

Universität Leipzig
Fakultät für Mathematik und Informatik
Mathematisches Institut

Mittag-Leffler-Funktionen, fraktionale Infinitesimalrechnung
und deren Anwendung zur Beschreibung des viskoelastischen
Verhaltens von Beton

Diplomarbeit

Leipzig, Oktober 2016

vorgelegt von
Matthias Hinze
Matrikel-Nr.: 1866054
Studiengang: Mathematik-Diplom

Betreuender Hochschullehrer: Prof. Dr. Hans-Peter Gittel
Mathematisches Institut
Abteilung Analysis

Vorwort

The mathematician's best work is art, a high perfect art, as daring as the most secret dreams of imagination, clear and limpid. Mathematical genius and artistic genius touch one another.

GÖSTA MAGNUS MITTAG-LEFFLER

Die Idee zur Betrachtung von Ableitungen und Integralen beliebiger (nicht-ganzzahliger) Ordnung geht auf einen Briefwechsel zwischen LEIBNIZ und DE L'HOSPITAL aus dem 17. Jahrhundert zurück [10, S. 3]. Seitdem ist eine umfassende mathematische Theorie zu diesem Thema, der *fraktionalen Infinitesimalrechnung* entstanden [26, 27, 30]. Bei deren Entwicklung hat ein ebenso lange bekannter Typ spezieller Funktionen, die nach dem schwedischen Mathematiker MITTAG-LEFFLER benannt wurden, neue Bedeutung erlangt, was ebenfalls zu einer Erweiterung der diesbezüglichen mathematischen Theorie geführt hat [16, 20, 23, 25, 28, 29]. In den vergangenen Jahrzehnten wurden auch weitreichende physikalische Anwendungen *fraktionaler Infinitesimalrechnung*, u.a. bei der Beschreibung des *viskoelastischen Verhaltens* verschiedener Materialien gefunden [4, 32]. In dieser Arbeit soll ein Teil der Theorie zu *fraktionaler Infinitesimalrechnung* und insbesondere zu *MITTAG-LEFFLER-Funktionen* dargelegt und zur Beschreibung des *viskoelastischen Verhaltens* des Baustoffes Beton verwendet werden. Die Idee zu dieser Arbeit entstand in einem Praktikum bei der DBE TECHNOLOGY GmbH in Peine. Dabei wurde ein technischer Bericht [21] zur Erweiterung des Stoffmodells für Beton verfasst, auf dem der angewandte Teil dieser Arbeit basiert. Dieses Stoffmodell soll beim Nachweis der Rissbeschränkung von sogenannten *Massenbetonbauwerken* in Endlagern für kontaminierte Abfallstoffe Anwendung finden.

Die Arbeit besteht aus fünf Abschnitten. Im ersten Teil soll eine Erweiterung des Stoffmodells von Beton im Kontext der Endlagerung von Abfallstoffen motiviert werden. Zudem werden einige physikalische Grundlagen zur *Viskoelastizität* beschrieben, bisherige Ansätze zur Modellierung dieses Phänomens vorgestellt sowie der fraktionale Ansatz erläutert. Im zweiten Teil finden sich verschiedene mathematische Aspekte zur *fraktionalen Infinitesimalrechnung*. Dabei wird insbesondere auf Eigenschaften von *MITTAG-LEFFLER-Funktionen* sowie die *LAPLACE-Transformation* und deren Verwendung zur Lösung *fraktionaler Differentialgleichungen* eingegangen. Zu diesem Problem werden auch einige numerische Methoden vorgestellt und getestet. Anschließend wird ein *fraktionales Teilstoffmodell* der *Viskoelastizität* beschrieben und die Lösung der

zugehörigen linearen fraktionalen Differentialgleichung dargelegt. Die Ergebnisse werden dann im vorletzten Teil mit experimentellen Werten aus den Kriechversuchen BGR 05019 [34], iBMB-10d [24], IfG 414-K-M2-1-56-8 [42] und IfG-M2-TCC 1, 2, 3, 5 [43] sowie dem Relaxationsversuch BGR 05020 [35] verglichen um erste Aussagen über die Eignung des fraktionalen Ansatzes bei der Anwendung auf Beton treffen zu können. Zudem werden auch die verschiedenen numerischen Methoden zur Lösung fraktionaler Differentialgleichungen auf das fraktionale Modell aus dem dritten Abschnitt angewandt. Im letzten Teil werden schließlich die Ergebnisse dieser Arbeit zusammengefasst und ein Ausblick auf Ansatzpunkte zur Weiterentwicklung des fraktionalen Stoffmodells gegeben.

