces:

$$\Phi = \iint\limits_{(S)} \bar{\psi}\, dS = \iint\limits_{(S_0)} \psi\, dS_0. \tag{1}$$

The ansatz for $\bar{\psi}$, which *Gauss*[166]) has derived by the above (p. 647)[93]) mentioned limit process, is, that ψ depends not on the deformation functions but only on the constitution of the media adjacent to one another; then, when only homogeneous media occur, Φ is equal to a linear aggregate of the areas $S_1, S_2, \ldots$ of the various interfaces (in the deformed state)[167]):

$$\Phi = C_1 S_1 + C_2 S_2 + \cdots . \tag{2}$$

The transformation of $\delta\Phi$ into the form No. **3**e, (15) leads to the following efforts: a stress $C_i\, ds$ which appears only on the boundary curves of the surface patches S_i [and which] acts within the surface S_i orthogonally to every line element ds, and a pressure force, oriented normally to each internal surface element, [which is] up to the factor $2C_i$ equal to its mean curvature.[168])

If one likes to relate the ansatz (1) closer to the usually prior perception of a spatially distributed energy, as it can be achieved by the computational transformation of the surface integral into a volume integral mentioned on p. 646, then one succeeds

---

[165] *Haar* and v. Kármán op. cit.[164]), p. 217. On the theory of lateral earth pressure cf. IV 27 (*Reissner*), besides the literature given there [cf.] also *J. Sylvester* Phil. Mag. (4) 20 (1860), p. 489 = Collected Papers, vol. 2, Cambridge 1908, p. 215 and *J. Massau*, Mémoire sur l'intégration graphique des équations aux dérivées partielles, fasc. 2 et 3. Mons 1902 and 1904. (Extrait des Annales des Ingénieurs sortis des Écoles spéciales de Gand.)

[166] *C. F. Gauss*, Princ. generalia theoriae figurae fluiderum Comment. soc. reg. scient. Gotting. recent. 7 (1830) = Werke V, p. 29.

[167] Op. cit. No. **18**.

[168] Cf. the extensive presentation of this derivation in V 9, No. **2** ff. (*Minkowski*).

mit Hilfe eines Grenzüberganges, der dem in Nr. **8** zu verwandten Zwecken benutzten analog ist.[169]) Beschränkt man sich der Einfachheit halber auf ein System von zwei durch die Fläche S getrennten Medien, die die Raumteile V_1, V_2 erfüllen, so kann man an seine Stelle setzen den den tatsächlichen Verhältnissen näher kommenden Fall *eines* Kontinuums, dessen Zustand sich stetig, aber in der Nähe von S ausserordentlich rasch ändert und das als abstrakten Grenzfall jenes System aus zwei Medien einschließt. Die Energiedichte φ eines solchen Mediums wird (vgl. Nr. **7**a, S. 645) auch von den lokalen Ableitungen der Deformationsgrössen, d. h. von den zweiten Ableitungen der Funktionen $x(a, b, c), \dots$ abhängen; man wird diese Abhängigkeit nur in einem kleinen S umschliessenden Gebiete $V^{(\varepsilon)}$ zu berücksichtigen brauchen, während in den Restgebieten $V_1^{(\varepsilon)}$ und $V_2^{(\varepsilon)}$ die Betrachtung der Abhängigkeit von den Deformationsgrössen erster Ordnung genügt. Approximiert man nun mit dem so beschriebenen Kontinuum das ursprüngliche System, indem man $V^{(\varepsilon)}$ sich unbegrenzt um S zusammenziehen und gleichzeitig $V_1^{(\varepsilon)}, V_2^{(\varepsilon)}$ gegen V_1, V_2 konvergieren lässt, so wird in der Grenze bei passender Verfügung über φ im Gesamtpotential neben dem räumlichen Potential von V_1 und V_2 gerade ein Flächenintegral vom Typus (1) auftreten. Lässt man speziell, was von dem Ansatz Nr. **10**, (1) der Hydrodynamik aus naheliegt, φ innerhalb $V^{(\varepsilon)}$ von der Ableitung $\frac{\partial \varrho}{\partial n}$ der Dichte normal zu einem $V^{(\varepsilon)}$ erfüllenden System von Parallelflächen zu S abhängen, setzt also etwa $\varphi = C \cdot \frac{\partial \varrho}{\partial n}$, so tritt im Limes

$$C \cdot \iint\limits_{(S)} (\varrho_1 - \varrho_2) dS$$

zum Potential hinzu, wobei ϱ_1, ϱ_2 die Randwerte der Dichte in V_1, V_2 sind — d. i. bei konstanten Dichten gerade die Form (2). Für die genaue Durchführung dieses Ansatzes ist natürlich wieder (vgl. S. 660) Vorbedingung, dass die Gleichgewichtslage des approximierenden Systems in ihrer Abhängigkeit von dem Parameter ε untersucht ist.

13. Optik. Um die optischen Erscheinungen dem Schema der allgemeinen Mechanik der Kontinua einzufügen, sieht man bekanntlich die Komponenten u, v, w des *Lichtvektors* als Verschiebungskomponenten der Teilchen eines deformierbaren raumerfüllenden Me-

[169] Für die folgende Darstellung vgl. eine Bemerkung am Anfang der Nr. **5** in *H. Minkowskis* Referat V 9; den gleichen Weg hat D. Hilbert in einer Göttinger Vorlesung im W.-S. 1906/07 eingeschlagen.

with the help of a limit process, which is similar to the one being used in No. **8** for related purposes.[169]) By restricting oneself for the sake of simplicity to a system with two media divided by a surface S, [media] which occupy the spatial parts V_1, V_2, one can substitute [the system] with *one* continuum representing the actual circumstances better[. One continuum] whose state changes continuously, but in the neighborhood of S extraordinary fast and which includes as an abstract limit the system of the two media. The energy density φ of such a medium (cf. No. **7**a, p. 645) will depend also on the local derivatives of the deformation quantities, i. e. on the second derivatives of the functions $x(a, b, c), \ldots$; one will need to consider this dependence only in a small region $V^{(\varepsilon)}$ which surrounds S, while in the remaining domains $V_1^{(\varepsilon)}$ and $V_2^{(\varepsilon)}$ the consideration of the dependence on the deformation quantities of first order is enough. If one approximates now with such a described continuum the original system, by contracting $V^{(\varepsilon)}$ around S indefinitely and simultaneously by letting $V_1^{(\varepsilon)}, V_2^{(\varepsilon)}$ converge to V_1, V_2, then by appropriately controlling φ there will appear in the total potential besides the spatial potential V_1 and V_2 just a surface integral of the kind (1). If within $V^{(\varepsilon)}$, what from the ansatz No. **10**, (1) of hydrodynamics immediately suggests itself, one specially lets φ depend on the derivatives $\frac{\partial \varrho}{\partial n}$ of the density normal to a system of parallel surfaces to S occupying $V^{(\varepsilon)}$, by setting something like $\varphi = C \cdot \frac{\partial \varrho}{\partial n}$, then in the limit

$$C \cdot \iint\limits_{(S)} (\varrho_1 - \varrho_2) dS$$

is added to the potential, whereby ϱ_1, ϱ_2 are the boundary conditions of the densities in V_1, V_2 — this corresponds for constant densities just to the form (2). For the specific computation of this Ansatz, certainly there is again (cf. p. 660) the assumption, that the dependence of the equilibrium position of the approximated system on the parameter ε is studied.

13. Optics. In order to introduce the optical phenomena within the scheme of the general mechanics of continua, one considers as is well known the components u, v, w of the *light vector* as displacement components of particles of a deformable space-occupying me-

[169] For the following presentation cf. a note at the beginning of No. **5** in *H. Minkowskis* paper V 9; the same procedure has been followed by D. Hilbert in a Göttinger Vorlesung in the winter term 1906/07.

diums (*Lichtäther*) an; es genügt für die Zwecke der Optik, wenn man sich dabei auf unendlichkleine Deformation beschränkt.[170]) Bei dieser Auffassung ist es aber keinesfalls erforderlich, dem Lichtäther — wie in der eigentlichen elastischen Lichttheorie — die Eigenschaften eines elastischen Mediums im engeren Sinne zuzuschreiben; vielmehr erhält man die richtigen Formeln der Optik gerade dann in einfachster Weise, wenn man nicht den Komponenten der reinen Formänderung (Nr. **9**, (5)), sondern denen der Rotation der Volumelemente

$$(1) \qquad \tfrac{1}{2}\xi = \tfrac{1}{2}\Big(\frac{\partial w}{\partial b} - \frac{\partial v}{\partial c}\Big), \quad \tfrac{1}{2}\eta = \tfrac{1}{2}\Big(\frac{\partial u}{\partial c} - \frac{\partial w}{\partial a}\Big), \quad \tfrac{1}{2}\zeta = \tfrac{1}{2}\Big(\frac{\partial v}{\partial a} - \frac{\partial u}{\partial b}\Big)$$

die bestimmende Rolle für den Wert der Deformationsenergie zuschreibt. Diesen Gedanken hat zuerst *J. Mac Cullagh*[171]) durchgeführt, und es gelang ihm auf diese Weise nicht nur, die Differentialgleichungen, sondern auch — über die elastische Lichttheorie hinaus — die richtigen Grenzbedingungen der Optik zu gewinnen.

Für *isotrope durchsichtige Medien* besteht *Mac Cullagh*s Ansatz darin, im Lichtäther eine Energiedichte proportional dem Quadrate des Betrages des Rotationsvektors (1) anzunehmen[172]):

$$(2) \qquad \varphi = \frac{1}{2}A(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = \frac{1}{2}A \sum_{\binom{abc}{uvw}} (w_b - v_c)^2.$$

Dann folgt aus Nr. **9**, (6) für die Spannungskomponenten

$$X_a = Y_b = Z_c = 0$$
$$Z_b = -Y_c = A\xi,\ X_c = -Z_a = A\eta,\ Y_a = -X_b = A\zeta,$$

und die Gleichungen Nr. **5**, (2) für den Bewegungszustand lauten daher

$$(3a) \qquad \varrho u'' = A\Big(\frac{\partial \eta}{\partial c} - \frac{\partial \zeta}{\partial b}\Big) = A\Big(\Delta u - \frac{\partial(u_a + v_b + w_c)}{\partial a}\Big) \quad \begin{pmatrix} u,v,w \\ a,b,c \\ \xi,\eta,\zeta \end{pmatrix};$$

das sind, wenn man noch die Bedingung $u_a + v_b + w_c = 0$ der Inkompressibilität hinzufügt, genau die Schwingungsgleichungen der Optik. Ebenso aber sind die Randbedingungen der Optik in den Randbedingungen enthalten, die sich analog Nr. **3**c, (5b) ergeben und die z. B. für die Grenzfläche zweier Medien mit verschiedenen Konstanten A

---

[170] Von der Hinzufügung des unendlichkleinen Faktors σ wird im folgenden der Kürze halber abgesehen.

[171] *Mac Cullagh*, An essay towards a dynam. theory of cryst. reflexion and refraction, Trans. Roy. Irish Acad., 21 (1839) = Coll. Works (Dublin 1880), p. 145. — Vgl. auch V 21, Nr. **24** (*Wangerin*) und V 22, Nr. **1** (*W. Wien*).

[172] Vgl. auch die Darstellung von *W. Voigt*, Kompendium II, p. 563.

dium (*light ether*); it is enough for the purposes of optics to restrict oneself thereby to infinitesimal deformations.[170]) For this perception it is not at all necessary, to attribute to the light ether — as in the effective elastic theory of light — the property of an elastic medium in the narrower sense; on the contrary one obtains the correct formulas of optics just then in the most simple way, when one does not attribute to the components of the pure shape change (No. **9**, (5)) but to the one of the rotation of the volume elements

$$\text{(1)} \qquad \tfrac{1}{2}\xi = \tfrac{1}{2}\Big(\frac{\partial w}{\partial b} - \frac{\partial v}{\partial c}\Big), \quad \tfrac{1}{2}\eta = \tfrac{1}{2}\Big(\frac{\partial u}{\partial c} - \frac{\partial w}{\partial a}\Big), \quad \tfrac{1}{2}\zeta = \tfrac{1}{2}\Big(\frac{\partial v}{\partial a} - \frac{\partial u}{\partial b}\Big)$$

the determining role for the value of the deformation energy. This idea originates from *J. Mac Cullagh*[171]), and he succeeded in this manner not only to achieve the differential equations, but also — beyond the elastic theory of light — [to achieve] the correct boundary conditions of optics.

For *isotropic transparent media Mac Cullagh*'s Ansatz lies therein to assume an energy density proportional to the squares of the absolute value of the rotation vector (1) within the light ether[172]):

$$\text{(2)} \qquad \varphi = \frac{1}{2}A(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = \frac{1}{2}A \sum_{\binom{abc}{uvw}} (w_b - v_c)^2.$$

Then it follows from No. **9**, (6) for the stress components

$$X_a = Y_b = Z_c = 0$$
$$Z_b = -Y_c = A\xi,\ X_c = -Z_a = A\eta,\ Y_a = -X_b = A\zeta,$$

and the equations No. **5**, (2) for the motion reads therefore as

$$\text{(3a)} \qquad \varrho u'' = A\Big(\frac{\partial \eta}{\partial c} - \frac{\partial \zeta}{\partial b}\Big) = A\Big(\Delta u - \frac{\partial(u_a + v_b + w_c)}{\partial a}\Big) \qquad \begin{pmatrix} u, v, w \\ a, b, c \\ \xi, \eta, \zeta \end{pmatrix};$$

which are, when one adds the condition $u_a + v_b + w_c = 0$ of the incompressibility, precisely the oscillation equations of optics. Likewise, the boundary conditions of optics are included in the boundary conditions, which are obtained similarly to No. **3**c, (5b) and which express for instance for the interface between two media with different constants A,

[170] In what follows, we refrain for the sake of brevity from adding the infinitesimal factor σ.

[171] *Mac Cullagh*, An essay towards a dynam. theory of cryst. reflexion and refraction, Trans. Roy. Irish Acad., 21 (1839) = Coll. Works (Dublin 1880), p. 145. — Cf. also V 21, No. **24** (*Wangerin*) and V 22, No. **1** (*W. Wien*).

[172] Cf. also the presentation of *W. Voigt*, Kompendium II, p. 563.

aussagen, dass die für beide gebildeten Ausdrücke

$$A(\eta \cos nc - \zeta \cos nb) \qquad \begin{pmatrix} \xi, \eta, \zeta \\ a, b, c \end{pmatrix} \tag{3b}$$

übereinstimmen.

Das Integral der Energiedichte (2) gestattet eine Transformation, der zufolge es bis auf Randintegrale mit dem Raumintegral von

$$\frac{1}{2} A \sum_{\binom{uvw}{abc}} \left\{ (w_b + v_c)^2 - 4 v_b w_c \right\}$$

übereinstimmt, d. i. aber die Energiedichte eines rein elastischen isotropen Mediums, dessen Lameésche Konstanten λ, μ in der Beziehung $\lambda = -2\mu = -2A$ stehen. Ein Medium dieser Konstitution gerade hat *W. Thomson* (Lord *Kelvin*) zur Erklärung der optischen Phänomene herangezogen[173])

Mac Cullagh hat seinen Ansatz insbesondere für die Optik *kristallinischer Medien* durchgeführt, indem er φ gleich einer quadratischen Form von ξ, η, ζ (mit konstanten Koeffizienten)[174]) setzt:

$$2\varphi = A_{11}\xi^2 + 2A_{12}\xi\eta + \cdots + 2A_{23}\eta\zeta + A_{33}\zeta^2. \tag{4}$$

Ganz analog wie oben folgen dann als Differentialgleichungen

$$\varrho u'' = \frac{\partial \mathsf{H}}{\partial c} - \frac{\partial \mathsf{Z}}{\partial b}, \text{ wo } \Xi = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \qquad \begin{pmatrix} \Xi, \mathsf{H}, \mathsf{Z} \\ u, v, w \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \xi, \eta, \zeta \\ a, b, c \end{pmatrix} \tag{4a}$$

während in den Randbedingungen die Ausdrücke auftreten:

$$\mathsf{H} \cos nc - \mathsf{Z} \cos nb. \qquad \begin{pmatrix} \Xi, \mathsf{H}, \mathsf{Z} \\ a, \ b, \ c \end{pmatrix} \tag{4b}$$

E. und *F. Cosserat* haben darauf hingewiesen[175]), daß ihr „Euklidisches Potential" auch diese *Mac Cullagh*schen Ansätze umfaßt.

Man kann auf dieser Grundlage versuchen, durch Erweiterung des Potentialansatzes nach einer der in Nr. **7** erörterten Richtungen die sämtlichen für die verschiedenen optischen Probleme notwendigen Gleichungen zu umfassen; in dieser Weise ist *W. Voigt* in seinem Kompendium[176]) systematisch vorgegangen.

In erster Linie gewinnt er den Übergang zu der *Abhängigkeit der optischen Erscheinungen von der Farbe* (Schwingungsdauer τ), indem

---

[173] *W. Thomson*, Phil. Mag. (5) 26 (1888), p. 414 ff. Vgl. auch V 21, Nr. **31** (*Wangerin*).

[174] Vgl. *Mac Cullagh*, works[171]), p. 156, wo (4) sogleich auf eine Summe von Quadraten transformiert erscheint. Siehe auch die Darstellung in *P. Volkmann*, Vorles. über die Theorie des Lichtes, Leipzig 1891, p. 260, 294.

[175] *E.* und *F. Cosserat*, Corps déform., p. 151.

[176] S. namentlich V. Teil (Optik), § 7 (Bd. II, p. 563 ff.) sowie Kap. II, III dieses Teiles und vgl. auch II. Teil, § 34 (Band I, p. 486 ff.), wo die Kraftwirkungen direkt ohne Vermittlung eines Potentiales angesetzt werden.

that both generated expressions

$$\text{(3b)} \qquad A(\eta \cos nc - \zeta \cos nb) \qquad \begin{pmatrix} \xi, \eta, \zeta \\ a, b, c \end{pmatrix}$$

coincide.

The integral of the energy density (2) allows for a transformation, by virtue of which [the result] coincides up to a boundary integral with the volume integral of

$$\frac{1}{2} A \sum_{\binom{u\,v\,w}{a\,b\,c}} \left\{ (w_b + v_c)^2 - 4 v_b w_c \right\},$$

but this is the energy density of a purely elastic isotropic medium, whose Lamé parameters λ, μ are related according to $\lambda = -2\mu = -2A$. *W. Thomson* (Lord *Kelvin*) has used a medium of just this constitution for the explanation of optical phenomena[173])

Mac Cullagh has carried out his ansatz in particular for the optics of *crystalline media*, by setting φ equal to a quadratic form of ξ, η, ζ (with constant coefficients)[174]):

$$\text{(4)} \qquad 2\varphi = A_{11}\xi^2 + 2A_{12}\xi\eta + \cdots + 2A_{23}\eta\zeta + A_{33}\zeta^2.$$

Completely analogous as above the differential equations follow as

$$\text{(4a)} \qquad \varrho u'' = \frac{\partial \mathsf{H}}{\partial c} - \frac{\partial \mathsf{Z}}{\partial b}, \text{ where } \Xi = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \qquad \begin{pmatrix} \Xi, \mathsf{H}, \mathsf{Z} \\ u, v, w \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \xi, \eta, \zeta \\ a, b, c \end{pmatrix}$$

while in the boundary conditions the [subsequent] expressions appear:

$$\text{(4b)} \qquad \mathsf{H} \cos nc - \mathsf{Z} \cos nb. \qquad \begin{pmatrix} \Xi, \mathsf{H}, \mathsf{Z} \\ a,\ b,\ c \end{pmatrix}$$

E. und *F. Cosserat* have indicated[175]), that their "euclidean potential" includes also these fundamental approaches of *Mac Cullagh*.

Based on this foundation, one can try, with an enhancement of the potential-based approach according to the direction discussed in No. **7**, to include all equations required for the various optical problems; in this way *W. Voigt* proceeded systematically in his Kompendium.[176])

In the first place, he gains the transition to the *dependence of the optical appearance of the color* (oscillation duration τ), by

---

[173] *W. Thomson*, Phil. Mag. (5) 26 (1888), p. 414 ff. Cf. also V 21, No. **31** (*Wangerin*).

[174] Cf. *Mac Cullagh*, works[171]), p. 156, where (4) readily emerges as a sum of squares. See also the presentation in *P. Volkmann*, Vorles. über die Theorie des Lichtes, Leipzig 1891, p. 260, 294.

[175] *E.* und *F. Cosserat*, Corps déform., p. 151.

[176] See particularly V. Teil (Optik), § 7 (Bd. II, p. 563 ff.) as well as Kap. II, III of this part and cf. also II. Teil, § 34 (Band I, p. 486 ff.), where the force effects are formulated directly without the communication of a potential.

er den Gliedern von (4) ebenso gebildete quadratische Formen der zeitlichen Ableitungen ξ', η', ζ' oder ξ'', η'', ζ'' usw. hinzufügt, freilich unter gleichzeitiger Beschränkung darauf, dass der Lichtvektor durchweg Sinusschwingungen mit der Periode τ ausführt. Er verwendet nun das Hamiltonsche Prinzip in der Form Nr. **7**, (25), und kann durch partielle Integration nach der Zeit diese Zusatzglieder derart umformen[177]), dass schliesslich wiederum eine quadratische Form von ξ, η, ζ genau wie (4) die Stelle der Energiedichte einnimmt, nur daß ihre Koeffizienten A nun *Funktionen von* τ sind; die Art dieser Funktionen hängt von dem Medium ab und bestimmt sein Verhalten gegenüber den verschiedenen Farben.