Ich möchte mich bei der DBE TECHNOLOGY GmbH und insbesondere bei Christian Lerch und Dr. Nina Müller-Hoeppe bedanken. Durch sie bin ich auf das Thema dieser Arbeit gestoßen. Ich habe große Wertschätzung, Vertrauen und Unterstützung während meiner Zeit in diesem Unternehmen erhalten, welches ich dank des Engagements von Carsten Schmidt kennenlernen durfte. Ich danke Prof. Dr. Hans-Peter Gittel für die Betreuung dieser Arbeit und die vielen wichtigen Hinweise zu den mathematischen Details sowie Maria Mateev und Franz Patzig für Denkanstöße und Kritiken. Schließlich möchte ich mich bei meinen Eltern bedanken, die mir die Jahre meines Studiums ermöglicht und mich in jeder Situation unterstützt haben.

Leipzig, Oktober 2016

Matthias Hinze

Inhaltsverzeichnis

1	Physikalische Grundlagen	1
1.1	Motivation	1
1.2	Deformation und Spannung	1
1.2.1	Herleitung von Verzerrungs- und Spannungstensor	1
1.2.2	Eigenschaften von Verzerrungs- und Spannungstensor	5
1.3	Kriechen und Relaxation	6
1.4	Rheologische Modelle	7
2	Aspekte der fraktionalen Infinitesimalrechnung	10
2.1	Gamma-Funktion	10
2.1.1	Grundlegende Eigenschaften	10
2.1.2	Monotonieverhalten der Gamma-Funktion $\Gamma = \Gamma(x)$ für $x > 0$	12
2.2	MITTAG-LEFFLER-Funktionen	15
2.2.1	Historische Einordnung	15
2.2.2	Konvergenz	16
2.2.3	Einige Spezialfälle	17
2.2.4	Funktionalgleichungen und Rekursionsformeln	17
2.2.5	Integraldarstellung und asymptotisches Verhalten	19
2.2.6	Eigenschaften der Funktion $e(t) := E_{\alpha,\beta}(-\lambda t^\alpha)$	22
2.3	LAPLACE-Transformation	29
2.3.1	Definition und Transformationsregeln	29
2.3.2	Reihenentwicklung von LAPLACE-Transformierten	33
2.3.3	LAPLACE-Transformation der MITTAG-LEFFLER-Funktionen	34
2.4	Fraktionale Infinitesimalrechnung	35
2.4.1	Fraktionale Integrale und Ableitungen	36
2.4.2	Fraktionale Differentialgleichungen	44
2.4.3	Numerik fraktionaler Differentialgleichungen	48
3	Fraktionales Stoffmodell	56
3.1	Kriechversuch	57
3.2	Relaxationsversuch	58
4	Vergleich mit experimentellen Werten	61
4.1	Implementierung	61
4.2	Vorbereitung experimenteller Werte	63
4.3	Ergebnisse	65
4.3.1	Kriechversuche	65
4.3.2	Relaxationsversuch	75

5 Resümee und Ausblick	78
Kurzzusammenfassung	80
Anhang	i
A Nomenklatur	i
B MATLAB-Quellcode	iii
Literaturverzeichnis	xii
Abbildungsverzeichnis	xvi
Tabellenverzeichnis	xvi
Quellcodeverzeichnis	xvi

1 Physikalische Grundlagen

1.1 Motivation

Zur Abdichtung von Zugangsstrecken zu Einlagerungsbereichen von radioaktiven Abfällen werden *Abdichtbauwerke* aus Beton erstellt. Aufgrund ihrer Funktion ist für diese Bauwerke der Nachweis der *Rissbeschränkung* zu führen. Für den Nachweis der Rissbeschränkung wird ein Stoffmodell zur Beschreibung des Betonverhaltens benötigt. In diesem Fall geht es speziell um ein Stoffmodell des Betons M2, welches um eine Komponente erweitert werden soll, die das *viskoelastische Verhalten* des Baustoffs beschreibt. Dazu soll überprüft werden, ob der Einsatz von *fraktionaler Infinitesimalrechnung*, welcher in der Polymerforschung bereits Erfolge geliefert hat [5, 33], bei der Modellierung hilfreich sein kann.

Unter *Viskoelastizität* ist ein zeitabhängiges elastisches Verhalten eines Stoffes zu verstehen, das durch zeitlich verzögerte Umlagerungsvorgänge von Molekülen entsteht. Eine wesentliche Aufgabe ist die Untersuchung der Dynamik von Stoffen mit dieser speziellen Eigenschaft. Die kontinuumsmechanischen Grundlagen sowie die physikalischen Modelle zur Beschreibung von Viskoelastizität sollen daher in diesem Abschnitt dargestellt werden.

1.2 Deformation und Spannung

1.2.1 Herleitung von Verzerrungs- und Spannungstensor

Zur Beschreibung der mechanischen Wirkung von Kräften auf materielle Körper spielen die Begriffe *Deformation* und *Spannung* eine wichtige Rolle. Die mathematische Formulierung dieser Phänomene (vgl. [17, 39]) soll in diesem Abschnitt erfolgen.

Zunächst wird der *materielle Körper* als ein Gebiet $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^3$ zum Zeitpunkt t_0 aufgefasst. Nach einer *Deformation* des Körpers nimmt das System zum Zeitpunkt $t > t_0$ ein anderes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein. Ein *materieller Punkt* mit der Anfangsposition $\mathbf{a} \in \Omega_0$ hat nach der Deformation die Position $\mathbf{x} \in \Omega_t$. Daher kann die Deformation durch eine Abbildung

$$\Phi : \Omega_0 \rightarrow \Omega_t, \quad \mathbf{a} \mapsto \mathbf{x}$$

beschrieben werden, welche unter Annahme der Erhaltung der Materie bijektiv ist. Außerdem sei angenommen, dass Φ ein C^1 -Diffeomorphismus ist. Desweiteren wird die *Verschiebung* u eines materiellen Punktes definiert durch die Abbildung

$$u : \mathbf{a} \mapsto \mathbf{x} - \mathbf{a} = \Phi(\mathbf{a}) - \mathbf{a}.$$

Betrachte im Folgenden wieder die Deformation Φ und deren Gradienten, den *Deformationsgradiententensor*

$$\mathbf{F} = (\mathbf{F}_{ij}) = \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial a_j} \right) = \nabla \Phi.$$

Mittels der Definition von u erhält \mathbf{F} die Form

$$\mathbf{F} = \nabla u + \mathbf{I}.$$

Der Deformationsgradiententensor beschreibt die Wirkung einer Deformation auf einen materiellen Punkt. Zur genaueren Erläuterung betrachte man lokale Deformationen von Abständen und Winkeln in der Umgebung eines Punktes. Seien zunächst $\mathbf{a}, \mathbf{a}' \in \Omega_0$ und $\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{a}), \mathbf{x}' = \Phi(\mathbf{a}')$ deren Bilder unter Φ . Dann folgt mittels Taylor-Entwicklung

$$\Phi(\mathbf{a}') = \Phi(\mathbf{a}) + \nabla \Phi(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{a}' - \mathbf{a}) + o(|\mathbf{a}' - \mathbf{a}|).$$

Damit ergibt sich

$$\mathbf{x}' - \mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{a}' - \mathbf{a}) + o(|\mathbf{a}' - \mathbf{a}|).$$

Daraus erhalten wir für kleine Abstände $|\mathbf{a}' - \mathbf{a}|$ in erster Näherung

$$|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^2 \simeq (\mathbf{a}' - \mathbf{a})^T \mathbf{F}^T \mathbf{F} (\mathbf{a}' - \mathbf{a}) \quad \text{oder} \quad |\mathbf{x}' - \mathbf{x}| \simeq [(\mathbf{a}' - \mathbf{a})^T \mathbf{F}^T \mathbf{F} (\mathbf{a}' - \mathbf{a})]^{\frac{1}{2}}.$$

Definiere hierbei

$$\mathbf{C} := \mathbf{F}^T \mathbf{F}.$$

Sei zu den bereits gegebenen Punkten in Ω_0 noch $\mathbf{a}'' \in \Omega_0$ mit $\mathbf{x}'' = \Phi(\mathbf{a}'')$. Dann folgt nach analoger Herleitung (vgl. [39, S. 62])

$$\cos[(\mathbf{x}'' - \mathbf{x}), (\mathbf{x}' - \mathbf{x})] \simeq \frac{(\mathbf{a}'' - \mathbf{a})^T \mathbf{C} (\mathbf{a}' - \mathbf{a})}{[(\mathbf{a}'' - \mathbf{a})^T \mathbf{C} (\mathbf{a}'' - \mathbf{a})]^{\frac{1}{2}} [(\mathbf{a}' - \mathbf{a})^T \mathbf{C} (\mathbf{a}' - \mathbf{a})]^{\frac{1}{2}}}.$$

Dadurch wird deutlich, dass die Deformation von Abständen und Winkeln lokal durch eine Bilinearform, welche durch \mathbf{C} , den sogenannten *rechten CAUCHY-GREEN-Tensor* definiert ist, beschrieben werden kann. Mittels der Verschiebung u erhält dieser Tensor die Form

$$\mathbf{C} = (\nabla u + \mathbf{I})^T (\nabla u + \mathbf{I}) = \mathbf{I} + \nabla u + \nabla u^T + \nabla u^T \nabla u. \quad (1.1)$$

Bei der qualitativen Beschreibung der Deformation ist zwischen *Starrkörperbewegung* (*rigid body transformation*) und *Verzerrung* zu unterscheiden. Starrkörperbewegung meint eine Kombination aus Translation und Rotation des gesamten Körpers bei Erhaltung der Abstände materieller Punkte. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\mathbf{C} = \mathbf{I}$ gilt.