In ähnlicher Weise zieht *Voigt* auch quadratische mit zeitlichen Ableitungen verschiedener Ordnung der ξ, η, ζ gebildete Terme heran und zeigt, dass man sie auf *einen* wesentlich neuen charakteristischen Bestandteil der Energiedichte zurückführen kann:

$$B_1(\zeta'\eta - \eta'\zeta) + B_2(\xi'\zeta - \zeta'\xi) + B_3(\eta'\xi - \xi'\eta); \tag{5}$$

dabei sind B_1, B_2, B_3 gegebene Konstanten oder Funktionen von τ.[178]) Die Zusatzglieder, die hiernach zu den Differentialgleichungen und Randbedingungen zu treten haben, sind den allgemeinen Formeln leicht zu entnehmen; sie beschreiben die Veränderung, die die Lichtbewegung durch ein magnetisches Feld erleidet (*magnetische Aktivität*), und zwar hängen die Grössen B, die sich wie Komponenten eines axialen Vektors transformieren, von der Lage der magnetischen Axe an der betrachteten Stelle und der magnetischen Feldstärke ab.[179])

An dritter Stelle zieht *Voigt* endlich noch Aggregate von Produkten aus je einer zeitlichen Ableitung von u, v, w selbst und einer von ξ, η, ζ in Betracht. Auch sie haben, wie durch ähnliche Umformungen gezeigt wird[180]), das Auftreten einfacherer Glieder im Ausdruck der virtuellen Arbeit zur Folge, für die typisch ist

$$C(u\delta\xi + v\delta\eta + w\delta\zeta). \tag{6}$$

Die Differentialgleichungen hierzu sind leicht herzustellen; sie liefern die Phänomene in den *natürlich aktiven Medien*.[181])

Mac Cullagh selbst hatte diese Medien gleichfalls in seine Betrachtungen einbezogen, indem er der Energiedichte ein Ableitungen

[177] A. a. O. [176]), p. 569.
[178] A. a. O. p. 568 ff.
[179] A. a. O. p. 572, 679 ff.
[180] A. a. O. p. 572 ff.
[181] A. a. O. p. 574, 687 ff.

adding to the terms of (4) equally generated quadratic forms of the time derivatives ξ', η', ζ' or ξ'', η'', ζ'' and so on, certainly with the simultaneous restriction that the light vector realizes throughout sine oscillations with period τ. Now he uses Hamilton's principle in the form No. **7**, (25), and by integration by parts with respect to time he can transform this additional terms such[177]), that eventually again a quadratic form of ξ, η, ζ just like (4) acquires the position of the energy density, save that their coefficients A are now *functions of* τ; The type of these functions depend on the medium and determine its behavior with respect to different colors.

In a similar way *Voigt* uses also quadratic terms formed with time derivatives of different orders of ξ, η, ζ and shows, that one can reduce them to *one* essentially new characteristic constituent of the energy density:

$$(5) \qquad B_1(\zeta'\eta - \eta'\zeta) + B_2(\xi'\zeta - \zeta'\xi) + B_3(\eta'\xi - \xi'\eta);$$

thereby B_1, B_2, B_3 are given constants or functions of τ.[178]) The additional terms, which appear consequently in the differential equations and the boundary conditions, are extracted easily from the general formulas; they describe the change, which the motion of light undergoes under [the influence] of a magnetic field (*magnetic activity*), and indeed, the quantities B, which transform like the components of an axial vector, depend on the position of the magnetic axis at the considered position and the magnetic field strength.[179])

In the third place, *Voigt* considers finally also aggregates of products between a first time derivative of u, v, w and one of ξ, η, ζ. Also they have, which is shown by similar transformations[180]), as a result the appearance of more simple terms in the expression of the virtual work, for which it is typical [that]

$$(6) \qquad C(u\delta\xi + v\delta\eta + w\delta\zeta).$$

The differential equations hereto are easily obtained; they provide the phenomena of the *naturally active media*.[181])

Mac Cullagh himself has considered these media in the same way, by giving the energy density an additional term

[177] Op. cit.[176]), p. 569.

[178] Op. cit. p. 568 ff.

[179] Op. cit. p. 572, 679 ff.

[180] Op. cit. 572 ff.

[181] Op. cit. p. 574, 687 ff.

zweiter Ordnung enthaltendes Zusatzglied gab

$$(6') \qquad \frac{1}{2}C \sum_{\binom{u\,v\,w}{\xi\,\eta\,\zeta}} \xi\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial c^2}\Big)\,.$$

Dann erhalten die Differentialgleichungen Ableitungen dritter statt wie bei Voigt erster Ordnung als Zusatzglieder.[182])

Den Übergang zu *absorbierenden Medien* gewinnt*Voigt*, indem er unter Heranziehung einer als quadratische Form der Ableitungen ξ', η', ζ' gegebenen Dissipationsfunktion (Nr. **7**f, S. 657, Nr. **11**, S. 671)

$$(7) \qquad 2D = m_{11}\xi'^2 + 2m_{12}\xi'\eta' + \cdots + m_{33}\xi'^2 (sollte \zeta sein)$$

der virtuellen Arbeit

$$(7a) \qquad -\Big(\frac{\partial D}{\partial \xi'}\delta\xi + \frac{\partial D}{\partial \eta'}\delta\eta + \frac{\partial D}{\partial \zeta'}\delta\zeta\Big)$$

hinzufügt; das bewirkt einfach ein Hinzutreten der Komplexe $\frac{\partial D}{\partial \xi'}, \ldots$ zu den $\Xi, \ldots$ in den Formeln (4a), (4b).[183])

Während alle diese Betrachtungen den Ausdruck der potentiellen Energie betreffen, kann man ebenso auch versuchen, Verallgemeinerungen des einfachsten Ausdruckes $\frac{1}{2}\varrho(u'^2 + v'^2 + w'^2)$ der kinetischen Energie, wie sie in Nr. **5**d diskutiert sind, in der Optik zu benutzen. In dieser Richtung liegt der bereits erwähnte Ansatz von *J. W. Strutt* (*Lord Rayleigh*)[184]), die kinetische Energie pro Volumelement des Lichtäthers als allgemeine quadratische Form der Geschwindigkeiten u', v', w' anzunehmen; dabei treten dann auf den linken Seiten der optischen Gleichungen lineare Kombinationen der Beschleunigungen u'', v'', w'' auf.

14. Beziehungen zur Elektrodynamik. Die Grundgleichungen der Elektrodynamik sind ihrer Form nach bekanntlich im wesentlichen in den optischen Grundgleichungen und damit in dem allgemeinen Schema der Mechanik der Kontinua enthalten. Deutet man nämlich, um nur vom isotropen Medium zu reden, die zeitlichen Ableitungen der Komponenten u, v, w des soeben betrachteten Lichtvektors bis auf einen konstanten Faktor als Vektor der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$:

$$u' = \gamma_1 \mathfrak{E}_a, \quad v' = \gamma_1 \mathfrak{E}_b, \quad w' = \gamma_1 \mathfrak{E}_c,$$

und ebenso die Komponenten der Rotation eines Volumelements als

---

[182] *Mac Cullagh*, Proc. R. Irish Ac. II (1841), p. 96 = Works, p. 187. Vgl. auch *P. Volkmann*, Theorie des Lichtes, p. 414 ff.

[183] A. a. O. p. 575 f., 708 ff.

[184] *J. W. Strutt*, Phil Mag. (4) 41—43 (1871, 1872). Vgl. auch V 21, Nr. **29** (*Wangerin).*

containing derivatives of second order

$$(6') \qquad \frac{1}{2}C \sum_{\binom{u\,v\,w}{\xi\,\eta\,\zeta}} \xi\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial c^2}\Big)\,.$$

Then the differential equations obtain as additional terms derivatives of third instead of first order as in Voigt.[182])

Voigt gains the transition to *absorbing media*, by using a dissipation function (No. **7**f, p. 657, No. **11**, p. 671) given as a quadratic form of derivatives ξ', η', ζ'

$$(7) \qquad 2D = m_{11}\xi'^2 + 2m_{12}\xi'\eta' + \cdots + m_{33}\xi'^2 (sollte \zeta sein)$$

[and] adding to the virtual work

$$(7a) \qquad -\Big(\frac{\partial D}{\partial \xi'}\delta\xi + \frac{\partial D}{\partial \eta'}\delta\eta + \frac{\partial D}{\partial \zeta'}\delta\zeta\Big);$$

this leads simply to the addition of the complexes $\frac{\partial D}{\partial \xi'}, \ldots$ to the $\Xi, \ldots$ in the formulas (4a), (4b).[183])

While all this considerations concern the expression of the potential energy, one can likewise try to use in optics generalizations of the most simple expression $\frac{1}{2}\varrho(u'^2 + v'^2 + w'^2)$ of the kinetic energy, as they are discussed in No. **5**d. In this direction lies the already mentioned ansatz of *J. W. Strutt* (*Lord Rayleigh*)[184]), to assume the kinetic energy per unit volume of the light ether as a general quadratic form of the velocities u', v', w'; thereby linear combinations of accelerations u'', v'', w'' do appear on the left hand side of the optical equations.

14. Relations to electrodynamics. The fundamental equations of electrodynamics are in their form, as it is well known, essentially included in the optical fundamental equations and thereby [included] in the general scheme of the mechanics of continua. To speak only of the isotropic medium, if one interprets namely the time derivatives of the components u, v, w of the just considered light vector up to a constant factor as vector of the electric field strength $\mathfrak{E}$:

$$u' = \gamma_1 \mathfrak{E}_a, \quad v' = \gamma_1 \mathfrak{E}_b, \quad w' = \gamma_1 \mathfrak{E}_c,$$

and likewise the components of the rotation of a volume element as

---

[182] *Mac Cullagh*, Proc. R. Irish Ac. II (1841), p. 96 = Works, p. 187. Cf. also *P. Volkmann*, Theorie des Lichtes, p. 414 ff.

[183] Op. cit. p. 575 f., 708 ff.

[184] *J. W. Strutt*, Phil Mag. (4) 41—43 (1871, 1872). Cf. also V 21, No. **29** (*Wangerin).*

Komponenten der magnetischen Feldstärke $\mathfrak{H}$:

$$\xi = \gamma_2 \mathfrak{H}_a, \quad \eta = \gamma_2 \mathfrak{H}_b, \quad \zeta = \gamma_2 \mathfrak{H}_c,$$

so gehen die Gleichungen (3a) und (1) von Nr. **13** bei passender Wahl der Konstanten $\gamma_1, \gamma_2, A, \varrho$ über in

$$(1) \qquad \begin{cases} \frac{\partial \mathfrak{H}_c}{\partial b} - \frac{\partial \mathfrak{H}_b}{\partial c} = \frac{\varepsilon}{c} \mathfrak{E}'_a & (a, b, c), \\ \frac{\partial \mathfrak{E}_c}{\partial b} - \frac{\partial \mathfrak{E}_b}{\partial c} = -\frac{\mu}{c} \mathfrak{H}'_a & (a, b, c), \end{cases}$$

und das sind gerade die *Maxwellschen Grundgleichungen* im freien Äther.[185]) Ein weiteres, äusseren Kräften entsprechendes Glied, das die Gleichungen (3a) noch enthalten können, findet im ersten Tripel (1) seine Deutung als elektrischer Strom. Ähnlich kann man auch die elektromagnetischen Gleichungen für nichtisotrope Medien gewinnen.

Bei den Darstellungen, die die allgemeinen Ansätze der Elektrodynamik jetzt meist finden, geht man indessen in der Regel nicht von dieser Auffassung aus, die die elektrischen und magnetischen Grössen mit den Verschiebungen eines Mediums in so direkte Verbindung bringt; man sieht vielmehr diese Grössen als „physikalische Parameter“ im Sinne von Nr. **2**b an, die den Stellen des Kontinuums als Ortsfunktionen zugeordnet sind, und von denen man allenfalls einige als abhängig von den Bewegungsfunktionen eines immateriellen Mediums — der Elektrizität — deutet. Daneben können dann noch die Bewegungsfunktionen des materiellen Mediums, in dem der Vorgang sich abspielt, in Betracht kommen. Die Gleichungen der Elektrodynamik verknüpfen nun alle diese Größen direkt mit den Kräften, Spannungen, Energiedichten. Die Variationsprinzipe, in die man sie nach dem Vorgange von *H. A. Lorentz*[186]) und *H. v. Helmholtz*[187]) vielfach zusammengefaßt hat, sind dann in gewisser Weise den mechanischen analog, nur daß sie durch die größere Anzahl der in sie eingehenden Größen sehr viel komplizierter sind. Über diese Probleme der speziellen Elektrodynamik vergleiche man die Referate von *H. A. Lorentz*, insbesondere V 13, Nr. **35—39** und V 14, Nr. **8, 9**. Nur ein besonderer Fall sei noch hervorgehoben, als typisch dafür,

---

[185] Vgl. *W. Thomson*, Math. phys. pap. 3 (London 1890), p. 436 ff. Man kann auch die Rolle von elektrischer und magnetischer Feldstärke gerade vertauschen; vgl. über die verschiedenen möglichen Deutungen V 13, Nr. **42**, *H. A. Lorentz*.

[186] *H. A. Lorentz*, La théorie électromagn. de Maxwell (Leiden 1892), § 55 ff.)

[187] *H. v. Helmholtz*, Das Prinzip der kleinsten Wirkung in der Elektrodynamik. Ann. d. Phys. 47 (1892) p. 1 = Wissensch. Abh. III (Leipzig 1895), p. 476.

components of the magnetic field strength $\mathfrak{H}$:

$$\xi = \gamma_2 \mathfrak{H}_a, \quad \eta = \gamma_2 \mathfrak{H}_b, \quad \zeta = \gamma_2 \mathfrak{H}_c,$$

then for a suitable choice of the constants $\gamma_1, \gamma_2, A, \varrho$ the equations (3a) and (1) of No. **13** transform to

$$(1) \qquad \begin{cases} \frac{\partial \mathfrak{H}_c}{\partial b} - \frac{\partial \mathfrak{H}_b}{\partial c} = \frac{\varepsilon}{c} \mathfrak{E}'_a & (a, b, c), \\ \frac{\partial \mathfrak{E}_c}{\partial b} - \frac{\partial \mathfrak{E}_b}{\partial c} = -\frac{\mu}{c} \mathfrak{H}'_a & (a, b, c), \end{cases}$$

and these are just *Maxwell's Fundamental Equations* in the free ether.[185]) A further term corresponding to external forces that can be additionally included in equations (3a) finds its interpretation as electric current in the first three equations of (1). Similarly one can also obtain the electromagnetic equations for anisotropic media.

In the presentations, in which the general fundamentals of electrodynamics are found, however, usually one does not start with the perception to relate the electric and magnetic quantities with the displacements of a medium in such a direct way; one considers these quantities rather as "physical parameters" in the sense of No. **2**b, from which, if necessary, one interprets some as dependent on the motion of an immaterial medium — of the electricity. In addition also the motion of the material medium, in which the process takes place, can be taken into consideration. The equations of electrodynamics now relate all these quantities directly with forces, stresses, energy densities. The variational principles, into which one has often condensed them according to the approach of *H. A. Lorentz*[186]) and *H. v. Helmholtz*[187]), are then in a certain sense analogous to the mechanical one, save that they are very much more complicated due to the bigger amount of involved quantities. One shall compare the papers of *H. A. Lorentz* on these problems of special electrodynamics, in particular V 13, No. **35—39** and V 14, No. **8, 9**. Only a special case shall be highlighted in addition, in being typical

---

[185] Cf. *W. Thomson*, Math. phys. pap. 3 (London 1890), p. 436 ff. One can also interchange the role of the electric and magnetic field strength; cf. about the various possible interpretations V 13, No. **42**, *H. A. Lorentz*.

[186] *H. A. Lorentz*, La théorie électromagn. de Maxwell (Leiden 1892), § 55 ff.)

[187] *H. v. Helmholtz*, Das Prinzip der kleinsten Wirkung in der Elektrodynamik. Ann. d. Phys. 47 (1892) p. 1 = Wissensch. Abh. III (Leipzig 1895), p. 476.

wie solche physikalischen Parameter in die Stoffgleichungen eines materiellen Mediums im früheren Sinne eingehen können.

In einem elastischen Medium sei ein elektrisches Feld $\mathfrak{E}$ erregt; die Verallgemeinerung des früheren Ansatzes ist dann die, dass die Energiedichte φ ausser von den Deformationsgrössen $e_a, \ldots, g_{ab}, \ldots$ noch von den Komponenten der Feldstärke abhängt[188]):

$$\varphi = \varphi(e_a, \ldots, g_{ab}, \ldots; \mathfrak{E}_a, \mathfrak{E}_b, \mathfrak{E}_c). \tag{2}$$

Aus den früheren Formeln Nr. **7**, (4) ergeben sich unverändert die Spannungskomponenten, die also von den elektrischen Feldstärken abhängig werden; andererseits aber ist das Potential auch gegenüber Variationen der Feldstärke $\mathfrak{E}$ zum Minimum zu machen, und daraus ergeben sich Gleichungen für die „elektrischen Momente"

$$\mathfrak{P}_a = \frac{\partial\varphi}{\partial\mathfrak{E}_a}, \quad \mathfrak{P}_b = \frac{\partial\varphi}{\partial\mathfrak{E}_b}, \quad \mathfrak{P}_c = \frac{\partial\varphi}{\partial\mathfrak{E}_c}, \tag{3}$$

die eine Abhängigkeit des elektrischen Zustandes von der Deformation zeigen. In beiden Formelsystemen bzw. in den aus ihnen folgenden Relationen vom Typus

$$\frac{\partial X_a}{\partial\mathfrak{E}_a} = \frac{\partial\mathfrak{P}_a}{\partial x_a} \tag{4}$$

sind die sog. *Reziprozitätssätze*[189]) enthalten, die in allen diesen verschiedenartige Gebiete verknüpfenden Erscheinungen eine wesentliche Rolle spielen; hat eine Änderung des einen physikalischen Parameters eine Änderung der einem anderen zugeordneten Spannungskomponente zur Folge, so bewirkt auch eine Variation dieses Parameters eine bestimmte Änderung der jenem ersten zugehörigen Spannungskomponente. In diesen Formeln sind die Erscheinungen der *Piezoelektrizität* enthalten, die mit Hilfe einfacher Ansätze für φ entsprechend den Symmetrieverhältnissen der kristallinischen Medien genau untersucht worden sind.[190])

---

[188] Nachdem *W. Voigt* zuerst die Theorie auf Grund direkt angesetzter Abhängigkeit der Spannungs- und Momentkomponenten von Deformation und Feldstärke behandelt hatte (Abhandl. Ges. d. Wiss. Göttingen, 36, 1890), haben *P. Duhem*, Leçons sur l'électricité 2 (1892), p. 467, *E. Riecke* (Nachr. Ges. d. Wiss. Göttingen 1893, p. 19) und *W. Voigt* (ebenda, math.-phys. Kl. 1894, p. 343) den Potentialansatz verwendet; näheres siehe in V 16, Nr. **8**, *F. Pockels*.

[189] Vgl. hierzu *Voigts* Kompendium II, p. 106. — Man kann diese Reziprozitätssätze, die meist nur für den Fall endlich vieler Freiheitsgrade behandelt werden (vgl. *J. J. Thomson*, Anwendungen der Dynamik auf Physik und Chemie [Leipzig 1890] und *H. von Helmholtz*, Journ. f. Math. 100 (1887), p. 137 = Wiss. Abh. III, p. 203 ff.) in weitem Umfang auf Kontinua übertragen.

[190] Vgl. die ausführliche Darstellung in V 16, Nr. **8**—**10**, *F. Pockels.*

how such physical parameters can be treated in the former sense within the constitutive laws of a material medium.

Let an electric field $\mathfrak{E}$ be excited in an elastic medium; the generalization of the former ansatz is then the one, that the energy density φ depends apart from the deformation quantities $e_a, \ldots, g_{ab}, \ldots$ also on the components of the field strength[188]):

$$\varphi = \varphi(e_a, \ldots, g_{ab}, \ldots; \mathfrak{E}_a, \mathfrak{E}_b, \mathfrak{E}_c). \tag{2}$$

Using the former formulas No. **7**, (4), the stress components appear unchanged, which depend consequently also on the electric field strength; Apart from that, the potential has to be minimized also with respect to the variation of the field strength $\mathfrak{E}$, and thereof the equations for the "electric torques" are obtained

$$\mathfrak{P}_a = \frac{\partial\varphi}{\partial\mathfrak{E}_a}, \quad \mathfrak{P}_b = \frac{\partial\varphi}{\partial\mathfrak{E}_b}, \quad \mathfrak{P}_c = \frac{\partial\varphi}{\partial\mathfrak{E}_c}, \tag{3}$$

which show a dependence of the electric state on the deformation. In both systems of formulas or in the consequently following relation of the kind

$$\frac{\partial X_a}{\partial\mathfrak{E}_a} = \frac{\partial\mathfrak{P}_a}{\partial x_a} \tag{4}$$

the so-called *reciprocity theorems*[189]) are included, which play a crucial role in all these phenomena which relate various fields; if a change of one physical parameter causes the change of another related stress component, then also a variation of this parameter causes a certain change of the stress component related to the first. In these formulas the phenomena of *piezoelectricity* are included, which have been studied thoroughly with the help of simple forms of φ according to the symmetry conditions of crystalline media.[190])

---

[188] After *W. Voigt* had treated first the theory based on the directly formulated dependence of the stress and torque components on the deformation and field strength (Abhandl. Ges. d. Wiss. Göttingen, 36, 1890), *P. Duhem*, Leçons sur l'électricité 2 (1892), p. 467, *E. Riecke* (Nachr. Ges. d. Wiss. Göttingen 1893, p. 19) and *W. Voigt* (ibid., math.-phys. Kl. 1894, p. 343) have used the potential-based approach; For more details see V 16, No. **8**, *F. Pockels*.

[189] Cf. hereto *Voigts* Kompendium II, p. 106. — One can transmit these reciprocity theorems, which are mostly treated for the case of finitely many degrees of freedom (cf. *J. J. Thomson*, Anwendungen der Dynamik auf Physik und Chemie [Leipzig 1890] and *H. von Helmholtz*, Journ. f. Math. 100 (1887), p. 137 = Wiss. Abh. III, p. 203 ff.) in the wider extent to continua.

[190] Cf. the extensive presentation in V 16, No. **8**—**10**, *F. Pockels.*

15. Einfügung der thermodynamischen Ansätze. Es giebt zwei Wege, von den bisher entwickelten Grundformeln der Mechanik der Kontinua zu den umfassenderen Ansätzen der Thermodynamik aufzusteigen, die im Rahmen dieses Artikels nur in aller Kürze zu skizzieren sind. Der eine schliesst an die Gleichungen der Kinetik, etwa an das Hamiltonsche Prinzip in der verallgemeinerten Gestalt Nr. **7**, (26) an und geht von der Annahme aus, dass irgendeine Verbindung ω der Bewegungsfunktionen und ihrer räumlichen Ableitungen selbst nicht explizit im Integranden φ auftritt, vielmehr lediglich ihre zeitliche Ableitung. Eine solche „verborgene Koordinate“, die man an Stelle einer der Bewegungsfunktionen als bewegungsbestimmend ansehen kann, kann man dann gerade so behandeln, wie man es in der *Helmholtz*schen Theorie[191]) der zyklischen Systeme in der Mechanik der Systeme mit endlichvielen Freiheitsgraden tut: Mit Hilfe der Eliminationsmethoden der Variationsrechnung, wie sie in der Theorie der kanonischen Transformation der Dynamik gehandhabt werden[192]), führt man im Variationsprinzip statt ω' die Ableitung $\pi = \frac{\partial \varphi}{\partial \omega'}$ ein und erhält dann für den Grenzfall solcher Zustandsänderungen, bei denen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der übrigen Koordinaten (ausser ω) unendlichklein sind, ein Variationsprinzip, das sich von dem Prinzip der virtuellen Verrückungen nur durch das Hinzutreten eines Termes $\omega' \cdot \delta\pi$ unterscheidet. Das Raumintegral dieses Termes findet nun seine Deutung als die bei der virtuellen Verrückung zugeführte Wärmemenge, während ω' und π Temperatur und Entropie des Systems darstellen. Die analogen Betrachtungen finden in der Thermodynamik der Systeme mit endlich vielen Freiheitsgraden stets ausführlich Platz[193]); übrigens scheint aber eine explizite Anwendung innerhalb der Mechanik der Kontinua nicht vorzuliegen.