Wenn sich allerdings die Abstände materieller Punkte bei der Deformation ändern, spricht man von Verzerrung und definiert den *Verzerrungstensor*

$$\mathbf{X} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}).$$

Es gilt $\mathbf{X} = 0$ genau dann, wenn eine starre Deformation, d.h. lediglich eine Starrkörperbewegung vorliegt [39, S.63]. Im Falle kleiner Verschiebungen, die in der Festkörpermechanik häufig angenommen werden können, kann der letzte Term in (1.1) vernachlässigt werden und es ergibt sich der *linearisierte Verzerrungstensor*

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T) \quad (1.2)$$

[39, Kap. 5.1]. Dieser Tensor enthält auf der Diagonale (ε_{ii} , $i = 1, 2, 3$) jeweils *Dehnungen* (positives Vorzeichen) bzw. *Stauchungen* (negatives Vorzeichen), d.h. die relative Längenänderung in der jeweiligen Koordinatenrichtung durch die Deformation (gemessen in den Einheiten $1 \frac{mm}{m} = 0,1\%$). Die Komponenten außerhalb der Diagonale (ε_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$, $i \neq j$), bezeichnet als *Gleitungen*, entsprechen der Hälfte der Winkeländerung zwischen zwei Ebenen des Materials, die vor der Deformation parallel zu der Koordinatenrichtung i bzw. j verliefen [17, Kap. 3.3].

Die *Spannung* σ beschreibt eine wirkende Kraft auf eine Querschnittsfläche eines deformierbaren Körpers, welche sowohl extern durch Kräfte an der Oberfläche des Körpers als auch intern (bspw. durch Eigengewicht) realisiert werden kann (relevante Größenordnung in der Einheit Megapascal (MPa): $1MPa = 1 \frac{N}{mm^2}$). Bei Betrachtung eines Flächenelements dA_n innerhalb eines Körpers mit zugehörigem Normaleneinheitsvektor \mathbf{n} und der darauf wirkenden Kraft $d\mathbf{F}_n$ erhält man den sogenannten *Spannungsvektor*

$$\mathbf{T}_n = \frac{d\mathbf{F}_n}{dA_n}.$$

Der Spannungsvektor entspricht der Spannung in dem Punkt bezüglich des durch \mathbf{n} beschriebenen Flächenelements. Zur vollständigen Beschreibung des *Spannungszustandes* in einem Punkt sind alle denkbaren Spannungsvektoren zu berücksichtigen. Betrachte dazu ein Volumenelement in kartesischen Koordinaten mit den Normaleneinheitsvektoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ (Richtungen der Koordinatenachsen) der begrenzenden Flächen. Dann ist der Spannungszustand charakterisiert durch die Vektoren

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1 &= \sigma_{11}\mathbf{e}_1 + \sigma_{12}\mathbf{e}_2 + \sigma_{13}\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{T}_2 &= \sigma_{21}\mathbf{e}_1 + \sigma_{22}\mathbf{e}_2 + \sigma_{23}\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{T}_3 &= \sigma_{31}\mathbf{e}_1 + \sigma_{32}\mathbf{e}_2 + \sigma_{33}\mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Die zugehörigen Koeffizienten σ_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$ ergeben dann den sogenannten *Spannungstensor*

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Dabei charakterisiert der erste Index i die Normale \mathbf{e}_i zu der Fläche, bezüglich welcher der Spannungsvektor \mathbf{T}_i wirkt und der zweite Index j der Richtung \mathbf{e}_j der zugehörigen Komponente von \mathbf{T}_i . Dementsprechend ist die Kraftwirkung bei den Diagonalelementen σ_{ii} , $i = 1, 2, 3$ von (1.4) senkrecht zu den entsprechenden Flächen (*Normalspannung*). Positive Einträge entsprechen einer *Zugspannung*, negative Einträge einer *Druckspannung*. Bei den Einträgen außerhalb der Diagonale von (1.4) (σ_{ij} , $i \neq j$), den sogenannten *Schub-* oder *Tangentialspannungen* ist die Kraftwirkung entsprechend parallel zur jeweiligen Fläche. Ein Spannungstensor kann nun für jeden Raumpunkt \mathbf{x} zum Zeitpunkt t verschieden sein. Man erhält also ein Spannungstensorfeld $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$. Bei gegebenem Spannungstensorfeld kann nun der Spannungsvektor $\mathbf{T}_n = \mathbf{T}_n(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t)$ in einem Punkt \mathbf{x} zum Zeitpunkt t bezüglich der Fläche mit der Normale \mathbf{n} bestimmt werden. Dazu betrachte ein tetragonales Volumenelement dV mit drei zueinander orthogonalen Flächen in den Schnittebenen der Koordinatenachsen und einer Fläche mit dem beliebigen Normalenvektor \mathbf{n} . Im Kräftegleichgewicht und für $dV \rightarrow 0$ erhält man

$$\mathbf{T}_n dA_n - \mathbf{T}_1 dA_1 - \mathbf{T}_2 dA_2 - \mathbf{T}_3 dA_3 = 0. \quad (1.5)$$

Mithilfe der Beziehung

$$dA_i = n_i dA_n, \quad n_i = \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2, 3$$

sowie (1.3) und (1.5) folgt dann

$$(\mathbf{T}_n)_i = \sigma_{ji} n_j, \quad i = 1, 2, 3 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{T}_n = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

[17, S. 12ff.]. Dies liefert zusammenfassend die folgende Aussage.

Aussage 1.1 (CAUCHY'sches Fundamentalthem [1, S. 144]):

Der Spannungsvektor \mathbf{T}_n im Punkt \mathbf{x} zum Zeitpunkt t bezüglich der Fläche mit der Normale \mathbf{n} ist vollständig durch die drei Spannungsvektoren \mathbf{T}_i , $i = 1, 2, 3$ bezüglich der drei Koordinatenebenen, die sich gegenseitig in \mathbf{x} durchdringen, bestimmt und es gilt der lineare Zusammenhang

$$\mathbf{T}_n(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t) = \boldsymbol{\sigma}^T(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}$$

zwischen dem von \mathbf{n} abhängigen Spannungsvektor und dem von \mathbf{n} unabhängigen Spannungstensor. Der Spannungszustand kann also vollständig entweder durch drei Spannungsvektoren \mathbf{T}_i , $i = 1, 2, 3$ oder durch neun Spannungstensorkomponenten σ_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$ beschrieben werden.

1.2.2 Eigenschaften von Verzerrungs- und Spannungstensor

Der linearisierte Verzerrungstensor ε und der Spannungstensor σ sind beides symmetrische Tensoren. Dies folgt für ε per Definition (1.2) und aufgrund des Momentengleichgewichts für σ . Aus Grundüberlegungen der linearen Algebra ist bekannt, dass reelle symmetrische Matrizen nur reelle Eigenwerte besitzen und bezüglich einer Orthogonalbasis in Diagonalform zu transformieren sind. Aus physikalischer Sicht bedeutet dies, dass durch Drehung des Koordinatensystems erreicht werden kann, dass nur Normalspannungen und keine Schubspannungen bzw. nur Dehnungen und Stauchungen aber keine Winkeländerungen bezüglich der Koordinaten des gedrehten Systems auftreten. Die zugehörige Transformation wird als *Hauptachsentransformation* bezeichnet und basiert auf der Lösung eines Eigenwertproblems [18, Kap. 2.1]. Bei den Experimenten aus Abschnitt 4.2 wurde das Koordinatensystem bzw. der Versuchsaufbau gerade so gewählt, dass die Tensoren Diagonalgestalt haben.

Nach Bestimmung der Hauptachsenform des Spannungstensors

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

wird dann in Anwendungsgebieten häufig zur weiteren Komplexitätsreduktion versucht, die drei Hauptspannungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ in einer einzigen skalaren Größe zusammenzufassen, der sogenannten *Vergleichsspannung*. Dieser Wert soll neben der Vereinfachung der Beschreibung auch eine Auskunft über eine Maximalspannung geben, bei welcher ein Material versagt. Sie kennzeichnet beispielsweise die *Fließgrenze*, also den Spannungswert, bei welchem die Verformung eines Materials irreversibel wird. Die Fließgrenze wird für Materialien häufig in einachsigen Versuchen bestimmt. Die Vergleichsspannung liefert also eine Möglichkeit, Spannungen aus einachsigen Versuchen mit Ergebnissen aus dreiachsigen Versuchen, also den Hauptspannungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ in Beziehung zu setzen. Die Bestimmung einer Vergleichsspannung basiert dabei auf empirisch ermittelten Hypothesen [40, Abschn. 1]. Bei einigen der in Abschnitt 4.2 beschriebenen Experimente wurde die *Vergleichsspannung* nach VON MISES

$$\sigma_V = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} \quad (1.6)$$

ermittelt. Die Gleichung (1.6) basiert dabei auf der sogenannten *Gestaltänderungsenergie-Hypothese*, welche davon ausgeht, dass der Fließbeginn nur von dem Anteil des Spannungstensors abhängt, der eine Gestaltsänderung des Materials (ohne Volumenänderung) hervorruft. Dieser Ansatz der Zerlegung eines Tensors in einen volumenändernden und einen gestaltsändernden Anteil entspricht aus mathematischer Sicht der Zerlegung in *Kugeltensor* und *Deviator*. Betrachte dazu allgemein einen Tensor \mathbf{S} . Dann bezeichnet

$$\mathbf{S}_K = \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{S}) \mathbf{I}$$

den *Kugeltensor* und

$$\mathbf{S}_D = \mathbf{S} - \mathbf{S}_K$$

den *Deviator* von \mathbf{S} . Diese beiden Tensoren haben offensichtlich die Eigenschaften

$$\text{tr}(\mathbf{S}_K) = \text{tr}(\mathbf{S}), \quad \text{tr}(\mathbf{S}_D) = 0.$$