Der zweite Weg ist wesentlich mehr formaler Natur und schliesst sich den bisher zum Ausdruck gebrachten formalen Auffassungen aufs nächste an. Den Deformationsfunktionen wird — wir beschränken uns der Einfachheit halber auf die Statik — ein „physikalischer“ Parameter im Sinne von Nr. **2**b

$$s = s(a, b, c)$$

hinzugefügt, dessen Wert an jeder Stelle den „thermischen Zustand“

[191] *H. v. Helmholtz*, J. f. Math. 97 (1884), p. 111 = Wiss. Abhandl. III, p. 119 ff. Vgl. IV 11, Nr. **23**, *Heun*.

[192] Vgl. die Anwendungen derselben Methoden oben in Nr. **7**e, S. 654 und Nr. **8**b, S. 662 sowie Anm.[111]).

[193] Siehe die Referate V 3, Nr. **28** ff. (*Bryan*) und IV 1, Nr. **48** (*Voss*).

15. Introduction of the thermodynamical foundations. From the so far developed basic formulas of the mechanics of continua, there are two ways to climb up to the more comprehensive foundations of thermodynamics, which, within the scope of this article, are outlined only in a nutshell. One [way] builds on the equations of kinetics, e. g. Hamilton's principle of the generalized form No. **7**, (26), and relies on the assumption that some relation ω of the motion and the spatial derivatives thereof does not appear explicitly in the integrand φ, but rather its time derivative. One can treat such a "hidden coordinate", which one can see instead of the motion as motion determining, just as one does it in *Helmholtz*'s theory[191]) of cyclic systems in the mechanics with finitely many degrees of freedom: With the help of elimination methods of the calculus of variations which are used in the theory of canonical transformations of dynamics[192]), one introduces in the variational principle instead of ω' the derivative $\pi = \frac{\partial\varphi}{\partial\omega'}$ and obtains consequently for the limit case of a state change, for which the velocities and accelerations of the remaining coordinates (except ω) are indefinitely small, a variational principle which differ from the principle of virtual displacements only by the additional term $\omega' \cdot \delta\pi$. The volume integral of this term has then the interpretation of the added heat quantity for a virtual displacement, while ω' and π represent temperature and entropy[, respectively]. Similar considerations are always treated extensively within the thermodynamics of systems with finitely many degrees of freedom[193]); but after all, an explicit application within the mechanics of continua seems not to be available.

The second way is of much more formal nature and builds directly on the formal understanding being expressed so far. To the deformation functions — we restrict us for the sake of simplicity to statics — a "physical parameter" in the sense of No. **2**b

$$s = s(a, b, c)$$

is added, whose value at every point describes the "thermal state"

[191] *H. v. Helmholtz*, J. f. Math. 97 (1884), p. 111 = Wiss. Abhandl. III, p. 119 ff. Cf. IV 11, No. **23**, *Heun*.

[192] Cf. the applications of the very same method above in No. **7**e, p. 654 and No. **8**b, p. 662 as well as remark[111]).

[193] See the articles V 3, No. **28** ff. (*Bryan*) and IV 1, No. **48** (*Voss*).

des Mediums beschreibt; man bezeichnet ihn als *Entropie* des Mediums an dieser Stelle, berechnet auf die Masseneinheit, indem man Entropie eines Quantums V_0 des Mediums das Integral:

$$\iiint\limits_{(V_0)} s(a,b,c)\varrho_0 dV_0 = \iiint\limits_{(V)} s(x,y,z)\varrho dV$$

nennt. Bei einer virtuellen Verrückung des Kontinuums wird auch s eine unendlichkleine virtuelle Änderung δs zu erfahren haben. Man kann dann, entsprechend dem *zweiten Hauptsatz* der Thermodynamik, das Prinzip der virtuellen Verrückungen in folgender Weise erweitern[194]):

Zu der virtuellen Arbeit δA der gesamten Kraftrichtungen tritt gleichberechtigt die „*Wärmezufuhr*“ bei einer virtuellen Verrückung:

$$\delta Q = \iiint\limits_{(V)} \Theta\,\delta s\,\varrho\,dV; \tag{1}$$

dabei bedeutet die „*Temperatur*“ Θ einen den Spannungskomponenten gleichberechtigten Faktor, der für jedes Medium in charakteristischer Weise in seiner Abhängigkeit von den Deformationsfunktionen und der Entropie sowie von deren Ableitungen gegeben ist. *Thermodynamisches Gleichgewicht wird bedingt durch die Variationsgleichung*

$$\delta Q + \delta A = 0, \tag{2}$$

die genau im alten Sinne zu verstehen ist; dabei können Nebenbedingungen auch das thermische Verhalten des Mediums, d. h. die Funktion s betreffen.

Die volle Bedeutung der Thermodynamik kommt indessen erst zum Vorschein, wenn man in diesem Ansatz den sog. *ersten Hauptsatz* zur Geltung bringt, der einen *allgemeingültigen* Zusammenhang der sämtlichen Wirkungskomponenten einschliesslich der Temperatur mit einer *einzigen* Funktion der Zustandsgrössen statuiert, von der Art wie er in Nr. **7** für einzelne Fälle diskutiert wurde.[195]) Zieht man nämlich in δA nur die inneren Wirkungen innerhalb des Mediums in Betracht, *so soll* $\delta Q + \delta A$ *für jede virtuelle Verrückung bis aufs Vorzeichen gleich der Variation eines in bestimmter, für jedes Medium charakteristischer Weise nur von den jeweiligen Deformationsfunktionen und der Entropie abhängigen Ausdruckes, der potentiellen Energie* Φ*, sein*. Was die Gestalt von Φ angeht, so ist der einfachste Fall der, dass Φ ein

[194] Für die Ansätze der gewöhnlichen Thermodynamik, die sich im folgenden genau wiederholen, vgl. das Referat V 3 (*Bryan*).

[195] Für kontinuierliche Medien hat namentlich *P. Duhem* diese Ansätze nach den verschiedensten Richtungen hin angewendet; man vergleiche die zusammenfassende Darstellung in seinem Traité d’Énergétique, T. II (Paris 1911), Chap. XIV.

of the medium; one denotes it as *entropy* of the medium at this point, evaluated per unit mass, by calling the integral

$$\iiint\limits_{(V_0)} s(a,b,c)\varrho_0 dV_0 = \iiint\limits_{(V)} s(x,y,z)\varrho dV$$

entropy of a portion V_0 of the medium. For a virtual displacement of the continuum, also s will undergo an infinitesimal virtual change δs. According to the *second law* of thermodynamics, one can then enhance the principle of virtual displacements in the following way[194]):

Additionally to the virtual work δA of all force contributions, equitably the "heat supply" appears for a virtual displacement:

$$\delta Q = \iiint\limits_{(V)} \Theta\, \delta s\, \varrho\, dV; \tag{1}$$

thereby "*temperature*" Θ denotes a factor being similar to the stress components[. A factor], which is given for every medium in its characteristic way in its dependence on the deformation functions and on the entropy as well as on the derivatives thereof. *Thermodynamic equilibrium is determined by the variational equation*

$$\delta Q + \delta A = 0, \tag{2}$$

which needs to be understood exactly in the old way; thereby also constraints can affect the thermal behavior of the medium, i. e. the function s.

However, the full significance of thermodynamics appears only, when one asserts to this ansatz the so-called *first law* [of thermodynamics], which states a *generally valid* connection of all effects including the temperature with a *single* function of the state variables of the kind as discussed in No. **7** for individual cases.[195]) Namely, if one considers in δA only the internal effects within the medium, *then* $\delta Q + \delta A$ *shall be up to the sign equal to the variation of a certain expression, the potential energy* Φ, *depending for every medium in a characteristic way only on the respective deformation functions and the entropy.* Concerning the form of Φ, then the most simple case is, that Φ

---

[194] For the foundations of common thermodynamics, which are just repeated in the following, cf. the article V 3 (*Bryan*).

[195] For continuous media nominally *P. Duhem* has applied these fundamental approaches in various directions; one shall confer the summarizing presentation in his Traité d'Énergétique, T. II (Paris 1911), Chap. XIV.

Raumintegral über eine Funktion φ von x, y, z, ihren ersten Ableitungen und s ist[196]):

$$\delta Q + \delta A = -\delta \iiint\limits_{(V_0)} \varphi(x, \dots; x_a, \dots; s)\, da\, db\, dc; \tag{3}$$

dann folgt speziell für die Temperatur

$$\Theta = -\frac{1}{\varrho_0} \frac{\partial \varphi}{\partial s}, \tag{4}$$

was den im wesentlichen unverändert bleibenden Gleichungen (4) von Nr. **7a** zur Seite tritt. Aus diesen Gleichungen folgen wieder reziproke Relationen der Art

$$-\varrho_0 \frac{\partial \Theta}{\partial x_a} = \frac{\partial X_a}{\partial s} \tag{5}$$

zwischen je einem Paare thermischer und elastischer Parameter — in analoger Bedeutung, wie oben in einem anderen Fall erörtert (Nr. **14**, (4)) wurde.

Es ist häufig zweckmässig, an Stelle von s die Temperatur Θ als bestimmenden Parameter einzuführen; das ist wiederum der Form nach die in Nr. **7**e (S. 654) angewandte kanonische Transformation: Berechnet man aus (4) s als Funktion von Θ und bestimmt damit

$$\psi = \varphi + \varrho_0 \Theta s = \psi(x, \dots; x_a, \dots; \Theta),$$

so erhält man statt (3) für alle willkürlichen Variationen $\delta x, \delta y, \delta z$ und $\delta\Theta$ die Identität:

$$-\iiint\limits_{(V)} s\, \delta\, \Theta\, \varrho dV + \delta A = -\delta \iiint\limits_{(V_0)} \psi da\, db\, dc. \tag{3'}$$

Man nennt ψ das „thermodynamische Potential bei gegebenem Deformationszustand“; zieht man gleichzeitig noch die Transformation von Nr. **7e** heran, die die Deformationsgrössen durch die Spannungskomponenten ersetzt, so erhält man die anderen Arten thermodynamischer Potentiale in völliger Analogie zu den üblichen Betrachtungen der Thermodynamik der Systeme mit endlichvielen Freiheitsgraden.[197])

Indem man rechter Hand in (3) das Auftreten der Deformationsgrössen in geeigneter Weise spezialisiert, erhält man die thermodynamischen Ansätze für die einzelnen im vorigen behandelten Gebiete; dabei bedingt die Art, wie s in φ (oder Θ in ψ) mit den einzelnen Deformationsgrössen verknüpft ist, natürlich den thermischen Effekt

---

[196] Dieser Ansatz hat für den speziellen Fall der reinen Elastizitätstheorie zuerst *W. Thomson*, Quart. Journ of Math. 1 (1857) ausgebildet; vgl. V 3, Nr. **21**, *Bryan*.

[197] S. V 3, Nr. **16** (*Bryan*).

is a volume integral of a function φ depending on x, y, z, the first derivatives thereof and s[196]):

$$\delta Q + \delta A = -\delta \iiint\limits_{(V_0)} \varphi(x, \ldots; x_a, \ldots; s)\, da\, db\, dc; \tag{3}$$

then especially for the temperature it follows

$$\Theta = -\frac{1}{\varrho_0}\frac{\partial \varphi}{\partial s}, \tag{4}$$

which stands aside to the equations (4) of No. **7a** [which] remain basically unchanged. From these equations again reciprocal relations of the kind

$$-\varrho_0 \frac{\partial \Theta}{\partial x_a} = \frac{\partial X_a}{\partial s} \tag{5}$$

follow between a pair of thermal and elastic parameter — with a similar meaning, as discussed above for another case (No. **14**, (4)).

Often it is useful to introduce the temperature Θ as determining parameter instead of s; according to the form, this corresponds again with the canonical transformation applied in No. **7**e (p. 654): If one computes s as a function of Θ using (4) and if one determines therewith

$$\psi = \varphi + \varrho_0 \Theta s = \psi(x, \ldots; x_a, \ldots; \Theta),$$

then one obtains instead of (3) for all arbitrary variations $\delta x, \delta y, \delta z$ and $\delta\Theta$ the identity:

$$-\iiint\limits_{(V)} s\, \delta\, \Theta\, \varrho dV + \delta A = -\delta \iiint\limits_{(V_0)} \psi\, da\, db\, dc. \tag{3'}$$

One denotes ψ the "thermodynamic potential for a given state of deformation"; If one considers at the same time also the transformation of No. **7e**, which substitutes the deformation quantities with the stress components, then one obtains the other types of thermodynamic potential in complete analogy to the common considerations of thermodynamics of systems with finitely many degrees of freedom.[197])

By specializing on the right hand side of (3) the appearance of the deformation quantities in a convenient way, one obtains the thermodynamic fundamentals for the before treated individual fields; Thereby the way how s in φ (or Θ in ψ) is related with the particular deformation quantities determines certainly the thermal effect

---

[196] For the special case of the pure theory of elasticity, this ansatz has been formulated originally by *W. Thomson*, Quart. Journ of Math. 1 (1857); cf. V 3, No. **21**, *Bryan*.

[197] See V 3, No. **16** (*Bryan*).

der einzelnen Arten der Deformationen bzw. die Art der Deformationen, die durch thermische Wirkungen hervorgerufen werden. Für die *Elastizitätstheorie* und die *Hydrodynamik* sind diese Zusammenhänge vielfach untersucht worden.[198])

Man hat in (3) für die potentielle Energie Φ auch andere der in Nr. **7** untersuchten Ansätze verwendet, wobei zu den früheren Formeln nur die Berücksichtigung der Abhängigkeit von s neu hinzukommt. Neben den Integralen vom Typus Nr. **7**, (7), die *P. Duhem*[199]) in dieser Richtung vielfach verwendet hat, sei hier nur der Fall hervorgehoben, dass Φ als Summanden ein *Flächenintegral* etwa über die Trennungsfläche verschiedener in V enthaltenen Medien besitzt; entsprechend wird man dann auf dieser Fläche auch eine *Flächendichte der Entropie* und demgemäss ein Flächenintegral als Beitrag zur Wärmezufuhr anzunehmen haben. Diese Ansätze stellen die *thermischen Wirkungen der Kapillarität*[200]) dar.

Die weitere Ausbildung dieser thermodynamischen Ansätze erfolgt dann so, dass man in der Fundamentalgleichung neue die Konstitution des betrachteten Mediums beschreibende physikalische Parameter auftreten lässt, also etwa φ von ihnen abhängen lässt. Es genüge, als Beispiel hier zu erwähnen, dass man so durch Aufnahme der elektrischen Feldstärke wie in Nr. **14**, (2) zu den Erscheinungen der *Pyroelektrizität*, der Wechselwirkung von Wärme, Druck und elektrischer Erregung, in Kristallen geführt wird.[201])

Endlich sind hier noch die an *J. W. Gibbs*[202]) anknüpfenden *thermochemischen* Untersuchungen zu erwähnen, die auf der Vorstellung mehrerer denselben Raum simultan ausfüllender Medien beruhen, deren Zustandsparameter gleichzeitig in φ eingehen; man hat hier freilich sich bisher durchweg auf den Fall von endlich vielen Freiheitsgraden beschränkt: man nimmt die einzelnen Medien (Phasen) homogen an, so dass ihr Zustand durch eine Reihe nicht mehr vom Ort abhängiger Variabler charakterisiert wird.[203])

16. Beziehungen zur Relativitätstheorie. Es soll zum Schluss noch die Frage aufgenommen werden, die schon wiederholt gelegent-

---

[198] Vgl. z. B. *Voigt*, Kompendium I, p. 523 ff.; *Voigt*, Lehrbuch der Kristallphysik, Leipzig 1910, p. 276 ff., p. 763 ff.; *Duhem*, Traité d'énergétique II, Paris 1911, p. 115 ff.; *G. Hamel*, Elementare Mechanik, Leipzig 1912, p. 571 ff.

[199] S. insbes. Ann. Éc. Norm. (3) 10 (1893), p. 183 ff. und 21 (1904), p. 99 ff. und Traité, a. a. O.[195])

[200] Vgl. V 9, Nr. **18** (*Minkowski*).

[201] Siehe V 16, Nr. **11**, *F. Pockels*.

[202] Trans. Connect. Acad. III (1876—1878) = Scient. Papers I (1906), p. 55.

[203] Vgl. V 3, Nr. **26**, (*Bryan*) and IV 11, Nr. **22**—**24** (*K. Heun*).

of the individual kinds of deformation or the kind of deformation, which is caused by thermal effects. These relations have been studied in many ways for the *theory of elasticity* and *hydrodynamics*.[198])

In (3) one has used for the potential energy Φ also other approaches studied in No. **7**, where to the former formulas now the consideration of the dependence on s is added anew. Besides the integrals of the kind No. **7**, (7), which *P. Duhem*[199]) has used frequently for this kind of applications, let us highlight here the case, that Φ has as a summand a *surface integral* for instance over the interface between different media contained in V; accordingly, one needs to assume on this surface also a *surface density of the entropy* and consequently a surface integral as a contribution to the heat supply. This fundamental approaches represent the *thermal effects of capillarity*[200]).

The further development of these thermodynamic approaches follows in the way that one let appear in the fundamental equation new physical parameters describing the constitution of the considered medium. It is enough to mention here as an example that by adding the electric field strength as in No. **14**, (2) one is led to the occurrence of *pyroelectricity* in crystals, [i. e.] the interaction between heat, pressure and electric excitation.[201])

Finally, the *thermochemical* studies following *J. W. Gibbs*[202]) have to be mentioned which are based on the perception of various media occupying the same space simultaneously, whose state variables appear in φ at once; here, certainly one has restricted oneself throughout to the case of finitely many degrees of freedom: one assumes the individual media (phases) to be homogeneous, such that their state is characterized by a series of variables not depending on the position anymore.[203])

16. Relations to the theory of relativity. At the end, the question shall be incorporated, which already has been touched repeatedly once in a while,

[198] Cf. e. g. *Voigt*, Kompendium I, p. 523 ff.; *Voigt*, Lehrbuch der Kristallphysik, Leipzig 1910, p. 276 ff., p. 763 ff.; *Duhem*, Traité d'énergétique II, Paris 1911, p. 115 ff.; *G. Hamel*, Elementare Mechanik, Leipzig 1912, p. 571 ff.

[199] See in particular Ann. Éc. Norm. (3) 10 (1893), p. 183 ff. and 21 (1904), p. 99 ff. and Traité, op. cit.[195])

[200] Cf. V 9, No. **18** (*Minkowski*).

[201] See V 16, No. **11**, *F. Pockels*.

[202] Trans. Connect. Acad. III (1876—1878) = Scient. Papers I (1906), p. 55.

[203] Cf. V 3, No. **26**, (*Bryan*) and IV 11, No. **22**—**24** (*K. Heun*).

lich gestreift wurde, *wie sich die verschiedenen Ansätze der Mechanik der Kontinua bei Transformationen des verwendeten Koordinatensystems verhalten*; von hier aus wird auch die Verbindung zu den Ansätzen der modernen Relativitätstheorie hergestellt werden.

Unsere Vorstellung von der Homogenität und Isotropie des gewöhnlichen Raumes verlangt zunächst, dass die Gesetze jedes physikalischen Vorganges ungeändert bleiben, wenn man sie auf irgend ein anderes rechtwinkliges Koordinatensystem bezieht und gleichzeitig *alle* in den Vorgang eingreifenden Grössen der entsprechenden Transformation unterwirft; man sagt kurz, *dass die gesamte Physik invariant ist gegenüber der Gruppe der sämtlichen rechtwinkligen Koordinatentransformationen der gewöhnlichen Geometrie, der sog. „Hauptgruppe" oder „Euklidischen Gruppe"*. Hieraus folgt speziell, dass die virtuelle Arbeit der sämtlichen inneren Wirkungen in einem kontinuierlichen System bei der einer unendlichkleinen Abänderung des Koordinatensystems entsprechenden virtuellen Verrückung notwendig verschwindet, oder dass das gesamte Potential dieser Wirkungen bei jeder solchen Verrückung des Kontinuums ungeändert bleibt, d. h. im Sinne von *E.* und *F. Cosserat* ein *Euklidisches Potential* ist (vgl. Nr. **7**b, S. 650).

In analoger Weise kann man nun in der Kinetik fragen, ob es auch Transformationen der Zeitvariablen t oder gar simultane Transformationen der Zeit- und Raumvariablen gibt, die die physikalischen Gesetze ungeändert lassen. Legt man die kinetischen Grundansätze in ihrer ursprünglichen Gestalt (Nr. **5**, (1), (5), (4), (6)) zugrunde, so ergiebt sich, dass eine Verschiebung des Nullpunktes der Zeitrechnung

$$\bar{t} = t + \beta \tag{1}$$

sowie eine gleichförmige Bewegung des rechtwinkligen Koordinatensystemes parallel mit sich

$$\bar{x} = x + \alpha_1 t, \quad \bar{y} = y + \alpha_2 t, \quad \bar{z} = z + \alpha_3 t \tag{2}$$

die kinetischen Glieder im wesentlichen nicht ändert; nur die zeitlichen Ableitungen 1. Ordnung, beispielsweise die kinetische Energie T, werden bei der Substitution (2) zunächst modifiziert, aber man sieht leicht, dass die Zusatzglieder bei der Variation fortfallen und daher die Bewegungsgesetze ungeändert bleiben. Also sind *die Theoreme der Mechanik der Kontinua in gewissem Umfange invariant gegenüber einer zehnparametrigen Gruppe linearer Transformationen der Raum- und Zeitkoordinaten*[204]), die sich aus den rechtwinkligen Koordinatentransforma-

[204] Vgl. hierzu die Darlegungen in IV 1, Nr. **13**—**17**, *Voss*.

how the various fundamental approaches of the mechanics of continua behave under the transformation of the used coordinate system; from here, also the relation to the foundations of the modern theory of relativity are established.

Our perception of the homogeneity and isotropy of the ordinary space demands at first that the laws of every physical process remain unchanged if one relates them to another orthogonal coordinate system and [if], at the same time, [one] subjects *all* quantities involved in the process to the corresponding transformation; it is said briefly, *that the entire physics is invariant with respect to the group of all orthogonal coordinate transformations of the ordinary geometry, the so-called "basic group" or "Euclidean group"*. Herefrom it follows in particular, that the virtual work of all internal effects within a continuous system necessarily vanishes for a virtual displacement corresponding to an infinitesimal change of the coordinate system, or that the total potential of these effects remain unchanged for any such displacement of the continuum, i. e. [that the potential] is a *euclidean potential* in the sense of *E.* and *F. Cosserat* (cf. No. **7**b, p. 650).