In Bezug auf ε beschreibt dies die Zerlegung der Verzerrung in eine reine isotrope Volumenänderung ε_K und eine reine Gestaltsänderung bei konstantem Volumen ε_D . Analog erhält man für σ einen isotropen Spannungsanteil σ_K und eine Abweichung σ_D hiervon [18, Kap. 2.1]. Es stellt sich heraus, dass die Gesetze zur Beschreibung viskoelastischen Verhaltens bei *isotropem* Material (d.h. Materialverhalten unabhängig von der Richtung) getrennt für Volumen- und Gestaltsänderung vorliegen [18, Kap. 2.3.2]. Die physikalischen Gesetze können also unabhängig voneinander für Kugeltensoren von Spannung und Verzerrung sowie Deviatorspannung und -verzerrung betrachtet werden. Diese Eigenschaft der Zerlegung wird in Abschnitt 3 bei der Modellierung berücksichtigt und in Abschnitt 4.2 verwendet.

1.3 Kriechen und Relaxation

Die beiden viskoelastischen Eigenschaften von Beton, die in dieser Arbeit untersucht werden, sind *Kriechen* und *Relaxation*. Der Begriff *Kriechen* beschreibt die zeitabhängige Zunahme der Verformung eines Betons unter einer konstanten Dauerlast. Kriechen basiert auf Gleitprozessen und Wasserumlagerungen in der Mikrostruktur des Materials und ist abhängig vom Hydratationsgrad des Zementsteins sowie dem Belastungsalter [2, Kap. 2.1 + 2.4]. Im später beschriebenen Modell wird zwischen *Basis-* und *Übergangskriechen* unterschieden. Mit dem Begriff des Übergangskriechens wird dabei die anfänglich starke Abnahme der Deformationsrate nach einem instantanen Deformationsprung beschrieben, während Basiskriechen durch das sich später einstellende stationäre Verhalten, d.h. eine zeitlich nahezu konstante Deformationsrate charakterisiert wird.

Unter *Relaxation* versteht man den zeitabhängigen Abfall der Spannung in einem Probekörper bei konstanter Dehnung [2, Kap. 2.3]. Die Beschreibung der zeitlichen Entwicklung dieser beiden Prozesse erfolgt auf der Basis von *rheologischen Modellen*, die im Folgenden vorgestellt werden.

1.4 Rheologische Modelle

Der Begriff *Rheologie* bezeichnet die Lehre vom Fließ- und Verformungsverhalten von Stoffen [18, Kap. 6.2.1]. Typischerweise wird zur Bestimmung dieses Verhaltens der Zusammenhang von Spannung und Verzerrung bei Kriechen und Relaxation in Experimenten untersucht. Die Modellierung der Zusammenhänge erfolgt durch zwei wesentliche Bausteine. Das HOOKE'sche Gesetz

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) \quad (1.7)$$

dient der Beschreibung eines idealen elastischen Festkörpers (dargestellt durch eine Feder) und das NEWTON'sche Gesetz

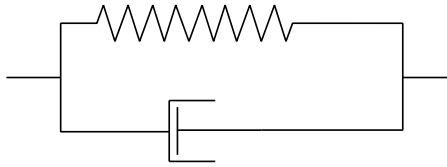
$$\sigma(t) = \eta \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \quad (1.8)$$

wird zur Beschreibung einer idealen NEWTON'schen Flüssigkeit (dargestellt durch einen Bremszylinder) verwendet. Hierbei sind die *Federsteifigkeit* E bzw. die *Dämpferviskosität* η zeitlich konstante Größen. In dieser Form der beiden Gesetze wird zur Vereinfachung der eindimensionale Fall betrachtet. Daher sind Spannung und Verzerrung skalare und keine tensoriellen Größen mehr. Dies kann durch Darstellung im Hauptachsensystem und bei bestimmten Versuchsbedingungen auch für einen dreidimensionalen Probekörper (s. Abschnitt 4.2) unter Annahme eines *homogenen* (d.h. gleiches Materialverhalten in jedem Punkt) und *isotropen* (d.h. gleiches Materialverhalten unabhängig von der Richtung) Materials erreicht werden. Im allgemeinen Fall haben (1.7) und (1.8) die Form

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon}(t) \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{\sigma}(t) = \boldsymbol{\eta} \frac{d}{dt} \boldsymbol{\varepsilon}(t),$$

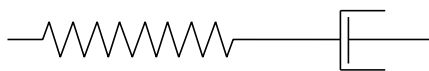
wobei \mathbf{E} und $\boldsymbol{\eta}$ Tensoren 4. Stufe sind. Beide Gesetze entsprechen einer idealisierten Darstellung von Stoffen, wie sie in Realität nicht vorkommen, sodass viskoelastische Modelle durch Kombination von HOOKE'schen Federn und NEWTON'schen Dämpferelementen aufgestellt werden. Die einfachsten Modelle entstehen durch Parallel- bzw. Reihenschaltung einer Feder mit einem Dämpfer und werden als KELVIN- bzw. MAXWELL-Modell bezeichnet [2, S. 26]. Bei Reihenschaltung zweier Elemente addieren sich die Dehnungen der Elemente zur Gesamtdehnung und die Spannung ist für beide gleich groß. Für parallel geschaltete Elemente ist die Dehnung jeweils gleich groß und die Spannung der

einzelnen Elemente wird addiert. Damit erhält man zu der jeweiligen Modellskizze aus (1.7) und (1.8) eine zugehörige Differentialgleichung, die das Modell mathematisch beschreibt. Das KELVIN-Modell



$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} + \frac{E}{\eta}\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{\eta} \quad (1.9)$$

liefert eine korrekte Beschreibung des Kriechverhaltens unter einer konstanten Dauerlast, sagt allerdings keinen Spannungsabfall bei konstanter Dehnung voraus, was dem Relaxationsverhalten entspricht. Umgekehrt beschreibt das MAXWELL-Modell



$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma(t)}{dt} + \frac{\sigma(t)}{\eta} \quad (1.10)$$

das Relaxationsverhalten unter konstanter Dehnung richtig, ergibt allerdings eine konstante Dehnungsgeschwindigkeit unter konstanter Last, was den experimentellen Ergebnissen widerspricht. Einfache Erweiterungen dieser Modelle (u.a. ZENER- oder KELVIN-VOIGT-Modell) beschreiben Kriechverhalten und Relaxation zwar qualitativ allerdings nicht gleichzeitig auch quantitativ in zufriedenstellendem Maße [27, S. 271], sodass i.A. ein Multi-Parameter-Ansatz der Form

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k \sigma(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^m b_k \frac{d^k \varepsilon(t)}{dt^k} \quad (1.11)$$

gewählt werden muss. Dieser führt abgesehen von der Linearität zu komplizierten Differentialgleichungen hoher Ordnung und Schwierigkeiten bei der Lösung angewandter Probleme [27, S. 271].

Ein anderer Ansatz zur Beschreibung des viskoelastischen Verhaltens von Stoffen ergibt sich aus der Betrachtung des Spannungs-Dehnungs-Verhaltens von Feder und Dämpferelement in (1.7) und (1.8) aus mathematischer Sicht. Während das HOOKE'sche Modell die Proportionalität von σ und ε zeigt, ergibt das NEWTON'sche Modell eine Proportionalität zwischen σ und der ersten Ableitung von ε . Für ein natürliches Material liegt es daher nah, die Spannung σ proportional zu einer Ableitung der Dehnung ε vom Grad α mit $0 < \alpha < 1$ zu wählen, d.h.

$$\sigma(t) = p \cdot D^\alpha \varepsilon(t). \quad (1.12)$$

Dabei sind p und die Ableitungsordnung α Materialkonstanten. Die zugehörige mathematische Theorie zur Definition und Untersuchung solcher Ableitungen beliebiger Ordnung ist unter dem Begriff der *fraktionalen Infinitesimalrechnung* bekannt und wird genauer in Abschnitt 2.4 beschrieben. Diese Idee wurde u.a. in [15] und [36] erstmals verwendet. Anstelle von Feder und Dämpferelement werden dabei auch *fraktionale Elemente* (in Zeichnungen gekennzeichnet durch eine Raute) in den rheologischen Modellen eingeführt. Auch hierbei ist eine Kombination mehrerer fraktionaler MAXWELL- und KELVIN-Elemente bspw. zur Beschreibung von Kriech- und Relaxationsverhalten möglich, sodass der allgemeine Modellansatz die folgende Form hat.

$$\sum_{k=0}^n a_k D^{\alpha_k} \sigma(t) = \sum_{k=0}^m b_k D^{\beta_k} \varepsilon(t) \quad (1.13)$$

Allerdings, und das ist der entscheidende Vorteil gegenüber klassischen Modellen, hat sich bei Betrachtung experimenteller Ergebnisse zum viskoelastischen Verhalten von Polymeren gezeigt, dass ein Fünf-Parameter-Modell der Form

$$\sigma(t) + bD^{\beta} \sigma(t) = E_0 \varepsilon(t) + E_1 D^{\alpha} \varepsilon(t) \quad (1.14)$$

mit Parametern $\alpha, \beta, b, E_0, E_1$ bereits sehr zufriedenstellende Ergebnisse liefert [4]. Zudem wurde der zunächst empirische Ansatz des fraktionalen Fünf-Parameter-Modells für Polymere auch durch molekulartheoretische Erkenntnisse untermauert [3, S. 205ff.] und außerdem gezeigt, dass für $\alpha = \beta$ die thermodynamischen Beschränkungen erfüllt sind [5, S. 138ff.]. Dies führt zu einem Vier-Parameter-Modell

$$\sigma(t) + bD^{\alpha} \sigma(t) = E_0 \varepsilon(t) + E_1 D^{\alpha} \varepsilon(t). \quad (1.15)$$

Basierend auf diesen Überlegungen wurde für die Beschreibung des viskoelastischen Verhaltens von Beton ein rheologisches Modell gewählt, welches genauer in Abschnitt 3 dargestellt wird.