In a similar way, one can ask in kinetics if there are also transformations of the time variable t or even simultaneous transformations of time and space variables which leave the physical laws unchanged. If one bases on the fundamental laws of kinetics in the original form (No. **5**, (1), (5), (4), (6)), then it follows, that a displacement of the origin in the computation of time

$$\bar{t} = t + \beta \tag{1}$$

as well as a uniform motion of the orthogonal coordinate system parallel to itself

$$\bar{x} = x + \alpha_1 t, \quad \bar{y} = y + \alpha_2 t, \quad \bar{z} = z + \alpha_3 t \tag{2}$$

do not change the kinetic terms essentially; only the time derivatives of 1. order, for instance the kinetic energy T, are modified at first by the substitution (2), but one sees easily that the additional terms vanish for the variation and thus the laws of motion remain unchanged. Hence, *the theorems of the mechanics of continua are in a certain range invariant with respect to a ten-parameter group of linear transformations in space and time coordinates* [204]*)*, which are composed of an orthogonal coordinate transforma-

[204] Cf. hereto the explanation in IV 1, No. **13—17**, *Voss*.

tionen, aus den Parallelverschiebungen des Axensystems mit konstanter Geschwindigkeit sowie den Änderungen des Nullpunktes der Zeitrechnung zusammensetzt; die allgemeine Substitution dieser sog. *Galilei*schen oder *Newton*schen *Gruppe* lautet:

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}z + \alpha_1 t + \beta_1 \\
\bar{y} &= \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \alpha_{23}z + \alpha_2 t + \beta_2 \\
\bar{z} &= \alpha_{31}x + \alpha_{32}y + \alpha_{33}z + \alpha_3 t + \beta_3 \\
\bar{t} &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad t + \beta
\end{aligned} \tag{3}$$

wo die 9 Grössen α_{ik} ein orthogonales Koeffizientensystem bilden. Die Substitutionen (3) haben die charakteristische Eigenschaft, dass sie das Differential dt ungeändert lassen, wenn aber $dt = 0$ ist, auch das Quadrat der Linienelemente $dx^2+dy^2+dz^2$. Eine besondere Bedeutung in der Mechanik hat auch die durch Hinzunahme aller *Ähnlichkeitstransformationen* des Raumes einerseits und der Zeitaxe andererseits erweiterte *zwölfgliedrige Gruppe*; ihre Anwendung lässt die physikalischen Grössen nicht mehr absolut invariant, sondern setzt ihre *Dimensionen* in bezug auf Längen- und Zeiteinheit in Evidenz.[205])

In der modernen Entwicklung der Optik und Elektrodynamik hat die Tatsache besondere Wichtigkeit gewonnen, dass durchaus nicht alle Gesetze der Physik diese Invarianz gegenüber der *Galilei*schen Gruppe aufweisen. Das kann einmal so zustande kommen, dass gemäss den allgemeinen Ansätzen von Nr. **5**d und **7**f ganz andersartige kinetische Glieder, als die der klassischen Mechanik den Vorgang bestimmen, andererseits aber auch dadurch, dass bei sonst unverändertem Ansatz durch den physikalischen Sachverhalt für gewisse Grössen eine andere Deutung und damit auch eine andere Behandlung bei der Transformation nahegelegt wird. So müssen z. B. die optischen Grundgleichungen (3a) von Nr. **18**, da sie genau aus dem normalen Ansatz des *d'Alembert*schen Prinzips entstehen, gegenüber der *Galilei*transformation (2) invariant seien, wenn man nur den x-y-z-Raum transformiert und a, b, c als die jedes substantielle Teilchen charakterisierenden Parameter ungeändert lässt. Dem entgegen giebt die Optik Anlass, den Lichtvektor u, v, w als Funktion der Stelle a, b, c zu betrachten und demgemäss diese Variablen a, b, c der *Galilei*transformation (2) zu unterwerfen; alsdann ist nach der Transformation die zeitliche Differentiation bei konstantem $\bar{a} = a+\alpha_1 t, \ldots$ zu vollziehen, und in diesem Sinne sind die Gleichungen der Optik nicht mehr invariant.

[205] Vgl. hierüber IV 1, Nr. **10**, *Voss*.

tion, a parallel displacement of the system of axes with constant velocity, as well as the changes of the origin in the computation of time; the general substitution of this so-called *Galilean* or *Newtonian group* formulates as:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}z + \alpha_1 t + \beta_1\\ \bar{y} &= \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \alpha_{23}z + \alpha_2 t + \beta_2\\ \bar{z} &= \alpha_{31}x + \alpha_{32}y + \alpha_{33}z + \alpha_3 t + \beta_3\\ \bar{t} &= \qquad\qquad\qquad\qquad\quad t + \beta\end{aligned} \tag{3}$$

where the 9 quantities α_{ik} form an orthogonal system of coefficients. The substitutions (3) have the characteristic property to leave the differential dt unchanged, but when $dt = 0$, then also the square of the line element $dx^2 + dy^2 + dz^2$ [remains unchanged]. In mechanics also the extended *twelve-parameter group* [obtained by] adding all *similarity transformations* of the space on the one hand and of the time axis on the other hand is of particular importance; its application does not leave the physical quantities to be invariant, but relates their *dimensions* with respect to the unit length and time.[205])

In the modern development of optics and electrodynamics the fact that definitely not all laws of physics show this invariance with respect to the *Galilean* group has gained particular importance. This can be achieved on the one hand that according to the general foundations of No. **5**d and **7**f completely different kinetic terms as in classical mechanics determine the process, or on the other hand also thereby that for an unchanged ansatz a physical circumstance suggests for certain quantities a different interpretation and consequently a different treatment under transformations. Thus, for instance the fundamental equations of optics (3a) of No. **18**, as they emerge exactly from the usual ansatz of *d'Alembert*'s principle, must be invariant with respect to *Galilean* transformations, if one transforms only the x-y-z-space and [if one lets] unchanged a, b, c as parameters characterizing every substantial particle. Contrary to this, optics gives rise to consider the light vector u, v, w as a function of the point a, b, c and to subject these variables a, b, c accordingly to the *Galilean* transformation (2); therupon after the transformation, the time derivative for constant $\bar{a} = a + \alpha_1 t, \ldots$ has to be carried out, and in this sense the equations of optics are not anymore invariant.

[205] Cf. about this IV 1, No. **10**, *Voss*.

Bestimmt man nun aber diejenigen ganzen linearen Transformationen der Variablen a, b, c, t, bei denen die Grundgleichungen der Optik in diesem Sinne invariant bleiben[206]), so ergeben sich die nach *H. Poincarés*[207]) Vorschlag als *Lorentz-Transformationen* bezeichneten Transformationen, deren fundamentale Bedeutung für die Elektrodynamik und die Physik die Untersuchungen von *H. A. Lorentz*[208]), *A. Einstein*[209]), *H. Poincaré*[207]), *H. Minkowski*[210]) erwiesen haben. Es sind diejenigen „Affinitäten" des vierdimensionalen x-y-z-t-Raumes, der *Minkowski*schen „Welt":

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}z + \alpha_{14}t + \alpha_{15}\\ \bar{y} &= \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \alpha_{23}z + \alpha_{24}t + \alpha_{25}\\ \bar{z} &= \alpha_{31}x + \alpha_{32}y + \alpha_{33}z + \alpha_{34}t + \alpha_{35}\\ \bar{t} &= \alpha_{41}x + \alpha_{42}y + \alpha_{43}z + \alpha_{44}t + \alpha_{45},\end{aligned} \tag{4}$$

welche die Differentialform $dx^2+dy^2+dz^2-c^2dt^2$ (in der c die *Lichtgeschwindigkeit* bedeutet) in sich selbst transformieren:

$$d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2 + d\bar{z}^2 - c^2 d\bar{t}^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 \tag{5}$$

und für die obendrein gilt:

$$\frac{d\bar{t}}{dt} = \alpha_{44} > 0; \tag{6}$$

sie bilden wiederum eine *zehngliedrige Gruppe*, die *Lorentzgruppe*. Bemerkt man, dass wegen (5) die Transformation (4) eine orthogonale Substitution im Raume der Koordinaten $x, y, z, ct\sqrt{-1}$ darstellt, so kann man die Relationen für die Koeffizienten von (4) und die Invarianten der Gruppe leicht angeben.[211]) Übrigens kann eine etwas umfassendere „erweiterte *Lorentz*gruppe" geometrisch dadurch charakterisieren, dass sie die quadratische Fläche $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0$ in

[206] *W. Voigt*, Nachr. Ges. d. W. Göttingen 1887, p. 41.

[207] *H. Poincaré*, Rendic. Circ. mat. Palermo 21 (1906), p. 129.

[208] Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern, § 89—92 (Leiden 1895). Amsterdam Acad. Sc. Proc. 6 (1904), p. 809. Abgedr. im Heft 2 der „Fortsch. d. math. Wissenschaften" (Leipzig 1913; hrsg. *v. O. Blumenthal*).

[209] *A. Einstein*, Ann. d. Phys. (4) 17 (1905), p. 891. Abgedruckt am selben Orte.

[210] *H. Minkowski*, a) Die Grundgleichungen für die elektrodynamischen Vorgänge in bewegten Körpern, Nachr. Ges. d. W. Göttingen, math.-phys. Kl., 1908, p. 53 = Math. Ann. 68 (1910), p. 472; auch abgedr. in Fortschr. d. math. Wiss. (Leipzig 1910), Heft 1. b) Raum und Zeit, Jahresber. d. D. M. V. 18 (1909), p. 75 = Phys. Z. 10 (1909), p. 104; auch separat Leipzig 1909 und in dem in 208) genannten Heft.

[211] *H. Minkowski*,[210]) a) § 5; vgl. auch *A. Sommerfeld*, Ann. d. Phys. (4) 32 (1910), p. 749; 33 (1910), p. 649.

If one determines however those linear transformations of the variables a, b, c, t for which the fundamental laws of optics remain invariant in this sense[206]), then transformations emerge being denoted as *Lorentz-transformations* according to *H. Poincaré*'s[207]) suggestion, whose fundamental relevance for electrodynamics and physics has been approved by the studies of *H. A. Lorentz*[208]), *A. Einstein*[209]), *H. Poincaré*[207]), *H. Minkowski*[210]). There are these "affinities" of the four-dimensional x-y-z-t-space, the *Minkowski*an "world":

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}z + \alpha_{14}t + \alpha_{15}\\ \bar{y} &= \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \alpha_{23}z + \alpha_{24}t + \alpha_{25}\\ \bar{z} &= \alpha_{31}x + \alpha_{32}y + \alpha_{33}z + \alpha_{34}t + \alpha_{35}\\ \bar{t} &= \alpha_{41}x + \alpha_{42}y + \alpha_{43}z + \alpha_{44}t + \alpha_{45},\end{aligned} \tag{4}$$

which transform the differential form $dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2$ (in which c denotes the *speed of light*) into itself:

$$d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2 + d\bar{z}^2 - c^2d\bar{t}^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2 \tag{5}$$

and for which moreover it holds:

$$\frac{d\bar{t}}{dt} = \alpha_{44} > 0; \tag{6}$$

they form again a *ten-parameter group*, the *Lorentz group*. If one notes, that due to (5) the transformation (4) represents an orthogonal substitution in the space of coordinates $x, y, z, ct\sqrt{-1}$, then one can easily give the relation for the coefficients of (4) and the invariants of this group.[211]) After all one can characterized a somehow more encompassing "extended *Lorentz* group" geometrically thereby, that it transforms into itself the quadratic area $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0$ of

[206] *W. Voigt*, Nachr. Ges. d. W. Göttingen 1887, p. 41.

[207] *H. Poincaré*, Rendic. Circ. mat. Palermo 21 (1906), p. 129.

[208] Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern, § 89—92 (Leiden 1895). Amsterdam Acad. Sc. Proc. 6 (1904), p. 809. Published in Heft 2 of "Fortsch. d. math. Wissenschaften" (Leipzig 1913; hrsg. *v. O. Blumenthal*).

[209] *A. Einstein*, Ann. d. Phys. (4) 17 (1905), p. 891. Published at the same place.

[210] *H. Minkowski*, a) Die Grundgleichungen für die elektrodynamischen Vorgänge in bewegten Körpern, Nachr. Ges. d. W. Göttingen, math.-phys. Kl., 1908, p. 53 = Math. Ann. 68 (1910), p. 472; also published in Fortschr. d. math. Wiss. (Leipzig 1910), Heft 1. b) Raum und Zeit, Jahresber. d. D. M. V. 18 (1909), p. 75 = Phys. Z. 10 (1909), p. 104; also separately Leipzig 1909 and in the number referred to in 208).

[211] *H. Minkowski*,[210]) a) § 5; cf. also *A. Sommerfeld*, Ann. d. Phys. (4) 32 (1910), p. 749; 33 (1910), p. 649.

dem dreidimensionalen unendlichfernen Gebilde des vierdimensionalen x-y-z-t-Raumes in sich transformiert, und man kann daher ihre Theorie aus bekannten Untersuchungen der projektiven bzw. affinen Geometrie entnehmen.[212]) Diese erweiterte Gruppe enthält elf Parameter statt zehn, und ihre Transformationen erfüllen die Identität (5) nur bis auf einen konstanten Faktor; bestimmt man diesen etwa durch die Determinantenbedingung

$$|\alpha_{ik}| = 1 \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4),$$

so zerfällt sie noch in zwei getrennte Kontinua, von denen das eine mit der durch (6) charakterisierten Lorentzgruppe identisch ist. Der elfte Parameter der erweiterten Gruppe entspricht einer Änderung der Masseinheit im x-y-z-t-Raum; in ihm ist tatsächlich nur *eine* Masseinheit verfügbar, da Raum- und Zeitkoordinaten durch die Forderung der Invarianz der Form (5), d. h. durch die Festlegung der Lichtgeschwindigkeit verknüpft sind, während bei der Galileigruppe durch Erweiterung um zwei Parameter über Zeit- und Raumeinheit getrennt verfügt werden konnte.[213])

Lässt man nun c gegen ∞ konvergieren, so geht die erweiterte *Lorentz*gruppe über in die Gesamtheit der linearen Transformationen, welche die durch die beiden Gleichungen $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, $t = 0$ im Unendlichfernen des x-y-z-t-Raumes bestimmte quadratische Kurve (d. i. der imaginäre Kugelkreis der Räume t = konst.) in sich überführen; das ist aber gerade die erweiterte *Galilei*gruppe[214]), und es ist sonach die *Galileigruppe der Grenzfall der Lorentzgruppe bei unendlich wachsender Konstante* c. Dies hat *Minkowski* veranlasst, dem sog. *Relativitätsprinzip*, das als Forderung der *Invarianz gegenüber der Lorentzgruppe* zunächst für die Gesetze der Elektrodynamik ausgesprochen wurde, als „*Postulat der absoluten Welt*“ einen weiteren Gültigkeitsbereich zu geben[215]): Was zunächst als Invarianz gegenüber der *Galilei*gruppe erscheint, ist in Wahrheit nur eine empirische Approximation an die exakte Invarianz gegenüber der *Lorentz*gruppe mit einem im Vergleich zu den gewöhnlich auftretenden Geschwindigkeiten sehr grossen c.

Die Ansätze für die Dynamik eines Kontinuums, das diesem Relativitätspostulat unterliegt, sind in den früher aufgestellten allgemeinen

---

[212] *F. Klein*, Die geometr. Grundlagen der Lorentzgruppe, Jahresber. d. D.M.V. 19 (1910), p. 281.

[213] Vgl. *F. Klein*, a. a. O., p. 295 f.

[214] *F. Klein*, a. a. O., p. 291 f.

[215] *H. Minkowski*, [210]) a) Anhang; b) Cap. I, II.

the indefinitely far-away three-dimensional shape of the four-dimensional x-y-z-t-space, and therefore one can take the theory thereof from known studies of projective or affine geometry.[212]) This extended group contains eleven instead of ten parameters, and their transformations fulfill the identity (5) only up to a constant factor; If one determines this [factor] for instance by the determinant condition

$$|\alpha_{ik}| = 1 \qquad\qquad (i, k = 1, 2, 3, 4),$$

then [the group] decomposes into two separate continua [i. e. connected components], from which one is identical with the Lorentz group characterized by (6). The eleventh parameter of the extended group corresponds to a change of the measuring unit in the x-y-z-t-space; in [this space] there is only *one* measuring unit available, since space and time coordinates are related by the requirement of the invariance of the form (5), i. e. by fixing the speed of light, while for an extension of the Galilean group by two parameters, we could separately decide about time and spatial unit.[213])

If one lets c converge towards ∞, then the extended *Lorentz* group changes into the totality of linear transformations, which transform into itself the quadratic curve in the infinity of the x-y-z-t-space determined by the two equations $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, $t = 0$ (this is the imaginary spherical circle of the spaces $t =$ const.); this is just the extended *Galil*ean group[214]), and consequently the *Galilean group is the limit case of the Lorentz group for indefinitely growing constant c*. This has motivated *Minkowski* to give to the so-called *relativity principle*, which has been stated at first as a requirement of the *invariance with respect to the Lorentz group* for the laws of electrodynamics, a further range of validity as "postulate of the absolute world"[215]): What seems at first as invariance with respect to the *Galil*ean group, is in fact only an empirical approximation of the exact invariance with respect to the *Lorentz* group with a very large c compared to the usually appearing velocities.

The foundations of the dynamics of a continuum which respects this relativity postulate are included in the previously formulated general

[212] *F. Klein*, Die geometr. Grundlagen der Lorentzgruppe, Jahresber. d. D.M.V. 19 (1910), p. 281.

[213] Cf. *F. Klein*, op. cit., p. 295 f.

[214] *F. Klein*, op. cit., p. 291 f.

[215] *H. Minkowski*, [210]) a) Anhang; b) Cap. I, II.

Formen enthalten; es sind nur alle eingehenden Zustandsfunktionen als Invarianten bzw. Kovarianten der *Lorentz*gruppe zu wählen. Ist die Bewegung des Kontinuums wieder wie in Nr. **2**, (5) gegeben, so gestalten sich die Formeln homogener, wenn man für jedes Teilchen a, b, c als Funktion von t eine „Ortszeit“

$$\tau = \tau(a, b, c, t)$$

einführt; setzt man noch der Symmetrie halber

$$\begin{aligned} x &= x_1, & y &= x_2, & z &= x_3, & t &= x_4, \\ a &= \xi_1, & b &= \xi_2, & c &= \xi_3, & \tau &= \xi_4, \end{aligned}$$

so schreiben sich die Bewegungsgleichungen

$$x_i = x_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \qquad (i = 1, 2, 3, 4); \tag{7}$$

sie stellen bei variablem ξ_4 ein den vierdimensionalen Raum einfach überdeckendes System von Kurven (*Weltlinien*) dar, deren Gesamtverlauf ein vollständiges Bild der Bewegung giebt.[216])

Eine wesentliche Ergänzung des Relativitätspostulates bildet die Forderung, *dass alle überhaupt möglichen Geschwindigkeiten unterhalb der Lichtgeschwindigkeit c liegen*, d. h. wenn wir allgemein:

$$\frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} = x_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4) \tag{7a}$$

setzen, dass

$$x_{14}^2 + x_{24}^2 + x_{34}^2 < c^2 x_{44}^2$$

oder — geometrisch gesprochen — dass jede Tangente einer Weltlinie *innerhalb* des Kegels der Richtungen $dx^2 + dy^2 + dz^2 = c^2 dt^2$ liegt. Äquivalent damit ist die Tatsache, dass man jedes Teilchen zu jeder Zeit durch eine passende *Lorentz*transformation (4) „auf Ruhe transformieren“ kann, d. h. dass man zu einem solchen neuen Koordinatensystem $\bar{x}_i$ übergehen kann, in dem bei analoger Bezeichnung wie in (7a) für den betrachteten Wertekomplex $\xi_1, \dots \xi_4$

$$\bar{x}_{14} = \bar{x}_{24} = \bar{x}_{34} = 0$$

wird. Alle möglichen „Ruhtransformationen“ unterscheiden sich voneinander, abgesehen von den willkürlich bleibenden Größen $\alpha_{15}, \dots \alpha_{45}$, nur durch eine gewöhnliche orthogonale Transformation der drei Koordinaten $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$; in den verschiedenen „Ruhkoordinatensystemen“ werden also die Deformationsgrössen erster Ordnung $\bar{x}_{ik}$ wohl von-

---

[216] *H. Minkowski*, [210]) b).

forms; we only have to choose all relevant state functions as invariants or covariants of the *Lorentz* group. If the motion of the continuum is given again as in No. **2**, (5), then the formulas arrange more homogeneously when one introduces for every particle a, b, c a "local time"

$$\tau = \tau(a, b, c, t)$$

as function of time t; by setting for the sake of symmetry

$$\begin{aligned} x &= x_1, \quad y = x_2, \quad z = x_3, \quad t = x_4, \\ a &= \xi_1, \quad b = \xi_2, \quad c = \xi_3, \quad \tau = \xi_4, \end{aligned}$$

then the equations of motion write as

$$x_i = x_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \qquad (i = 1, 2, 3, 4); \tag{7}$$

they represent for varying ξ_4 a system of curves (*world lines*) simply covering the four-dimensional space [. Curves] whose whole courses give a complete picture of the motion.[216])

An essential supplement of the relativity postulate forms the requirement, *that all generally possible velocities are below the speed of light*, i. e. when we generally set

$$\frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} = x_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4), \tag{7a}$$

that

$$x_{14}^2 + x_{24}^2 + x_{34}^2 < c^2 x_{44}^2$$

or — geometrically spoken — that every tangent to a world line lies *within* the cone of the directions $dx^2 + dy^2 + dz^2 = c^2 dt^2$. Equivalently to this is the fact that one can "transform to rest" every particle for every time by a suitable *Lorentz* transformation (4), i. e. that one can change over to a new coordinate system $\bar{x}_i$, in which for similar labeling as in (7a) for the considered tuple $\xi_1, \ldots \xi_4$

$$\bar{x}_{14} = \bar{x}_{24} = \bar{x}_{34} = 0.$$

All possible "transformations of rest" differ, apart from the arbitrarily remaining quantities $\alpha_{15}, \ldots \alpha_{45}$, only by an ordinary orthogonal transformation of the three coordinates $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$; in the different "coordinate systems of rest" consequently all deformation quantities of first order $\bar{x}_{ik}$ possibly will be

---

[216] *H. Minkowski*, [210]) b).

einander verschieden sein können, hingegen werden die den orthogonalen Koordinatentransformationen gegenüber invarianten eigentlichen „Formänderungskomponenten“ (Nr. **9**, (1))

$$e_i = \tfrac{1}{2}(\bar{x}_{1i}^2 + \bar{x}_{2i}^2 + \bar{x}_{3i}^2 - 1), \quad g_{ik} = \bar{x}_{1i}\bar{x}_{1k} + \bar{x}_{2i}\bar{x}_{2k} + \bar{x}_{3i}\bar{x}_{3k} \qquad (i, k = 1, 2, 3) \tag{8}$$

unabhängig von der speziell gewählten Ruhtransformation sein. Denkt man die $\bar{x}_{ik}$ durch ihre Ausdrücke in den ursprünglichen Bewegungsfunktionen ersetzt, so sind diese *Ruhdeformationen* die *einzigen Invarianten erster Ordnung*, die das System der Weltlinien (7) gegenüber der *Lorentz*gruppe aufweist; sie sind zugleich auch von der willkürlichen Wahl des Parameters $\xi_4 = \tau$ unabhängig.[217])

Eine virtuelle Variation der Bewegung des Kontinuums stellt sich nun durch vier Funktionen δx_i $(i = 1, \dots 4)$ dar; da die Variable $\xi_4 = \tau$ willkürlich ist, bedeutet das für die Bewegung des Kontinuums selbst, d. h. für das System der Weltlinien nur wieder drei willkürliche Funktionen. Die virtuelle Arbeit irgendwelcher am Kontinuum angreifender Volumkräfte im Intervall $\tau_1 \leqq \tau \leqq \tau_2$ erhält dann den Ausdruck

$$\delta A = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \iiint_{(V_0)} \sum_{i=1}^{4} X_i \delta x_i \varrho_0 d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3. \tag{9}$$

Dabei bedeuten X_1, X_2, X_3 analog zu Nr. **3a**, S. 613, wenn man ihnen noch den Faktor $\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{x_{44}}$ hinzufügt, die auf die Masseneinheit des undeformierten Mediums im ξ_1-ξ_2-ξ_3-Raume berechneten Kraftkomponenten; bemerkt man ferner, dass eine Variation, für die an jeder Stelle

$$\delta x_1 : \delta x_2 : \delta x_3 : \delta x_4 = x_{14} : x_{24} : x_{34} : x_{44} \tag{10}$$

ist, nur eine Verschiebung der Weltlinien in sich, also eine Änderung des Parameters τ bedeutet, und dass für sie also δA identisch verschwinden muss, so folgt, dass

$$-X_4 = \frac{1}{x_{44}} \sum_{i=1}^{3} x_{i4} X_i = X_1 \frac{dx_1}{dt} + X_2 \frac{dx_2}{dt} + X_3 \frac{dx_3}{dt} \tag{9a}$$

— wiederum bis auf den Faktor $\frac{1}{x_{44}}$ — die in der Zeiteinheit an der Masseneinheit des undeformierten Mediums geleistete Arbeit bedeutet.[218])

[217] *M. Born*, Ann. d. Phys. (4) 30 (1909), p. 1; speziell § 2. — *G. Herglotz*, Ann. d. Phys. (4) 36 (1911), p. 493; speziell § 1, 2.

[218] *H. Minkowski*,[210]) a) Anhang; *G. Herglotz*, a. a. O., p. 506.

different from each other, whereas the effective "shape change components" (No. **9**, (1))

$$
\text{(8)} \qquad \begin{aligned} e_i &= \tfrac{1}{2}(\bar{x}_{1i}^2 + \bar{x}_{2i}^2 + \bar{x}_{3i}^2 - 1), \\ g_{ik} &= \bar{x}_{1i}\bar{x}_{1k} + \bar{x}_{2i}\bar{x}_{2k} + \bar{x}_{3i}\bar{x}_{3k} \end{aligned} \qquad (i, k = 1, 2, 3)
$$

being invariant with respect to the orthogonal coordinate transformations will be independent of the specially chosen transformations of rest. If one thinks of $\bar{x}_{ik}$ being substituted by their expressions of the original motion, then these *deformations of rest* are the *only invariants of first order*, which the system of world lines (7) shows with respect to the *Lorentz* group; they are likewise also independent of the arbitrary choice of the parameter $\xi_4 = \tau$.[217])

A virtual variation of the motion of the continuum is represented now by the four functions δx_i ($i = 1, \ldots 4$); since the variable $\xi_4 = \tau$ is arbitrary, this implies that the motion of the continuum itself, i. e. the the system of world lines, [is described] only [by] three arbitrary functions. The virtual work of any volume forces applied in the interval $\tau_1 \leqq \tau \leqq \tau_2$ is then assumed to be given by the expression

$$
\text{(9)} \qquad \delta A = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \iiint\limits_{(V_0)} \sum_{i=1}^{4} X_i \delta x_i \varrho_0 d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3.
$$

Thereby by introducing the factor $\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{x_{44}}$ to X_1, X_2, X_3, they denote similarly to No. **3a**, p. 613, the force components computed with respect to unit mass of the undeformed medium in the ξ_1-ξ_2-ξ_3-space; If one notices furthermore, that a variation for which at every point

$$
\text{(10)} \qquad \delta x_1 : \delta x_2 : \delta x_3 : \delta x_4 = x_{14} : x_{24} : x_{34} : x_{44}
$$

implies only a displacement of the world line in itself, thus [implies] a change of the parameter τ, and that for [this variation] δA consequently has to vanish identically, then it follows that

$$
\text{(9a)} \qquad -X_4 = \frac{1}{x_{44}} \sum_{i=1}^{3} x_{i4} X_i = X_1 \frac{dx_1}{dt} + X_2 \frac{dx_2}{dt} + X_3 \frac{dx_3}{dt}
$$

— again up to the factor $\frac{1}{x_{44}}$ — which denotes the work done at the mass unit of the undeformed medium in the unit of time.[218])

---

[217] *M. Born*, Ann. d. Phys. (4) 30 (1909), p. 1; especially § 2. — *G. Herglotz*, Ann. d. Phys. (4) 36 (1911), p. 493; especially § 1, 2.

[218] *H. Minkowski*,[210]) a) Anhang; *G. Herglotz*, op. cit., p. 506.

Analog wird (vgl. Nr. **5**, (10)) als Arbeit irgendwelcher am Kontinuum angreifenden Spannungen bei einer virtuellen Verrückung das Integral

$$\delta A_1 = -\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \iiint_{(V_0)} \sum_{i,k=1}^{4} X_{ik} \frac{\partial \delta x_i}{\delta \xi_k} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3, \tag{11}$$

die „*Spannungswirkung*" von *H. Minkowski* [219]), angesetzt; da für die virtuelle Verrückung (10) auch δA_1 identisch verschwinden muss, ergeben sich die Identitäten

$$\sum_{i=1}^{4} x_{i4} \sum_{k=1}^{4} \frac{\partial X_{ik}}{\partial \xi_k} = 0 \tag{11 a}$$

im Inneren des Bereiches V_0 und

$$\sum_{i=1}^{4} x_{i4} \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \omega}{\partial \xi_k} X_{ik} = 0 \tag{11 b}$$

am Rande, wofern dessen Gleichung

$$\omega(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0$$

ist.[220]) Die schon mehrfach angewandten Umformungen gestatten aus dem verallgemeinerten *Hamilton*schen Prinzip, das das Verschwinden von

$$\delta A + \delta A_1 = 0 \tag{12}$$

für alle willkürlichen nur für $\tau = \tau_1$ und $\tau = \tau_2$ identisch verschwindenden virtuellen Verrückungen δx_i fordert, die Bewegungsgleichungen zu entnehmen:

$$\varrho_0 X_i + \sum_{k=1}^{4} \frac{\partial X_{ik}}{\partial \xi_k} = 0 \quad \text{innerhalb } V_0, \tag{12 a}$$

$$(i, 1, \ldots 4)$$

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \omega}{\partial \xi_k} X_{ik} = 0 \quad \text{auf dem Rande von } V_0. \tag{12 b}$$

Vermöge der Identitäten (11a), (11b) ist je eine dieser vier Gleichungen von den drei anderen abhängig. Analog wie früher (Nr. **3**c, S. 617 f.) kann man in (11) statt der ξ_i die x_i als unabhängige Variable einführen, und man erhält dann eine den Gleichungen (5) von Nr. **3** entsprechende Form der Bewegungsgleichungen, wie sie von *Minkowski* angegeben wurde.[221])

---

[219] *H. Minkowski*, [210]) a) Anhang, Formel (17)

[220] *G. Herglotz*, a. a. O., p. 506 f.

[221] *H. Minkowski*, [210]) a) Anhang, Formel (20). Die Gleichungen erscheinen

Analogously (cf. No. **5**, (10)), the integral

$$\delta A_1 = -\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \iiint_{(V_0)} \sum_{i,k=1}^{4} X_{ik} \frac{\partial \delta x_i}{\partial \xi_k} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3,^{\dagger} \tag{11}$$

is assumed as work [expression] for any stresses applied at the continuum for a virtual displacement [i. e.] the "*stress action*" of *H. Minkowski* [219]; since for the virtual displacement (10) also δA_1 has to vanish identically, the [following] identities are obtained

$$\sum_{i=1}^{4} x_{i4} \sum_{k=1}^{4} \frac{\partial X_{ik}}{\partial \xi_k} = 0 \tag{11 a}$$

in the interior of V_0 and

$$\sum_{i=1}^{4} x_{i4} \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \omega}{\partial \xi_k} X_{ik} = 0 \tag{11 b}$$

at the boundary, provided that the equation thereof is[220])

$$\omega(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0.$$

The transformations applied already several times allow to extract the equations of motion from the generalized *Hamilton*'s principle, which demands the vanishing of

$$\delta A + \delta A_1 = 0 \tag{12}$$

for all arbitrary virtual displacements [which] vanish identically only for $\tau = \tau_1$ and $\tau = \tau_2$:

$$\left.\begin{aligned} &(12\text{ a}) \qquad \varrho_0 X_i + \sum_{k=1}^{4} \frac{\partial X_{ik}}{\partial \xi_k} = 0 \quad \text{in } V_0, \\ &(12\text{ b}) \qquad \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \omega}{\partial \xi_k} X_{ik} = 0 \quad \text{on the boundary of } V_0. \end{aligned}\right\} \quad (i, 1, \ldots 4)$$

Due to the identities (11a), (11b) each one of these four equations is dependent on the other three. Analogously to before (No. **3**c, p. 617 f.) in (11) one can introduce instead of the ξ_i the x_i as independent variables, and one obtains then a form of the equations of motion corresponding to the equations (5) of No. **3**, as they have been given by *Minkowski*.[221])

---

† The δ in the denominator of the original is exchanged by a ∂ – (TN)

[219] *H. Minkowski, [210]) a) Anhang, formula (17)*

[220] *G. Herglotz*, op. cit., p. 506 f.

[221] *H. Minkowski*, [210]) a) appendix, formula (20). The equations appear

Über die Art der Abhängigkeit der Spannungskomponenten von den Bewegungsfunktionen (7) kann zunächst ganz frei verfügt werden, wenn nur die Relationen (11a), (11b) erfüllt sind; es sei hier nur auf den Potentialansatz Nr. **7**, (26) eingegangen, der auf die von *G. Herglotz* [222]) angegebene Übertragung der Formeln der gewöhnlichen Elastizitätslehre (Nr. **9**, (2), (3)) in die Relativitätstheorie der Lorentzgruppe führt. Es sei also

$$-\delta A_1 = +\delta\Phi = \delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} dt \iiint_{(V_0)} \varphi(x_{ik}) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3, \tag{13}$$

wo φ nur von den ersten Ableitungen der Bewegungsfunktionen abhängen möge; dann bleibt Φ bei allen *Lorentz*transformationen nur dann ungeändert, wenn φ bis auf den Faktor x_{44} lediglich von den sechs Ruhdeformationen (8) abhängt:

$$\varphi = \varphi(e_1, e_2, e_3, g_{12}, g_{23}, g_{31}) \cdot x_{44}. \tag{13 a}$$

Durch Vergleich von (13) und (11) folgt nun

$$X_{ik} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_{ik}}, \tag{13 b}$$

und die Substitution dieser Werte in (12a), (12b) liefert die von *Herglotz* angegebenen Grundgleichungen. [223])

Minkowski hat die Analogie mit dem klassischen *Hamilton*schen Prinzip noch weiter getrieben, indem er von den Arbeitsausdrücken, in die hier von vornherein die kinetischen Glieder mit eingehen, allgemein einen rein kinetischen Teil abtrennt. [224]) Betrachtet man die Umgebung einer bestimmten Stelle x_i in einem dieser Stelle zugehörigen Ruhkoordinatensystem $\bar{x}_i$ und misst Volumen und Masse des Mediums in dem $\bar{x}_1$-$\bar{x}_2$-$\bar{x}_3$-Raume, so heißt die für den Punkt $\bar{x}_i$ sich ergebende Massendichte $\bar{\varrho}$ die Ruhdichte dieser Stelle. *Minkowski* lässt alsdann die Variation des als *Massenwirkung* bezeichneten, über den betrachteten vierdimensionalen Raum erstreckten Integrales

$$P = \iiiint \bar{\varrho}\, dx\, dy\, dz\, dt \tag{14}$$

---

in ein wenig modifizierter Form, da bei ihm der Parameter τ stets die nur durch (15) definierte „Eigenzeit" ist und also bei der Variation stets eine Nebenbedingung und ein Lagrangescher Faktor auftritt.

[222] *G. Herglotz*, a. a. O. p. 503 ff. — Vgl. auch für den speziellen Fall der Hydrodynamik — analog Nr. **10** — die Ansätze von *E. Lamla* Ann. d. Phys. (4) 37 (1912), p. 772.

[223] a. a. O., p. 505 f.

[224] *H. Minkowski*, [210]) a) Anhang, Formel (7) bis (14).

At first, the class with dependence of the stress components on the motion (7) can be chosen completely freely, as long as the relations (11a), (11b) are fulfilled; here only the potential-based approach No. **7**, (26) is considered, which leads to the transmission of the formulas from the ordinary theory of elasticity (No. **9**, (2), (3)) to the theory of relativity of the Lorentz group given by *G. Herglotz* [222]). Let therefore

$$(13) \qquad -\delta A_1 = +\delta\Phi = \delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} dt \iiint_{(V_0)} \varphi(x_{ik}) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3,$$

where φ may depend only on the first derivatives of the motion; then Φ remains unchanged for all *Lorentz* transformations only if φ, up to the factor x_{44}, depends merely on the six rest deformations (8):

$$(13\text{ a}) \qquad \varphi = \varphi(e_1, e_2, e_3, g_{12}, g_{23}, g_{31}) \cdot x_{44}.$$

Comparing (13) and (11) it follows now that

$$(13\text{ b}) \qquad X_{ik} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_{ik}},$$

and the substitution of these values into (12a), (12b) leads to the fundamental equations given by *Herglotz*.[223])

Minkowski pushed the analogy with the classical *Hamilton*'s principle further by separating from the work expressions, in which here from the beginning the kinetic terms are contained, generally a purely kinetic part.[224]) If one considers in the neighborhood of a certain point x_i in a corresponding rest coordinate system $\bar{x}_i$ and [if one] measures volume and mass of the medium in this $\bar{x}_1$-$\bar{x}_2$-$\bar{x}_3$-space, then the mass density $\bar{\varrho}$ which is given for the point $\bar{x}_i$ is called rest density at this point. *Minkowski* lets then add the variation of the so-called *mass action*, [i. e.] the integral extended over the considered four-dimensional space

$$(14) \qquad P = \iiiint \bar{\varrho}\, dx\, dy\, dz\, dt$$

in slightly modified form, since for him the parameter τ is always the "proper time" defined by (15) and thus for a variation it does appear always a constraint and a Lagrange multiplier.

[222] *G. Herglotz*, op. cit. p. 503 ff. — Cf. also for the special case of hydrodynamics — analogous to No. **10** — the foundations of *E. Lamla* Ann. d. Phys. (4) 37 (1912), p. 772.

[223] op. cit., p. 505 f.

[224] *H. Minkowski*,[210]) a) appendix, formula (7) to (14).

additiv zu (12) hinzutreten, wobei während der Variation die Masse konstant zu halten ist. Verwendet man nun eine spezielle Ortszeit τ, nämlich eine solche, die der Relation

$$c^2\left(\frac{\partial x_4}{\partial \tau}\right)^2 - \left(\frac{\partial x_1}{\partial \tau}\right)^2 - \left(\frac{\partial x_2}{\partial \tau}\right)^2 - \left(\frac{\partial x_3}{\partial \tau}\right)^2 = c^2 \tag{15}$$

genügt, so wird δP bis auf Randglieder gleich

$$\iiiint \bar{\varrho}\left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial \tau^2}\delta x_1 + \frac{\partial^2 x_2}{\partial \tau^2}\delta x_2 + \frac{\partial^2 x_3}{\partial \tau^2}\delta x_3 - \frac{\partial^2 x_4}{\partial \tau^2}\delta x_4\right) dx\,dy\,dz\,dt,$$

und die Faktoren der δx_i treten — in völliger Analogie zu den Grundgleichungen der *Newton*schen Mechanik — zu den Gleichungen (12) hinzu. *M. Born* [225]) hat gezeigt, wie man den Massenfaktor auch als *Lagrange*schen Faktor der Nebenbedingung (15) einführen kann.

(Abgeschlossen im August 1913.)

[225] Ann. d. Phys. (4) 28 (1909), p. 571.

to (12), whereas during the variation the mass has to be kept constant. If one uses now a special proper time τ, namely the one, which satisfies the relation

$$c^2\left(\frac{\partial x_4}{\partial \tau}\right)^2 - \left(\frac{\partial x_1}{\partial \tau}\right)^2 - \left(\frac{\partial x_2}{\partial \tau}\right)^2 - \left(\frac{\partial x_3}{\partial \tau}\right)^2 = c^2, \tag{15}$$

then δP becomes up to boundary terms equal to

$$\iiiint \bar{\varrho}\left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial \tau^2}\delta x_1 + \frac{\partial^2 x_2}{\partial \tau^2}\delta x_2 + \frac{\partial^2 x_3}{\partial \tau^2}\delta x_3 - \frac{\partial^2 x_4}{\partial \tau^2}\delta x_4\right) dxdydzdt,$$

and the factors of δx_i are added — in complete analogy to the fundamental equations of the *Newton*ian Mechanics — to the equations (12). *M. Born* [225]) has shown, how one can introduce the mass factor also as *Lagrange* multiplier of the constraint (15).

(Completed in August 1913.)

[225] Ann. d. Phys. (4) 28 (1909), p. 571.

3.3 Translator's commentaries

The contribution of Hellinger is extraordinary and strongly contrasts with others because of its sharp, precise and meaningful development of a physical theory of continuous media. The side-by-side translation allows Hellinger's concise argumentations to speak for themselves. However, some statements shall not remain uncommented, either to highlight or to relate them to more current developments in the field. Only the topics to which the author is most familiar with are commented. Scientists from complementary fields should be encouraged to do the same for the remaining parts. Besides the mere rediscovery and diffusion of the work, a thorough discussion among scholars is exactly the motivation of this translation.

The notion of a continuum

In order to formulate a general field theory in such a compact form as done by Hellinger, one must accept the concept of a continuum. While many predecessors of Hellinger such as Cauchy, Navier or Piola had been involved in discussions about the atomistic structure of the matter, Hellinger abstained from making any relation to the microscopic composition of the material. In No. 2, a three-dimensional extended continuous medium is introduced as a subset of the three-dimensional space representing the subset of spatial points occupied by the material points in the current configuration. Hellinger introduced in a very modern way the nonlinear kinematics of the three-dimensional continuous body in terms of placement functions relating the subset of material points with the current configuration and even formulated the restriction that the determinant of the corresponding gradient should never be zero. All further introduced field objects are then functions which have as domain either the set of material points (a, b, c) or the set of the spatial points occupied by the material points in the current configuration (x, y, z).

Even though the atomistic structure is not of interest in this article, Hellinger discussed the relation between discrete and continuous systems right after the postulation of the principle of virtual displacements for the three-dimensional continuum on p. 615. There, it is written how discrete systems can approximate the behavior of continuous ones. Moreover, it is pointed out that there is still no systematic and rigorous theory that can deal with such an idea. In fact, Hellinger anticipated the problem of homogenization of discrete systems, which consists to prove that suitable ε-families of solutions of discrete problems converge, when suitable continuation processes are introduced, to the solution of a continuous problem. In this kind of rigorous problems, the concept of Gamma-convergence is now playing a crucial role. The literature on this subject is becoming immense: we quote here [125, 23] among the most interesting papers obtaining first gradient continua as continuous limit while, for what concerns the papers where a higher gradient continuum limit is obtained, we cite [119] and [9, 10, 138, 27].

A less technical approach was already formulated by Hellinger's predecessor Gabrio Piola, who considered a continuum as an approximation needed to deduce results with tractable mathematics. Piola's idea was simple. The "true", or say, the most accurate mathematical model for matter is given by a discrete molecular theory. However, the problems to be solved in using this theory directly are too difficult. Therefore, Piola suggested to homogenize the discrete micro-theory and to deduce the most suitable macro-theory, see Capitolo VI of [120] or pp. 146–164 of [42] for the English translation and [38] for further comments. The therein proposed heuristic variational asymptotic procedure is thus called Piola's micro-macro identification procedure and can be summarized by the following three steps:

1. specify the "most likely" macro-motion once a micro-motion with a scaling parameter ε is chosen;
2. formulate the principle of virtual displacements at micro- and macro-level;
3. identify the virtual work contributions of the micro- and macro-level when the scaling parameter ε tends to zero;

It is then the continuous macro-theory which Piola hoped to use for formulating and solving deformation problems of interest in applications. For some examples of different variants of Piola's micro-macro identification procedure, we refer to [46, 66, 17, 16].

Variational principles

In the introduction, No. 1, one finds maybe one of the most precise discussions on variational principles ever written. In an extraordinary concise way Hellinger explained what he means by variational principles; and what should be understood under variational principles. His statement is reinforced by the following lines. The calculus of variations is a mathematical theory whose aim is to find extrema for functionals, usually expressed by means of integrals. To find these extrema one can calculate the first variation of the integral operators involved, by obtaining some linear functionals of the variations of the unknown fields. To base continuum mechanics on an extremum principle may be regarded as a too hazardous choice. Therefore, following Lagrange, we prefer to base the postulation of mechanics by formulating a principle *having the form* of the necessary criterion for being an extremum. This point is rather abstract, but its implications have a marvelous impact, allowing for a very general postulation of physical theories (see for instance [122, 124, 123, 33, 118, 56, 108, 19, 22, 26, 24, 130, 58]). This postulation is based on the principle of virtual displacements also known as principle of virtual work, principle of virtual velocities, principle of virtual power, howsoever you want to call this principle. Note that the first form of this principle has been attributed to the Pythagorean philosopher Archytas of Tarentum, see [165].

Hellinger clearly stated that the unifying mathematical form for all individual physical theories is given by variational principles. He gave plenty of examples and formulated the principle of virtual displacements for the three-dimensional continuum for statics and dynamics, see Eq. (4) in No. 3b and Eq. (1) in No. 5a, for media with oriented particles, see Eq. (2) in No. 4b or No. 7b for the hyperelastic case, for thermodynamics Eq. (2) in No. 15, and many more. Another advantage of the variational formulation is that the principle is formulated using a single formula. This had already been recognized by Gabrio Piola who talked about "quel principio uno, di dove emanano tutte le equazioni che comprendono innumerabili verità", i.e., that fundamental principle from which are emanating all those equations which include innumerable truths, see [42, Chapter 1, p. 110]. Remark that Hellinger accepts in a paper dated 1913 a statement as obvious which is still nowadays denied by some authors. This statement is the following: when formulating a variational principle (in the wider sense given to this expression by Lagrange and Piola, but also when accepting the more restrictive sense considered by Hamilton) one gets "for free" the required boundary conditions. Note that those who refuse variational principles sometimes claim that boundary conditions need to be determined on "physical grounds".

The principle of virtual displacements

Even though "Principle of Virtual Work" is the more contemporary name for the fundamental variational principle in mechanics, we will stick in this commentaries with Hellinger's terminology. Hellinger was extremely precise in the use of terminology, which can be underlined by the following word choices. For the English "displacement", in German there are the two synonyms "Verschiebung" and "Verrückung". While "Verrückung" is a rather old-fashioned word, nowadays it is more common to use "Verschiebung". Nevertheless, throughout his paper, Hellinger distinguished between actual and virtual displacements by attributing to them the words "Verschiebung" and "Verrückung", respectively. In modern literature mainly the word "Verschiebung" is in use. And it is this virtual displacement, which Hellinger introduced very rigorously in No. 2a in terms of Gâteaux derivatives, i.e., variations of the current placement field. So, there is absolutely nothing obscure about virtual displacements as sometimes claimed by opposers of variational principles. Virtual displacements can be as rigorously defined as velocities or infinitesimal displacements in the linearized theory. All of which can be expressed as functions with the set of material points or the current configuration as domain.

In No. 3a, Hellinger wrote unambiguously that the notion of work is the elemental quantity to base on a mechanical theory. With this conception of mechanics, he is a follower of the ideas advocated by d'Alembert and Lagrange. These ideas are explained in a nutshell as follows. First one discusses the kinematics and only then one introduces with the notion of work the laws of dynamics governing the motion of the considered system. In fact, Hellinger started formulating the fundamental problem of mechanics guided by the conceptual frame set up by d'Alembert, see the first edition of the "Traité de dynamique" [34], page viij,ix (end,beginning):

> «Mais comment arrive-t'il que le Mouvement d'un corps suive telle ou telle loi particuliére? C'est sur quoi la Geométrie seule ne peut rien nous apprendre, & c'est aussi ce qu'on peut regarder comme le premier Problême qui appartienne immédiatement à la Méchanique.
>
> On voit d'abort fort clairement, qu'un Corps ne peut se donner le Mouvement lui-même. Il ne peut donc être tiré du repos, que par l'action de quelque cause étrangére.»[1]

The external cause ("cause étrangére") evoked by d'Alembert was called by Hellinger force or stress. He used the word force exactly in the same spirit and with the same intentions as d'Alembert. The forces and stresses "applied on" or "applied in" a continuous body have in common, or, are characterized by the fact that they expend a virtual work on virtual displacements. Indeed on page xxv (loc. cit.) d'Alembert warns the reader:

> «Au reste, comme cette seconde Partie est destinée principalement à ceux, qui déja instruits du calcul différentiel & intégral, se seront rendus familiers les principes établis dans la premiére, ou seront déja exercés à la solution des Problêmes connus & ordinaires de la Méchanique ; je dois avertir que pour éviter les circonlocutions, je me suis souvent servi du terme obscur de force, & de quelques autres qu'on employe communément quand on traite du Mouvement des Corps ; mais je n'ai jamais prétendu attacher à ces termes d'autres idées que celles qui résultent des principes que j'ai établis, soit dans cette Préface, soit dans la premiére Partie de ce Traité.»[2]

On p. 611, Hellinger gave maybe one of the mathematical most sophisticated and rigorous definition of the virtual work at that time and defined the virtual work as a coordinate independent linear homogeneous function on the space of all possible virtual displacements. This very modern statement in its brief clarity should not need any comment if it were accepted without controversies. Unfortunately, many debates were started about its content even in relatively more modern works and conference discussions. Hence, we remark here that:

- The forces and stresses appear naturally in variational postulations as the dual quantities with respect to virtual displacements and virtual deformations, respectively. They are univocally characterized by the work functionals, so that they do not need to be introduced as independent concepts. For more details see for instance [47, 73, 75, 74, 76, 44, 77, 55].
- Hellinger's mathematical knowledge becomes apparent in the elegant way in which he treats this point. He is a contemporary of Fréchet and Gâteaux and therefore it is most likely that he knew and mastered their ideas and methods.

---

[1] «But how it happens that the motion of a body follows this or this other particular law? This is where the Geometry, alone, cannot teach us anything and this is what one can regard as the first Problem which belongs immediately to Mechanics.

One can see immediately [and] really clearly that a body cannot give to him-self a motion. It therefore can be subtracted from a state of rest only by the action of some external cause.»

[2] «On the other hand, as this second part is addressed mainly to those who being already learned in differential and integral calculus managed to become familiar with the principles established in the first one, I must warn [these readers] that for avoiding the circumlocutions I have often used the obscure term "force", and some other terms which one commonly employs when he treats the motion of bodies; but I never wanted to attribute to these terms any other ideas [different] from those which result from the principles which I have established, either in this Preface, or in the first Part of this Treatise.»

Moreover, he shows a vision on the concept of distributions which is anticipating the revolutionary results by Laurent Schwartz and their applications to continuum mechanics. Concerning this point the reader is referred to [47, 74].

In Eq. (1) of No. 2, Hellinger introduced a virtual work that consists of three parts and restricted himself to a special case sufficient for the treatment of classical continua. However, he was absolutely aware of possible generalizations by adding more expressions depending on the virtual displacements and their derivatives at certain locations of the continuum as well as line, surface and volume integrals of such expressions. Thus, Hellinger had already anticipated the structure theorems that were proven by Laurent Schwartz, [137], for distributions and that were explicitly considered in [47] and [46, 43, 41] to develop an Nth-gradient theory of continuum mechanics.

Hellinger formulated the virtual work of the continuum in the actual configuration. On pp. 614, considering an arbitrary subdomain of the continuum, he showed, by integrating by parts, how the stress distribution induces surface contact forces, i.e. the stress vectors, on the boundary of the subdomain. In fact, this leads to the linear relation between the stress vector and the outward pointing unit normal of the subdomain's boundary surface also known as Cauchy's tetrahedron theorem. The integration by parts had already been performed by Piola (see [42, 38]) because of exactly the same reason: to transform the volume expression of internal work into the expression of work expended by surface forces. The delicate question concerning the priority between Piola and Cauchy in the introduction of surface contact forces (we mean the concept generalizing the concept of pressure to solids) needs a very detailed scrutiny, if ever one will be able to solve it. However, the priority of the introduction of the aforementioned integration by parts process for "deducing" the existence of contact forces inside a deformable continuous body has to be attributed to Piola, in both the reference and the current configuration.

In No. 3b., the principle of virtual displacement for the three-dimensional continuum is given. And as promised by Hellinger in the introduction, the local equilibrium equations, Eq. (5a), together with the force boundary conditions, Eq. (5b), are a direct consequence of the principle of virtual displacements. Using the coordinate independence of the work expressions, the equilibrium equations are presented also in terms of the coordinates of the set of material points . In particular, the relation between the Cauchy stress and the 1$^{\text{st}}$ Piola-Kirchhoff stress is given in Eq. (8).

In No. 3d, the balance of forces and moments for the body and all its subbodies in integral form are obtained by applying smoothened discontinuous virtual displacements. The section gives thus a connection to the so called "rigidification principle", which states that every part cut out of the deformable continuum exposed to the volume forces applied within the part and the forces applied on the surface must be in equilibrium like a rigid body, see also the discussion in [55]. Using the presented limit argument in the construction of smoothened discontinuous virtual displacements, it seems possible to give an answer to the following question: In formulating the principle of virtual work, do we need to assume that the virtual work vanishes for *all* (regular) virtual displacements of *all* (suitably regular) subbodies of the considered body? Or is it sufficient to assume that it vanishes for *all* regular displacements of the whole body only? Indeed, Hellinger had mastered the concept of mollifiers in three-dimensional Euclidean space whose existence Urysohn proved in a more general setting few years later.[3]

In the last part of No. 3d, Hellinger mentioned also his understanding of Piola's approach to continuum mechanics or rather to the mechanics of rigid bodies. It is not clear if he was aware of the true content of Piola's works. What Hellinger referred to are statements which can be found in Piola's works. However, Piola developed the Lagrangian theory of deformable bodies and, by considering the subset of rigid virtual displacements, he proved that balance of forces and moments are necessary conditions for the equilibrium. Moreover, Piola proved that introducing the constraint of rigidity makes the stress undetermined and therefore he assessed the logical necessity of the introduction of the theory of deformable bodies. It is not clear how the linguistic barrier prevented Hellinger to appreciate completely the value of Piola's works (see [42, 38]).

We close this section by a further comment to clarify that there is not a "petitio principii"[4] hidden in Hellinger's statement of the principle of virtual displacements, how unfortunately too often sustained by the opposers of d'Alembertian-Lagrangian postulation of mechanics and in particular in [155] p. 595 where one can read in the first footnote:

> «The derivation given by HELLINGER [. . .] fails through *petitio principi*, since the stress components appear in the original variational principle. [. . .] Existence of the stress tensor can be proved from variational principles which assume the existence of an internal energy having a special functional form.»

The footnote is a comment on the following passage:

> «[...] no variational principle has ever been shown to yield Cauchy's fundamental theorem in its basic sense as asserting that existence of the stress vector implies the existence of the stress tensor.»

Simply the authors of the aforementioned statements do not want to follow the reasonings presented in the works by d'Alembert, Lagrange, Piola and finally Hellinger: the fundamental, primitive concept in mechanics is *(virtual) work* while contact force is a derived concept. One postulates that work is a linear and continuous functional on a set of test functions, i.e., virtual displacements, and then, via the celebrated theory of distributions by L. Schwartz or via a suitable series of regularity ansatz, one gets a representation of work in terms of Nth order stresses which are defined as

[3] Urysohn lemma: For any two disjoint closed sets A and B of a normal space X there exists a real-valued function f, continuous at all points, taking the value 0 at all points of A, the value 1 at all points of B and for all $x \in X$ satisfying the inequality $0 \leq f(x) \leq 1$. See for instance [13, 101].

[4] We resist to use in this context the most common English expression "begging the question", as it is usually phrased, as unfortunately it originated in the 16th century as a wrong translation of the Latin correct expression "petitio principii". A correct English translation could be: "assuming the initial point" or even better "a fallacy in which a conclusion is taken for granted in the premises". Remark that obviously very often the conclusion may be accepted in an indirect way such that its presence within the premise is hidden or at least not easily apparent.

the dual in work of Nth gradient of virtual displacements. There is no logical reason for which contact actions (in the case of first gradient continua they reduce to contact surface forces) must be the most fundamental concept. Actually Piola, Hellinger and many others (see [75, 94, 47, 38, 66, 48, 133] and references cited therein) prefer to consider the stress as the dual to the gradient of the virtual displacement field and to deduce the contact actions as concepts derived in terms of stresses.

To be more precise, d'Alembertian postulation of Mechanics is based on the principle of virtual displacements which is formulated following the subsequent steps:

1. to introduce an admissible set of configurations and an admissible kinematics, specifying the set of all possible motions,
2. to introduce the required work functionals in order to model ALL interactions of the system, including the inertial work, which was considered explicitly by d'Alembert and is given in terms of kinematic quantities including accelerations.[5]
3. to postulate that the sum of internal work plus external work plus inertial work, hence the total virtual work, is vanishing.

In this postulation scheme, the word force and stress is simply used to describe the structure of the work functionals and should not be considered as primitive concept. In particular, there is no need to postulate any balance of forces. Certainly, these balances can be derived as it was done by Hellinger in No. 3d or in [66]. It seems that Cauchy's tetrahedron theorem, which was considered as the only possible way for founding continuum mechanics in [155] (see there p. 595), although very interesting and meaningful, cannot be regarded as the "unavoidable" basis of continuum mechanics (see e.g. [46]). In the works of Cauchy one cannot find such a strong statement:[6] Cauchy followers seem much more extreme than Cauchy himself.

Axiom of power of internal forces

For one point, Hellinger can be criticized. Interestingly, he left the variational postulation scheme, when arguing below Eq. (11) of No. 3d about the symmetry of the stress components. There, he wrote that one has to postulate the law of equal areas, i.e., the balance of moments, to obtain the symmetry of the stress components.

---

[5] This treatment of the inertia forces is a little unsatisfactory as it already relates force quantities with kinematic quantities, i.e., it includes the relation that the inertia forces are proportional to the accelerations. In No. 5d of Hellinger's work, a general principle for dynamics is introduced in which momentum is considered as dual quantity to the time derivative of the virtual displacement field. Thus, in such an ansatz the relation between momentum and kinematical quantities remains unspecified.

[6] While Cauchy's lemma and the symmetry of the stress tensor are formulated in [28] as "Théorème I" and "Théorème II", respectively. The celebrated stress theorem of Cauchy has to be extracted out of the text and the formulas on pp. 68-69.

So it seems that he was not aware of the "Axiom of power of internal forces", which later was postulated by Germain, see [73, 74, 75][7]. This axiom is in fact the variational postulate that generalizes the law of action-reaction stated by Newton for systems of point masses. Once more, the power of variational postulates becomes striking here, since the same postulate can be used for systems of point masses, systems of rigid bodies, or, as used by Germain, for continua. All these systems differ in the admissible kinematics, the corresponding work functionals and consequently the appearing force quantities. The axiom of power of internal forces leads then to restrictions of the internal force effects. These are for systems of point masses that forces between two point masses are equal in length and opposite in direction and that the direction is given by the connection line between the two points. The interaction between rigid bodies is given by forces and moments, where the forces are equal in length and opposite in directions, and the moments together with the induced moments of the interaction forces are equal in length and opposite in direction. For continua, in which only stress models the internal force effects, the symmetry of the Cauchy stress follows.

In No. 6, starting on p. 637, Hellinger included a lucid distinction between internal and external force effects, which is precisely in the sense of Germain's definition [73, 74] (see also the very useful textbooks of J. Salençon [132, 131, 133]). And it is in the final section of the article, on p. 686, where Hellinger redeemed himself and surprises with the formulation of the "axiom of power of internal forces":

> «It is said briefly, that the entire physics is invariant with respect to the group of all orthogonal coordinate transformations of the ordinary geometry, the so-called "basic group" or "Euclidean group". Herefrom it follows in particular, that *the virtual work of all internal effects within a continuous system necessarily vanishes for a virtual displacement corresponding to an infinitesimal change of the coordinate system*, or that the total potential of these effects remain unchanged for any such displacement of the continuum, i.e. [that the potential] is a euclidean potential in the sense of E. and F. Cosserat (cf. No. 7b, p. 650).»

Second-gradient materials

The massive potential of variational principles becomes apparent in No. 4, where extensions of the virtual work contributions are discussed. With an intriguing naturalness, Hellinger introduced second-gradient continua by augmenting the virtual work by a linear form on the 18 second derivatives of the virtual displacements. In these lines one can read one of the first traces of the second-gradient continua theory which after many decades were developed in detail by Toupin and Germain, see [149, 74]. Even though the details are not carried out, Hellinger had already recognized the appearing surface tension contributions as well as contributions dual to the derivatives normal to the tangent. These described contact actions were intensively studied by Germain [74] and rediscovered in [71]. Interestingly, Hellinger wrote that

[7] The English translation of [74] can be found in [77].

there is not yet an application of the force effects dual to the derivatives normal to the tangent.

On pp. 639–640 one can read the following:

> «The state of deformation at a position is described more precisely, if one uses besides the first also *higher spatial derivatives* of the functions (1), i. e. the deformation in the neighborhood is approximated by a transformation of higher order instead of a linear one; the dependence of the stresses on the deformation will be represented more completely, if one includes also these higher derivatives in the material laws. In fact, one has considered so far [derivatives which are] not higher than second derivatives, this is namely required not until then, when the state of the medium varies *very quickly* in space; the stresses at a position then depends also on the spatial slope of the common deformation quantities of 1. order.»

The senior author of the exegetic series [59, 61, 62], who cannot easily understand German, was rather astonished by the just quoted paragraph. Indeed, because of the paper of Gurtin [95] and all papers influenced by it, for a long time it was believed, in a certain group of scientists and in a certain cultural milieu, that second- and a fortiori higher-gradient materials were logically NOT possible. In the aforementioned paper, one finds on p. 341 the following very clear statement: «One might ask the question: is it possible to have a material which obeys (1.6) but is not a simple elastic material? Here we prove that it is not.» What is astonishing is that the footnote 8 in the same paper WAS APPARENTLY not read by many followers of Gurtin (and sometimes one has the impression that Gurtin himself for a long period forgot his own footnote). This footnote reads:

> «Thus the stress cannot depend upon the gradients of F and η[8]. Of course this does not mean that higher order elasticity theories which include multipolar stresses are incorrect because of the dependence of these stresses on the higher order gradients. It simply means that one should not include such higher gradients if multipolar stresses are not included.»

After a long neglect of his own footnote, the late works of Gurtin came back to higher order gradient theories (see e.g. [71] and all related and subsequent papers), where the contribution by Toupin were reevaluated. There is also a large amount of papers available which prove the applicability of higher-gradient theories, cf. for instance [63, 12, 8, 7, 2, 1, 113, 102, 3, 81, 80]. A very interesting field of applications for higher gradient theories lies in the description of pantographic structures, see [40, 17, 16, 18, 45, 49, 86, 141, 168, 25] to mention just a few.

On p. 645, Hellinger came back to second-gradient materials for the case of hyperelasticity. In fact, he considered volume energy densities that depend also on the second derivatives of the placement functions. As a particular subset of such continua, he discussed continua whose potential is augmented by a potential with a surface energy density depending only on first derivatives of the placement functions. As mentioned by Hellinger, this surface energy density can be transformed to a volume energy density depending on the second derivatives of the placement functions. He focused on this particular form in order to formulate capillarity in No. 12. With this comments, Hellinger sketched a series of results which, in a completely analytical form, were later developed in [98].

[8] With F and η the deformation gradient and the entropy are meant.

Media with oriented particles

On p. 610, the kinematics of a generalized continuum is introduced augmenting the placement functions by angle functions that describe for each material point an orthonormal director triad. Hellinger had perceived the importance of the pioneering works by the Cosserat brothers, [32]. It has to be remarked that for many years their results have been nearly ignored: A conjecture is (see [107]) that this circumstance is related to the fact that their presentation is systematically based on Hamilton's principle.

In No. 4b and at the end of No. 5d, the static and dynamic theory of an oriented three-dimensional continuum is discussed. The hyperelastic case is treated in No. 7b. Again, the ideas presented by Hellinger are bound to be developed later for instance by Toupin and Germain (see [149, 74]) and have a huge impact in contemporary research. Without trying to write a complete list of the papers developing more recently the subject, we refer here to the following papers and textbooks: [144, 11, 57, 82, 157, 110, 88, 160, 148] and the references cited therein. All of the cited papers accept the point of view of Hellinger and base their treatment on the solid ground of suitable variational principles. The reader should remark that the extended kinematics considered by Hellinger includes micro-rotations, but does not consider micro-deformations. A clear variational treatment of continua with micro-stretch is presented in [75], where the ideas of Hellinger were fully developed. How much of the so called "modern" theory of continua with directors was already available to Hellinger is again surprising. Except for, maybe, the notation which often became more compact using tensorial algebra, the equations of the present subsection have been rediscovered several times, since 1913.

Lower-dimensional continua

The theory of media with oriented particles is closely related to lower-dimensional continua. The theory of two- and one-dimensional continua presented in No. 3e can describe only membranes and strings. The application range of this kind of continua is rather limited and also quite delicate due to the loss of stiffness for certain configurations. For instance, a horizontally, straight string cannot resist to an applied vertical force. However, some interesting applications of the continuum models introduced here have been found (see e.g. [65, 31, 72]).

Lower-dimensional continua can be indeed used as "reduced-order" approximate models for three-dimensional bodies having one or two dimensions preponderant with respect to the other two or one, even if some relevant deformation energy is stored in the changes of shape "along" neglected dimensions. In a direct theory, some extra kinematical descriptors can be added to the two- or one-dimensional continuum to include the effect of the neglected dimensions. In the last part of No. 4b, Hellinger augmented in the style of the Cosserat brothers each material point with a director triad and stated the corresponding virtual work contribution. The presented continua have orientations that remain unaffected by the change of the base curve or surface. To obtain a virtual work expression that couples these effects, the easiest is to be guided by a theory of hyperelastic one- or two-dimensional continua as sketched by Hellinger on pp. 666–668. We refer to [147, 69, 67] for a variational formulation in the case of one-dimensional continua generalized by an orthonormal director triad. For the numerical treatment and some interesting applications see among others [97, 96, 68, 90, 91, 156, 79, 21, 84, 83, 140, 159, 29, 30, 92, 53, 64]. The extra kinematics can also be due to higher-gradient effects such as in the pantographic beam, [17, 158, 89], which is a generalization of the Euler-Bernoulli beam similar to [150]. Higher-gradient elasticity effects can also be introduced for two-dimensional continua [50, 146, 87, 134, 136, 143, 52, 5, 162, 161, 36].

In contrast to the direct theory, one can try to deduce the governing equations via a reduction process. This is what Hellinger suggested in No. 8 giving a short but elegant resumé of the most important results in asymptotic analysis as applied to reduced order and reduced dimension mechanical models. The ontological intrinsic three-dimensional nature of deformable bodies is here, p. 658, synthetically described «In reality there exists always a three-dimensional extended domain» and the mathematical nature of the abstraction which leads to lower dimensional continua is clearly stated by means of the introduction of the concept of "families" of models depending on a small parameter ε and in the calculation of suitable limits when this parameter is vanishing. Remark the very elegant observation about the interpretation of the gradients in the orthogonal direction as Cosserat triad. Hellinger gave also a careful list of difficulties which may arise in the asymptotic expansions and that some research is required in to understand this approach better.

Constitutive laws

The structure of the encyclopedia article is pretty clear. After the introduction of the kinematics and the corresponding virtual work contributions of the considered systems, the principle of virtual displacements is postulated. With the virtual work contributions, it becomes apparent what force effects model the interaction mechanisms of the continuous system. However, there is yet no need for specifying the relation between these force effects and the placement functions of the continuum. These relations are then discussed in Part III of the article and define eventually the individual fields of continuous media. Hellinger had thus already recognized that the theory of continuous media includes and generalizes the theory of elasticity, No. 9, and hydrodynamics, No. 10.

Hellinger accepted the constitutive laws for the stress, i.e., the material laws, to be of a very general form, but gives one important restriction, which can be read in the last paragraph of the following quote from p. 638.

> «The values of the stress components $X_x, \dots, Z_z$ corresponding to the particle a, b, c located at time t at the position

$$(1) \qquad x = x(a, b, c; t), \quad y = y(a, b, c; t), \quad z = z(a, b, c; t),$$

must be given by the material laws for every possible motion of the continuum; hence [the values] are represented explicitly as expressions of any kind depending on a, b, c, t and the functions (1). [These expressions] also include besides the values of the functions [(1)] and their spatial and time derivatives at the positions a, b, c, t possibly values at other positions $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{t}$ and in general the complete history in the domain of variability of the four variables (integrals and similar ones) — Hence, symbolically written in the form:

$$(2) \qquad F(a, b, c, t; x(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{t}), \ldots\ldots).$$

Changing over to another orthogonal coordinate system x, y, z, then these nine expressions of the stress components have to be transformed like the components of a dyad (and similarly the expressions for X, Y, Z like vector components and so on); if it concerns internal force effects, then there must exist equations between the transformed components and the new coordinates [which are] exactly of the old form.»

This last sentence is a concise statement of the *principle of objectivity* (or *principle of material frame-indifference*) for constitutive equations for stress. The reader is invited to compare the present section by Hellinger to the statements found in Truesdell's First Course in Rational Mechanics [153]. Once the difference of notation is taken into account, the reader will remark the substantial coincidence of the content presented in both works – obviously the change of notations may make a content clearer but for sure it is not changing the attribution of scientific priority. In [153] (Chap. IV Constitutive Equations, Sect. 2 Constitutive Equations. Noll's Axioms) on p. 200, one reads: «The further development of continuum mechanics in this book will fall within the axioms laid down by Noll in 1958.»[9] On p. 202, one finds the "Axiom N3. Principle of Material Frame-Indifference.", where capital N stands for Noll. The attentive reader will immediately remark that Truesdell claims that Noll has written in formulas exactly what Hellinger said in words. This transcription into formulas does not seem enough to attribute the axiom to Noll. Consider that Hellinger finished his work in 1913 and did not attribute this axiom to himself. If one gives a glance to the historical overview about the principle of material-frame indifference in [154] and by considering Truesdell's awareness of Hellinger's article (see again the first footnote on p. 595 of [155]), then Truesdell can be criticized in his own words found in [151] on p. 152: «Lagranges historische Angaben beziehen sich gewöhnlich auf die richtigen Quellen, verdrehen oder verringern jedoch ihren Inhalt.»[10]

On p. 640, Hellinger presented also a precise statement of material symmetry.

«For all laws of the class (3) the question, how these equations behave under a transformation of the directions of the a-b-c parameter lines through these points a, b, c, while the x-y-z-coordinates remain unchanged, is of fundamental evidence. Thereby it is determined namely, if and which different directions through a point of the medium are tantamount for its constitution, provided that it is expressed in the considered material laws, i. e. it is decided on *isotropy or aeolotropy of the medium*;»

[9] Noll 1958 corresponds to reference [114] in the chapter at hand.

[10] Most of [151], even in English, can be found in [152], including the hypothesis about Lagrange on p. 247: «Lagrange's histories usually give the right references but misrepresent or slight the contents.»

So, Hellinger clearly distinguished between objectivity and material symmetry. The theoretical basis established by Hellinger contributed to the establishment of the modern classification of constitutive equations based on their symmetry group: we find remarkable the recent contributions by [117, 116, 6, 126, 57].

The variational formulation of continuum mechanics allowed Hellinger to introduce in No. 7 hyperelastic material laws without a direct consideration of any thermodynamical theory. Even though he is absolutely aware of the connection to thermodynamics. On p. 643, one reads:

> «[...], *that the virtual work coming into question is, up to sign, for every virtual displacement equivalent to the variation of a single scalar expression depending only on the corresponding state of deformation, [which is] the "potential" or the "potential energy" of the acting forces and stresses*; this assumption can be traced back to general theorems of thermodynamics.»

More important is the relation to the calculus of variations and to extremum principles which follow naturally in the variational postulation scheme and which were discussed by Hellinger in No. 7d. In fact, he formulated the principle of stationary potential energy and discussed the possibility for the existence of a minimum principle. Moreover, he described the methods to be used in order to characterize the stability of configurations for infinite dimensional systems. He is aware of the fact that not all norms are equivalent in infinite dimensional systems: indeed, he warns the reader about the fact that different concepts of "neighborhood" are possible in the considered context. Hellinger proved himself once more as a first class mathematician.

In No. 9, Hellinger introduced the foundations of finite elasticity theory, which is based on the choice of a strain energy density that depends on the Green-Lagrange strain measure, see Eq. (1) and (2) on p. 663. Hellinger recognized the objectivity of this strain measure, which leads directly to symmetric stress components. Moreover, for isotropic materials, he showed the important result that the strain energy density can only depend on the three invariants of the Green-Lagrange strain. For a contemporary introduction to finite elasticity theory, we refer to [145]. The variational approach enlightens the essential role of deformation energy in constitutive theory [50, 85] and gives a guidance to the developments of identification methods. Therefore the recents works [104, 164, 70, 15, 4, 35, 121, 105, 163] seem to follow a research program envisioned by Hellinger.

Hellinger–Reissner principle

Without telling it explicitly, with No. 7e, Hellinger has left an original contribution to mechanical science, which has especially impacted computational mechanics [135, 127]. Note that the formulated variational principle holds in the general nonlinear regime. Due to the presentations of the same variational principle, including also boundary terms, in Reissner [128, 129], this principle is generally referred to as the Hellinger–Reissner principle. On pp. 2.14–2.15 of [100], Reissner translated the present No. 7e into English and gives an astonishing commentary in which he questioned the historical relevance of Hellinger's contribution due to technical details:

> «While the absence of any consideration of boundary integrals in the above is generally known, other difficulties appear not to have been noted previously. These include the entirely casual reference to the matter of the invertibility of the relations $s_{ij} = \partial\phi/\partial z_{j,i}$[11] (which is, of course, a much more significant restriction than the corresponding condition for $\sigma_{ij} = \partial\Sigma/\partial\varepsilon_{ij}$), the absence of a concern with conditions on ϕ or H so as to ensure moment equilibrium, and, most importantly, the unqualified conclusion concerning the statement of a general variational theorem for *stresses* alone, as an obvious consequence of (1.38)[12], with this clearly being the purpose of this section, given the wording of the heading of the section. Altogether, these difficulties make it questionable whether it is in fact historically meaningful to consider Hellinger's considerations as a stepping-stone to the variational theorem for displacements and stresses in Ref. [15][13].»

Concretely, Reissner demanded priority about this variational principle for himself. We dare to construct a provocative hypothesis concerning mechanical science after World War II. Scientists in mechanics from the United States, thus scientists from the victorious power, tried to demolish the scientific heritage of Europe by slighting the contents of the earlier contributions or by not even citing the correct references. The rise of the English language as the new lingua franca, as discussed in the first part of the exegetic series of Hellinger's article, [59], played amongst others into the hands of Truesdell and Reissner[14] to rewrite the recent history of mechanics. Thus, one could claim that also the "history of mechanical science is written by the victors". Certainly, this provocative statement should be investigated further and more scientifically.

Hellinger's article supplies, more generally, the conceptual framework for a wide class of numerical integrations schemes to be used in generalized continuum mechanics. Following Hellinger's spirit, it is clear that there is not a preferred way for discretizing the evolutionary equations of the continua. While in first gradient continua, finite element method with piece-wise polynomials can be considered a universally efficient tool, in the case of generalized continua more sophisticated discretization techniques must be developed. Therefore, we can consider that the papers [169, 115, 93] are continuing a research stream started by Hellinger.

Peridynamics

Another interesting example of the question of priority concerns the field of peridynamics, which according to Silling [139] gives «a new framework for the basic

[11] With ϕ and s_{ij} the potential φ and the stress components $X_a, X_b, \ldots, Z_c$ of Hellinger are meant.

[12] This corresponds to Eq. (20) on p. 654.

[13] This corresponds to reference [129] in current chapter.

[14] Even though Reissner is of German origin, he got his scientific education in the United States and received his United States citizenship in 1945 at the age of 32.

equations of continuum mechanics». Peridynamics is a non-local theory, where each material point of the body can interact with all other points of the body [99, 166, 167, 112]. For the case of elasticity, i.e., when the interaction between two material points is described by a potential, one can find such a formulation on pp. 646–647 in Hellinger's article. In previous papers, see [38], the credit as first founder of peridynamics is given to Piola. Hellinger credits Duhem [54] and also claims that Duhem has found results to assure when peridynamics reduces to classical elasticity. Therefore not only in the Italian mechanical literature, but also in the German and French literature, peridynamics was known long before its modern formulation by Silling [139].

Closing remarks

Hellinger's article is, as one could expect from an encyclopedia article, definitively a treasure of ideas. He not only collected and ordered the concepts available at his time, but he contributed immensely to the variational formulation of continuum mechanics. He can definitively be set in one line with d'Alembert, Lagrange, Piola and the Cosserat brothers.

The author must admit that he was only able to comment a small part of Hellinger's work. Some underestimated sections are definitively the treatment of dynamics, where Gauss' principle of least constraint is discussed and where the connection to the principle of Hamilton is made. Also the treatment of constraints, which in the variational formulation of mechanics is a natural concept, would have deserved more attention. Extremely interesting would be an evaluation of the Nos. 13–16 by contemporary experts from the fields of optics, electrodynamics, thermodynamics as well as from relativity theory.

It is hoped that the reader could recognize the sharpness and precision of Hellinger's contribution, which reflects also the spirit of the scientific environment at his time. The aspiration to "concise brevity" is completely coherent with the concept of "economy of science" by Ernst Mach.[15] Mach's positivistic views were greatly influenced by the Vienna Circle and by Ludwig Wittgenstein, whose rigorous style was adopted also by Mach, when dealing with the history of mechanics. On page 481 of [103], having as a synoptic side note "The basis of science, economy of thought." one can read:

> «It is the object of science to replace, or *save*, experiences, by the reproduction and anticipation of facts in thought. Memory is handier than experience, and often answers the same purpose. This economical office of science, which fills its whole life, is apparent at first glance; and with its full recognition all mysticism in science disappears. Science is communicated by instruction, in order that one man may profit by the experience of another and be spared the trouble of accumulating it for himself; and thus, to spare posterity, the experiences of whole generations are stored up in libraries.»

[15] See e.g. Section 4 of Chapter IV of the book "The science of mechanics; a critical and historical account of its development", [103].

Maybe Mach's most important statement starts at the bottom of page 489 of [103]:

> «But, as a matter of fact, within the short span of a human life and with man's limited powers of memory, any stock of knowledge worthy of the name is unattainable except by the greatest mental economy.»

It seems that this greatest mental economy has been reached in the presentation by Hellinger and can be achieved in mechanics only when working with variational formulations.

References

1. Abali, B.E., Barchiesi, E.: Additive manufacturing introduced substructure and computational determination of metamaterials parameters by means of the asymptotic homogenization. Continuum Mechanics and Thermodynamics pp. 1–17 (2020)
2. Abali, B.E., Müller, W.H., dell'Isola, F.: Theory and computation of higher gradient elasticity theories based on action principles. Archive of Applied Mechanics **87**(9), 1495–1510 (2017)
3. Abali, B.E., Müller, W.H., Eremeyev, V.A.: Strain gradient elasticity with geometric nonlinearities and its computational evaluation. Mechanics of Advanced Materials and Modern Processes **1**(1), 1–11 (2015)
4. Abali, B.E., Wu, C.C., Müller, W.H.: An energy-based method to determine material constants in nonlinear rheology with applications. Continuum Mechanics and Thermodynamics **28**(5), 1221–1246 (2016)
5. Abbas, I.A., Abdalla, A.E.N.N., Alzahrani, F.S., Spagnuolo, M.: Wave propagation in a generalized thermoelastic plate using eigenvalue approach. Journal of Thermal Stresses **39**(11), 1367–1377 (2016)
6. Abdoul-Anziz, H., Auffray, N., Desmorat, B.: Symmetry classes and matrix representations of the 2D flexoelectric law. Symmetry **12**(4), 1–29 (2020)
7. Abdoul-Anziz, H., Seppecher, P.: Strain gradient and generalized continua obtained by homogenizing frame lattices. Mathematics and Mechanics of Complex Systems **6**(3), 213–250 (2018)
8. Abdoul-Anziz, H., Seppecher, P., Bellis, C.: Homogenization of frame lattices leading to second gradient models coupling classical strain and strain-gradient terms. Mathematics and Mechanics of Solids **24**(12), 3976–3999 (2019)
9. Alibert, J.J., Della Corte, A.: Second-gradient continua as homogenized limit of pantographic microstructured plates: a rigorous proof. Z. Angew. Math. Phys. **66**(5), 2855–2870 (2015)
10. Alibert, J.J., Seppecher, P., dell'Isola, F.: Truss modular beams with deformation energy depending on higher displacement gradients. Mathematics and Mechanics of Solids **8**(1), 51–73 (2003)
11. Altenbach, J., Altenbach, H., Eremeyev, V.A.: On generalized Cosserat-type theories of plates and shells: a short review and bibliography. Archive of Applied Mechanics **80**(1), 73–92 (2010)
12. Andreaus, U., dell'Isola, F., Giorgio, I., Placidi, L., Lekszycki, T., Rizzi, N.L.: Numerical simulations of classical problems in two-dimensional (non) linear second gradient elasticity. International Journal of Engineering Science **108**, 34–50 (2016)
13. Arkhangel'Skii, A., Ponomarev, V.I.: Fundamentals of general topology: problems and exercises, vol. 13. Springer Science & Business Media (2001)
14. Auffray, N., dell'Isola, F., Eremeyev, V.A., Rosi, G.: Analytical continuum mechanics à la Hamilton–Piola least action principle for second gradient continua and capillary fluids. Mathematics and Mechanics of Solids **20**(4), 375–417 (2013)

15. Auger, P., Lavigne, T., Smaniotto, B., Spagnuolo, M., dell'Isola, F., Hild, F.: Poynting effects in pantographic metamaterial captured via multiscale dvc. The Journal of Strain Analysis for Engineering Design pp. 1–16 (2020)
16. Barchiesi, E., Eugster, S.R., dell'Isola, F., Hild, F.: Large in-plane elastic deformations of bi-pantographic fabrics: asymptotic homogenization and experimental validation. Mathematics and Mechanics of Solids **25**(3), 739–767 (2020)
17. Barchiesi, E., Eugster, S.R., Placidi, L., dell'Isola, F.: Pantographic beam: a complete second gradient 1D-continuum in plane. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik **70**(5), 135–1–24 (2019)
18. Barchiesi, E., Harsch, J., Ganzosch, G., Eugster, S.R.: Discrete versus homogenized continuum modeling in finite deformation bias extension test of bi-pantographic fabrics. Continuum Mechanics and Thermodynamics pp. 1–14 (2020)
19. Barchiesi, E., Khakalo, S.: Variational asymptotic homogenization of beam-like square lattice structures. Mathematics and Mechanics of Solids **24**(10), 3295–3318 (2019)
20. Barchiesi, E., Spagnuolo, M., Placidi, L.: Mechanical metamaterials: a state of the art. Mathematics and Mechanics of Solids **24**(1), 212–234 (2019)
21. Baroudi, D., Giorgio, I., Battista, A., Turco, E., Igumnov, L.A.: Nonlinear dynamics of uniformly loaded elastica: Experimental and numerical evidence of motion around curled stable equilibrium configurations. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik **99**(7), 1–20 (2019)
22. Bersani, A.M., Caressa, P.: Lagrangian descriptions of dissipative systems: a review. Mathematics and Mechanics of Solids pp. 1–19 (2020)
23. Braides, A., Gelli, M.S.: Continuum limits of discrete systems without convexity hypotheses. Mathematics and Mechanics of Solids **7**(1), 41–66 (2002)
24. Capobianco, G., Eugster, S.R.: Time finite element based Moreau-type integrators. International Journal for Numerical Methods in Engineering **114**(3), 215–231 (2018)
25. Capobianco, G., Eugster, S.R., Winandy, T.: Modeling planar pantographic sheets using a nonlinear Euler–Bernoulli beam element based on B-spline functions. Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics **18**(1), e201800220:1–2 (2018)
26. Capobianco, G., Winandy, T., Eugster, S.: The principle of virtual work and Hamilton's principle on Galilean manifolds. Journal of Geometric Mechanics pp. 1–27 (2021)
27. Carcaterra, A., dell'Isola, F., Esposito, R., Pulvirenti, M.: Macroscopic description of microscopically strongly inhomogenous systems: A mathematical basis for the synthesis of higher gradients metamaterials. Archive of Rational Mechanics and Analysis **218**(3), 1239–1262 (2015)
28. Cauchy, A.: De la pression ou tension dans un corps solide. In: Œuvres Complètes, *2*, vol. 7, pp. 60–78. Gauthier-Villars et Fils (1827)
29. Cazzani, A., Malagù, M., Turco, E.: Isogeometric analysis of plane-curved beams. Mathematics and Mechanics of Solids **21**(5), 562–577 (2016)
30. Cazzani, A., Malagù, M., Turco, E., Stochino, F.: Constitutive models for strongly curved beams in the frame of isogeometric analysis. Mathematics and Mechanics of Solids **21**(2), 182–209 (2016)
31. Cazzani, A., Wagner, N., Ruge, P., Stochino, F.: Continuous transition between traveling mass and traveling oscillator using mixed variables. International Journal of Non-Linear Mechanics **80**, 82–95 (2016)
32. Cosserat, E., Cosserat, F.: Théorie des Corps déformables. Librairie Scientifique A. Hermann et Fils (1909)
33. Cuomo, M., Contrafatto, L., Greco, L.: A variational model based on isogeometric interpolation for the analysis of cracked bodies. International Journal of Engineering Science **80**, 173–188 (2014)
34. d'Alembert, J.B.l.R.: Traité de Dynamique (1743)
35. De Angelo, M., Barchiesi, E., Giorgio, I., Abali, B.E.: Numerical identification of constitutive parameters in reduced-order bi-dimensional models for pantographic structures: application to out-of-plane buckling. Archive of Applied Mechanics **89**(7), 1333–1358 (2019)

36. De Angelo, M., Spagnuolo, M., D'Annibale, F., et al.: The macroscopic behavior of pantographic sheets depends mainly on their microstructure: experimental evidence and qualitative analysis of damage in metallic specimens. Continuum Mechanics and Thermodynamics **31**(4), 1181–1203 (2019)
37. Del Vescovo, D., Giorgio, I.: Dynamic problems for metamaterials: review of existing models and ideas for further research. International Journal of Engineering Science **80**, 153–172 (2014)
38. dell'Isola, F., Andreaus, U., Placidi, L.: At the origins and in the vanguard of peridynamics, non-local and higher-gradient continuum mechanics: An underestimated and still topical contribution of Gabrio Piola. Mathematics and Mechanics of Solids **20**(8), 887–928 (2015)
39. dell'Isola, F., Della Corte, A., Giorgio, I.: Higher-gradient continua: The legacy of Piola, Mindlin, Sedov and Toupin and some future research perspectives. Mathematics and Mechanics of Solids **22**(4), 852–872 (2017)
40. dell'Isola, F., Giorgio, I., Pawlikowski, M., Rizzi, N.L.: Large deformations of planar extensible beams and pantographic lattices: heuristic homogenization, experimental and numerical examples of equilibrium. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences **472**(2185), 20150790:1–23 (2016)
41. dell'Isola, F., Madeo, A., Seppecher, P.: Cauchy tetrahedron argument applied to higher contact interactions. Archive of Rational Mechanics and Analysis **219**(3), 1305–1341 (2015)
42. dell'Isola, F., Maier, G., Perego, U., Andreaus, U., Esposito, R., Forest, S.: The complete works of Gabrio Piola: Volume I: Commented English Translation. No. 38 in Advanced Structured Materials. Springer (2014)
43. dell'Isola, F., Seppecher, P.: Edge contact forces and quasi-balanced power. Meccanica **32**(1), 33–52 (1997)
44. dell'Isola, F., Seppecher, P.: "Hypertractions and hyperstresses convey the same mechanical information Continuum Mech. Thermodyn. (2010) 22:163–176" by Prof. Podio Guidugli and Prof. Vianello and some related papers on higher gradient theories. Continuum Mechanics and Thermodynamics **23**(5), 473–478 (2010)
45. dell'Isola, F., Seppecher, P., Alibert, J.J., et al.: Pantographic metamaterials: an example of mathematically driven design and of its technological challenges. Continuum Mechanics and Thermodynamics **31**(4), 851–884 (2019)
46. dell'Isola, F., Seppecher, P., Della Corte, A.: The postulations à la D'Alembert and à la Cauchy for higher gradient continuum theories are equivalent: a review of existing results. P. Roy. Soc. Lond. A Mat. **471**(2183) (2015)
47. dell'Isola, F., Seppecher, P., Madeo, A.: How contact interactions may depend on the shape of Cauchy cuts in nth gradient continua: approach "à la D'Alembert". Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik **63**(6), 1119–1141 (2012)
48. dell'Isola, F., Seppecher, P., Placidi, L., Barchiesi, E., Misra, A.: Least action and virtual work principles for the formulation of generalized continuum models. In: F. dell'Isola, D. Steigmann (eds.) Discrete and Continuum Models for Complex Metamaterials, pp. 327–394. Cambridge University Press (2020)
49. dell'Isola, F., Seppecher, P., Spagnuolo, M., et al.: Advances in pantographic structures: design, manufacturing, models, experiments and image analyses. Continuum Mechanics and Thermodynamics **31**(4), 1231–1282 (2019)
50. dell'Isola, F., Steigmann, D.: A two-dimensional gradient-elasticity theory for woven fabrics. Journal of Elasticity **118**(1), 113–125 (2015)
51. dell'Isola, F., Steigmann, D.J. (eds.): Discrete and Continuum Models for Complex Metamaterials. Cambridge University Press (2020)
52. Desmorat, B., Spagnuolo, M., Turco, E.: Stiffness optimization in nonlinear pantographic structures. Mathematics and Mechanics of Solids **25**(12), 2252–2262 (2020)
53. Deutschmann, B., Eugster, S.R., Ott, C.: Reduced models for the static simulation of an elastic continuum mechanism. IFAC-PapersOnLine **51**(2), 403 – 408 (2018). 9th Vienna International Conference on Mathematical Modelling
54. Duhem, P.: Le potentiel thermodynamique et la pression hydrostatique. Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure **3e série, 10**, 183–230 (1893)

55. Epstein, M., Smelser, R.E.: An appreciation and discussion of Paul Germain's "The method of virtual power in the mechanics of continuous media, I: Second-gradient theory". Mathematics and Mechanics of Complex Systems **8**(2), 191–199 (2020)
56. Eremeyev, V.A., Lebedev, L.P., Cloud, M.J.: The Rayleigh and Courant variational principles in the six-parameter shell theory. Mathematics and Mechanics of Solids **20**(7), 806–822 (2015)
57. Eremeyev, V.A., Pietraszkiewicz, W.: Material symmetry group and constitutive equations of micropolar anisotropic elastic solids. Mathematics and Mechanics of Solids **21**(2), 210–221 (2016)
58. Eugster, S.R.: Geometric Continuum Mechanics and Induced Beam Theories, *Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics*, vol. 75. Springer (2015)
59. Eugster, S.R., dell'Isola, F.: Exegesis of the introduction and sect. I from "Fundamentals of the mechanics of continua" by E. Hellinger. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik **97**(4), 477–506 (2017)
60. Eugster, S.R., dell'Isola, F.: An ignored source in the foundations of continuum physics "Die Allgemeinen Ansätze der Mechanik der Kontinua" by E. Hellinger. Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics **17**(1), 413–414 (2017)
61. Eugster, S.R., dell'Isola, F.: Exegesis of sect. II and III.A from "Fundamentals of the mechanics of continua" by E. Hellinger. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik **98**(1), 31–68 (2018)
62. Eugster, S.R., dell'Isola, F.: Exegesis of sect. III.B from "Fundamentals of the mechanics of continua" by E. Hellinger. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik **98**(1), 69–105 (2018)
63. Eugster, S.R., dell'Isola, F., Steigmann, D.: Continuum theory for mechanical metamaterials with a cubic lattice substructure. Mathematics and Mechanics of Complex Systems **7**(1), 75–98 (2019)
64. Eugster, S.R., Deutschmann, B.: A nonlinear Timoshenko beam formulation for modeling a tendon-driven compliant neck mechanism. Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics **18**(1), e201800208:1–2 (2018)
65. Eugster, S.R., Glocker, Ch.: Constraints in structural and rigid body mechanics: a frictional contact problem. Annals of Solid and Structural Mechanics **5**(1-2), 1–13 (2013)
66. Eugster, S.R., Glocker, Ch.: On the notion of stress in classical continuum mechanics. Mathematics and Mechanics of Complex Systems **5**(3-4), 299–338 (2017)
67. Eugster, S.R., Harsch, J.: A variational formulation of classical nonlinear beam theories. In: B.E. Abali, I. Giorgio (eds.) Developments and Novel Approaches in Nonlinear Solid Body Mechanics, pp. 95–121. Springer International Publishing (2020)
68. Eugster, S.R., Hesch, C., Betsch, P., Glocker, Ch.: Director-based beam finite elements relying on the geometrically exact beam theory formulated in skew coordinates. International Journal for Numerical Methods in Engineering **97**(2), 111–129 (2014)
69. Eugster, S.R., Steigmann, D.J.: Variational methods in the theory of beams and lattices. In: H. Altenbach, A. Öchsner (eds.) Encyclopedia of Continuum Mechanics, pp. 1–9. Springer (2018)
70. Fedele, R., Raka, B., Hild, F., Roux, S.: Identification of adhesive properties in GLARE assemblies using digital image correlation. Journal of the Mechanics and Physics of Solids **57**(7), 1003–1016 (2009)
71. Fried, E., Gurtin, M.E.: Tractions, balances, and boundary conditions for nonsimple materials with application to liquid flow at small-length scales. Archive of Rational Mechanics and Analysis **182**(3), 513–554 (2006)
72. Gavrilov, S., Eremeyev, V., Piccardo, G., Luongo, A.: A revisitation of the paradox of discontinuous trajectory for a mass particle moving on a taut string. Nonlinear Dynamics **86**(4), 2245–2260 (2016)
73. Germain, P.: Sur l'application de la méthode des puissances virtuelles en mécanique des milieux. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris **A**, 1051–1055 (1972)
74. Germain, P.: La méthodes des puissances virtuelles en mécanique des milieux continus - 1ère partie, théorie du second gradient. Journal de Mécanique **12**, 235–274 (1973)

75. Germain, P.: The method of virtual power in continuum mechanics. part 2: Microstructure. SIAM Journal on Applied Mathematics **25**, 556–575 (1973)
76. Germain, P.: Functional concepts in continuum mechanics. Meccanica **33**(5), 433–444 (1998)
77. Germain, P.: The method of virtual power in the mechanics of continuous media, I: Second-gradient theory. Mathematics and Mechanics of Complex Systems **8**(2), 153–190 (2020)
78. Germain, P., Nguyen, Q.S., Suquet, P.: Continuum thermodynamics. Journal of Applied Mechanics **105**(50), 1010–1020 (1983)
79. Giorgio, I.: A discrete formulation of Kirchhoff rods in large-motion dynamics. Mathematics and Mechanics of Solids **25**(5), 1081–1100 (2020)
80. Giorgio, I.: Lattice shells composed of two families of curved Kirchhoff rods: an archetypal example, topology optimization of a cycloidal metamaterial. Continuum Mechanics and Thermodynamics pp. 1–20 (2020)
81. Giorgio, I., Ciallella, A., Scerrato, D.: A study about the impact of the topological arrangement of fibers on fiber-reinforced composites: some guidelines aiming at the development of new ultra-stiff and ultra-soft metamaterials. International Journal of Solids and Structures **203**, 73–83 (2020)
82. Giorgio, I., De Angelo, M., Turco, E., Misra, A.: A Biot–Cosserat two-dimensional elastic nonlinear model for a micromorphic medium. Continuum Mechanics and Thermodynamics **32**, 1357–1369 (2019)
83. Giorgio, I., Del Vescovo, D.: Non-linear lumped-parameter modeling of planar multi-link manipulators with highly flexible arms. Robotics **7**(4), 60:1–13 (2018)
84. Giorgio, I., Del Vescovo, D.: Energy-based trajectory tracking and vibration control for multilink highly flexible manipulators. Mathematics and Mechanics of Complex Systems **7**(2), 159–174 (2019)
85. Giorgio, I., dell'Isola, F., Steigmann, D.J.: Axisymmetric deformations of a 2nd grade elastic cylinder. Mechanics Research Communications **94**, 45–48 (2018)
86. Giorgio, I., Harrison, P., Dell'Isola, F., Alsayednoor, J., Turco, E.: Wrinkling in engineering fabrics: a comparison between two different comprehensive modelling approaches. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences **474**(2216), 1–20 (2018)
87. Giorgio, I., Rizzi, N., Turco, E.: Continuum modelling of pantographic sheets for out-of-plane bifurcation and vibrational analysis. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences **473**(2207), 20170636:1–21 (2017)
88. Giorgio, I., Spagnuolo, M., Andreaus, U., Scerrato, D., Bersani, A.M.: In-depth gaze at the astonishing mechanical behavior of bone: A review for designing bio-inspired hierarchical metamaterials. Mathematics and Mechanics of Solids pp. 1–30 (2020)
89. Greco, L.: An iso-parametric G^1-conforming finite element for the nonlinear analysis of Kirchhoff rod. Part I: the 2D case. Continuum Mechanics and Thermodynamics pp. 1–24 (2020)
90. Greco, L., Cuomo, M.: B-spline interpolation of Kirchhoff-Love space rods. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **256**(0), 251–269 (2013)
91. Greco, L., Cuomo, M.: Consistent tangent operator for an exact Kirchhoff rod model. Continuum Mechanics and Thermodynamics **27**(4-5), 861–877 (2015)
92. Greco, L., Cuomo, M.: An isogeometric implicit G1 mixed finite element for Kirchhoff space rods. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **298**, 325–349 (2016)
93. Greco, L., Cuomo, M., Contrafatto, L.: A reconstructed local B formulation for isogeometric Kirchhoff–Love shells. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **332**, 462–487 (2018)
94. Green, A.E., Rivlin, R.S.: Multipolar continuum mechanics. Archive of Rational Mechanics and Analysis **17**(2), 113–147 (1964)
95. Gurtin, M.E.: Thermodynamics and the possibility of spatial interaction in elastic materials. Archive for Rational Mechanics and Analysis **19**(5), 339–352 (1965)
96. Harsch, J., Capobianco, G., Eugster, S.R.: Finite element formulations for constrainted spatial nonlinear beam theories. Mathematics and Mechanics of Solids pp. 1–26 (2021)

97. Harsch, J., Eugster, S.R.: Finite element analysis of planar nonlinear classical beam theories. In: B.E. Abali, I. Giorgio (eds.) Developments and Novel Approaches in Nonlinear Solid Body Mechanics, pp. 123–157. Springer International Publishing (2020)
98. Javili, A., Dell'Isola, F., Steinmann, P.: Geometrically nonlinear higher-gradient elasticity with energetic boundaries. Journal of the Mechanics and Physics of Solids **61**(12), 2381–2401 (2013)
99. Javili, A., Morasata, R., Oterkus, E., Oterkus, S.: Peridynamics review. Mathematics and Mechanics of Solids **24**(11), 3714–3739 (2019)
100. Kardestuncer, H., Norrie, D., Brezzi, F.: Finite element handbook. McGraw-Hill reference books of interest: Handbooks. McGraw-Hill (1987)
101. Kelley, J.: General Topology. Graduate Texts in Mathematics. Springer (1975)
102. Laudato, M., Ciallella, A.: Perspectives in generalized continua. In: B.E. Abali, I. Giorgio (eds.) Developments and Novel Approaches in Biomechanics and Metamaterials, *Advanced Structured Materials*, vol. 132, pp. 1–13. Springer (2020)
103. Mach, E.: The Science of Mechanics: A Critical and Historical Account of Its Development. Open court publishing Company, Chicago (1919). Translated from the German by Thomas J. McCromack.
104. Maier, G., Bocciarelli, M., Bolzon, G., Fedele, R.: Inverse analyses in fracture mechanics. International Journal of Fracture **138**(1-4), 47–73 (2006)
105. Marmo, F., Sessa, S., Vaiana, N., De Gregorio, D., Rosati, L.: Complete solutions of three-dimensional problems in transversely isotropic media. Continuum Mechanics and Thermodynamics **32**(3), 775–802 (2020)
106. Maugin, G.: Continuum Mechanics Through the Eighteenth and Nineteenth Centuries: Historical Perspectives from John Bernoulli (1727) to Ernst Hellinger (1914). Solid Mechanics and Its Applications. Springer International Publishing (2014)
107. Maugin, G.A., Metrikine, A.V.: Mechanics of generalized continua. Advances in mechanics and mathematics **21** (2010)
108. Mawassy, N., Reda, H., Ganghoffer, J.F., Eremeyev, V.A., Lakiss, H.: A variational approach of homogenization of piezoelectric composites towards piezoelectric and flexoelectric effective media. International Journal of Engineering Science **158**, 103410 (2020)
109. Meissner, H.: Ernst Hellinger. In: Topics in operator theory: Ernst D. Hellinger memorial volume, *Operator Theory: Advances and Applications*, vol. 48. Birkhäuser Verlag, Basel (1990)
110. Misra, A., Poorsolhjouy, P.: Identification of higher-order elastic constants for grain assemblies based upon granular micromechanics. Mathematics and Mechanics of Complex Systems **3**(3), 285–308 (2015)
111. Mühlich, U., Abali, B.E., dell'Isola, F.: Commented translation of Erwin Schrödinger's paper 'On the dynamics of elastically coupled point systems' (Zur Dynamik elastisch gekoppelter Punktsysteme). Mathematics and Mechanics of Solids **26**(1), 133–147 (2020)
112. Nguyen, C.T., Oterkus, S., Oterkus, E.: An energy-based peridynamic model for fatigue cracking. Engineering Fracture Mechanics **241**, 107373 (2021)
113. Nguyen, T.H., Niiranen, J.: A second strain gradient damage model with a numerical implementation for quasi-brittle materials with micro-architectures. Mathematics and Mechanics of Solids **25**(3), 515–546 (2020)
114. Noll, W.: A mathematical theory of the mechanical behavior of continuous media. Archive for Rational Mechanics and Analysis **2**(1), 197–226 (1958)
115. Obohat, M.A., Tahvilian, E., Yildizdag, M.E., Ergin, A.: Three-dimensional multi-patch isogeometric analysis of composite laminates with a discontinuous galerkin approach. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part M: Journal of Engineering for the Maritime Environment pp. 1–14 (2020)
116. Olive, M.: Effective computation of SO(3) and O(3) linear representation symmetry classes. Mathematics and Mechanics of Complex Systems **7**(3), 203–237 (2019)
117. Olive, M., Auffray, N.: Symmetry classes for even-order tensors. Mathematics and Mechanics of Complex Systems **1**(2), 177–210 (2013)

118. Pepe, G., Carcaterra, A., Giorgio, I., Del Vescovo, D.: Variational feedback control for a nonlinear beam under an earthquake excitation. Mathematics and Mechanics of Solids **21**(10), 1234–1246 (2016)
119. Pideri, C., Seppecher, P.: A second gradient material resulting from the homogenization of an heterogeneous linear elastic medium. Continuum Mechanics and Thermodynamics **9**(5), 241–257 (1997)
120. Piola, G.: Intorno alle equazioni fondamentali del movimento di corpi qualsivogliono considerati secondo la naturale loro forma e costituzione. Memorie di matematica e di fisica della Società italiana delle scienze **24**, 1–186 (1848)
121. Placidi, L., Andreaus, U., Della Corte, A., Lekszycki, T.: Gedanken experiments for the determination of two-dimensional linear second gradient elasticity coefficients. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik **66**(6), 3699–3725 (2015)
122. Placidi, L., Barchiesi, E., Misra, A.: A strain gradient variational approach to damage: a comparison with damage gradient models and numerical results. Mathematics and Mechanics of Complex Systems **6**(2), 77–100 (2018)
123. Placidi, L., Barchiesi, E., Misra, A., Andreaus, U.: Variational methods in continuum damage and fracture mechanics. Encyclopedia of continuum mechanics pp. 2634–2643 (2020)
124. Placidi, L., Misra, A., Barchiesi, E.: Two-dimensional strain gradient damage modeling: a variational approach. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik **69**(3), 56:1–19 (2018)
125. Pradel, F., Sab, K.: Homogenization of discrete media. Le Journal de Physique IV **8**(PR8), 317–324 (1998)
126. Ranaivomiarana, N., Irisarri, F.X., Bettebghor, D., Desmorat, B.: Optimal orthotropy and density distribution of two-dimensional structures. Mathematics and Mechanics of Complex Systems **6**(4), 293–305 (2018)
127. Reiher, J.C., Giorgio, I., Bertram, A.: Finite-element analysis of polyhedra under point and line forces in second-strain gradient elasticity. Journal of Engineering Mechanics **143**(2), 1–13 (2017)
128. Reissner, E.: On a variational theorem in elasticity. Journal of Mathematics and Physics **29**(1), 90–95 (1950)
129. Reissner, E.: On a variational theorem for finite elastic deformations. Journal of Mathematics and Physics **32**, 129–135 (1953)
130. Sailer, S., Eugster, S.R., Leine, R.I.: The tippedisk: a tippetop without rotational symmetry. Regular and Chaotic Dynamics **25**(6), 553–580 (2020)
131. Salençon, J.: Handbook of Continuum Mechanics: General Concepts, Thermoelasticity. Physics and Astronomy Online Library. Springer (2001)
132. Salençon, J.: Mécanique des milieux continus: Concepts généraux. Mécanique des milieux continus. École Polytechnique (2005)
133. Salençon, J.: Virtual Work Approach to Mechanical Modeling. Wiley (2018)
134. Scerrato, D., Giorgio, I.: Equilibrium of two-dimensional cycloidal pantographic metamaterials in three-dimensional deformations. Symmetry **11**(12), 1523:1–20 (2019)
135. Scerrato, D., Zhurba Eremeeva, I.A., Lekszycki, T., Rizzi, N.L.: On the effect of shear stiffness on the plane deformation of linear second gradient pantographic sheets. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik **96**(11), 1268–1279 (2016)
136. Schulte, J., Dittmann, M., Eugster, S.R., Hesch, S., Reinicke, T., dell'Isola, F., Hesch, C.: Isogeometric analysis of fiber reinforced composites using Kirchhoff–Love shell elements. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **362**, 112845:1–34 (2020)
137. Schwartz, L.: Théorie des Distributions. Hermann (1973)
138. Seppecher, P., Alibert, J.J., dell'Isola, F.: Linear elastic trusses leading to continua with exotic mechanical interactions. Journal of Physics: Conference Series **319**(1), 1–13 (2011)
139. Silling, S.: Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces. Journal of the Mechanics and Physics of Solids **48**(1), 175 – 209 (2000)
140. Spagnuolo, M., Andreaus, U.: A targeted review on large deformations of planar elastic beams: extensibility, distributed loads, buckling and post-buckling. Mathematics and Mechanics of Solids **24**(1), 258–280 (2019)

141. Spagnuolo, M., Peyre, P., Dupuy, C.: Phenomenological aspects of quasi-perfect pivots in metallic pantographic structures. Mechanics Research Communications **101**, 103415:1–6 (2019)
142. Spagnuolo, M., Scerrato, D.: The mechanical diode: On the tracks of James Maxwell employing mechanical–electrical analogies in the design of metamaterials. In: Developments and Novel Approaches in Biomechanics and Metamaterials, pp. 459–469. Springer (2020)
143. Spagnuolo, M., Yildizdag, M.E., Andreaus, U., Cazzani, A.M.: Are higher-gradient models also capable of predicting mechanical behavior in the case of wide-knit pantographic structures? Mathematics and Mechanics of Solids **26**(1), 18–29 (2020)
144. Steigmann, D.J.: Theory of elastic solids reinforced with fibers resistant to extension, flexure and twist. International Journal of Non-Linear Mechanics **47**(7), 734 – 742 (2012)
145. Steigmann, D.J.: Finite Elasticity Theory. Oxford University Press (2017)
146. Steigmann, D.J., dell'Isola, F.: Mechanical response of fabric sheets to three-dimensional bending, twisting, and stretching. Acta Mechanica Sinica **31**(3), 373–382 (2015)
147. Steigmann, D.J., Faulkner, M.G.: Variational theory for spatial rods. Journal of Elasticity **33**(1), 1–26 (1993)
148. Timofeev, D., Barchiesi, E., Misra, A., Placidi, L.: Hemivariational continuum approach for granular solids with damage-induced anisotropy evolution. Mathematics and Mechanics of Solids pp. 1–33 (2020)
149. Toupin, R.A.: Elastic materials with couple-stresses. Archive of Rational Mechanics and Analysis **11**, 385–414 (1962)
150. Tran, L.V., Niiranen, J.: A geometrically nonlinear Euler–Bernoulli beam model within strain gradient elasticity with isogeometric analysis and lattice structure applications. Mathematics and Mechanics of Complex Systems **8**(4), 345–371 (2020)
151. Truesdell, C.: Die Entwicklung des Drallsatzes. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik **44**(4-5), 149–158 (1964)
152. Truesdell, C.: Essays in the History of Mechanics. Springer, New York (1968)
153. Truesdell, C.: A First Course in Rational Continuum Mechanics. Academic Press (1977)
154. Truesdell, C., Noll, W.: The non-linear field theories of mechanics. In: S. Flügge (ed.) The non-linear field theories of mechanics, *Encyclopedia of Physics*, vol. III/3. Springer (1965)
155. Truesdell, C., Toupin, R.: The classical field theories. In: S. Flügge (ed.) Principles of Classical Mechanics and Field Theory, *Encyclopedia of Physics*, vol. III/1. Springer (1960)
156. Turco, E.: Discrete is it enough? The revival of Piola–Hencky keynotes to analyze three-dimensional Elastica. Continuum Mechanics and Thermodynamics **30**(5), 1039–1057 (2018)
157. Turco, E.: In-plane shear loading of granular membranes modeled as a Lagrangian assembly of rotating elastic particles. Mechanics Research Communications **92**, 61–66 (2018)
158. Turco, E., Barchiesi, E.: Equilibrium paths of Hencky pantographic beams in a three-point bending problem. Mathematics and Mechanics of Complex Systems **7**(4), 287–310 (2019)
159. Turco, E., Barchiesi, E., Giorgio, I., dell'Isola, F.: A Lagrangian Hencky-type non-linear model suitable for metamaterials design of shearable and extensible slender deformable bodies alternative to Timoshenko theory. International Journal of Non-Linear Mechanics pp. 1–19 (2020)
160. Turco, E., dell'Isola, F., Misra, A.: A nonlinear lagrangian particle model for grains assemblies including grain relative rotations. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics **43**(5), 1051–1079 (2019)
161. Turco, E., Giorgio, I., Misra, A., dell'Isola, F.: King post truss as a motif for internal structure of (meta) material with controlled elastic properties. Royal Society open science **4**(10), 1–20 (2017)
162. Turco, E., Misra, A., Pawlikowski, M., dell'Isola, F., Hild, F.: Enhanced Piola–Hencky discrete models for pantographic sheets with pivots without deformation energy: numerics and experiments. International Journal of Solids and Structures **147**, 94–109 (2018)
163. Vaiana, N., Sessa, S., Marmo, F., Rosati, L.: A class of uniaxial phenomenological models for simulating hysteretic phenomena in rate-independent mechanical systems and materials. Nonlinear Dynamics **93**(3), 1647–1669 (2018)

164. Valoroso, N., Fedele, R.: Characterization of a cohesive-zone model describing damage and de-cohesion at bonded interfaces. Sensitivity analysis and mode-i parameter identification. International Journal of Solids and Structures **47**(13), 1666–1677 (2010)
165. Winter, T.N.: The mechanical problems in the corpus of Aristotle. Faculty Publications, Classics and Religious Studies Department (2007)
166. Yang, Z., Oterkus, E., Oterkus, S.: Peridynamic formulation for higher-order plate theory. Journal of Peridynamics and Nonlocal Modeling pp. 1–26 (2020)
167. Yang, Z., Oterkus, E., Oterkus, S.: A state-based peridynamic formulation for functionally graded Kirchhoff plates. Mathematics and Mechanics of Solids pp. 1–22 (2020)
168. Yildizdag, M.E., Barchiesi, E., dell'Isola, F.: Three-point bending test of pantographic blocks: numerical and experimental investigation. Mathematics and Mechanics of Solids **25**(10), 1965–1978 (2020)
169. Yildizdag, M.E., Demirtas, M., Ergin, A.: Multipatch discontinuous Galerkin isogeometric analysis of composite laminates. Continuum Mechanics and Thermodynamics **32**(3), 607–620 (2020)