2 Aspekte der fraktionalen Infinitesimalrechnung

2.1 Gamma-Funktion

2.1.1 Grundlegende Eigenschaften

Die *Gamma-Funktion* $\Gamma = \Gamma(z)$ ist eine Erweiterung der Fakultätsfunktion für beliebige reelle und sogar komplexe Zahlen und spielt eine wichtige Rolle bei der Definition von fraktionalen Ableitungen und Integralen sowie der MITTAG-LEFFLER-Funktionen, welche später eingeführt werden. Sie ist nach EULER definiert durch

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0. \quad (2.1)$$

Zum Nachweis der Konvergenz des Integrals in (2.1) für $\operatorname{Re}(z) > 0$ betrachte man die folgenden Aussagen.

•

$$|t^{z-1} e^{-t}| = \left| t^{\operatorname{Re}(z)-1} \underbrace{t^{i \cdot \operatorname{Im}(z)}}_{=e^{i \cdot \operatorname{Im}(z) \ln(t)}} e^{-t} \right| = t^{\operatorname{Re}(z)-1} e^{-t}$$

- Für $\operatorname{Re}(z) \geq 1$ fällt e^{-t} wesentlich schneller als $t^{\operatorname{Re}(z)-1}$ wächst. Also ist der Integrand für große t beschränkt.
- Für $\operatorname{Re}(z) \in (0, 1)$ ist der Integrand singularär in $t = 0$. Allerdings existiert das uneigentliche Integral wegen

$$\lim_{\tau \searrow 0} \int_{\tau}^1 e^{-t} t^{\operatorname{Re}(z)-1} dt \leq \lim_{\tau \searrow 0} \int_{\tau}^1 t^{\operatorname{Re}(z)-1} dt = \frac{1}{\operatorname{Re}(z)}.$$

Insbesondere ist das Integral in (2.1) eine holomorphe Funktion.

Im Folgenden soll das Verhältnis der Gamma-Funktion zur Fakultät gezeigt werden. Durch partielle Integration erhält man

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} t^z e^{-t} dt = \underbrace{[-e^{-t} t^z]_0^{\infty}}_{=0} + z \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt = z\Gamma(z) \quad (2.2)$$

und durch direkte Integration

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{\infty} = 1. \quad (2.3)$$

Anhand der Eigenschaften (2.2) und (2.3) ist insbesondere die Beziehung zur Fakultät-Funktion zu erkennen. Für $n \in \mathbb{N}$ folgt

$$\Gamma(n + 1) = n!. \quad (2.4)$$

Zum Nachweis weiterer Eigenschaften der Gamma-Funktionen sollen noch zwei weitere Darstellungen betrachtet werden. Der Zusammenhang aller drei Darstellungen wird bspw. in [37, S. 24ff.] gezeigt.

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^z n!}{z(z+1) \cdots (z+n)} \quad (2.5)$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} \quad \gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)\right) \quad (2.6)$$

Dabei ist γ in (2.6) die EULER-MASCHERONI-Konstante. Die angegebene Darstellung konvergiert gegen $\gamma \approx 0,5772157$ [37, S. 26]. Mithilfe von Gleichung (2.6) ergibt sich beispielsweise die folgende Aussage.

Lemma 2.1:

Für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ gilt

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

Beweis. Aus der Darstellung (2.6) ist zu erkennen, dass die Menge \mathbb{Z} gerade die Vereinigungsmenge der Nullstellen von $\frac{1}{\Gamma(z)}$ und $\frac{1}{\Gamma(-z)}$ darstellt und folglich die Singularitäten von $\Gamma(z)$ und $\Gamma(-z)$ gerade durch die Menge \mathbb{Z} gegeben sind. Für $z \notin \mathbb{Z}$ folgt mit (2.6)

$$\Gamma(z)\Gamma(-z) = \left[-z^2 \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)\right]^{-1}.$$

Durch Einsetzen von $\Gamma(-z)$ in (2.2) erhalten wir

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = z^{-1} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)^{-1}.$$

Mithilfe der Produktreihen-Darstellung der Sinus-Funktion

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

folgt schließlich die Behauptung. □

Beispiel 2.2:

Für $z = \frac{1}{2}$ folgt aus Lemma 2.1 $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

2.1.2 Monotonieverhalten der Gamma-Funktion $\Gamma = \Gamma(x)$ für $x > 0$

Zur Beschreibung des Verhaltens der MITTAG-LEFFLER-Funktionen, welche im nächsten Abschnitt eingeführt werden, ist besonders das Verhalten der Gamma-Funktion für positive reelle Argumente von Interesse. Betrachte also im Folgenden die Integraldarstellung der Gamma-Funktion

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0. \quad (2.7)$$

Zur Untersuchung des Monotonieverhaltens von (2.7) werden die Ableitungen der Gamma-Funktion betrachtet. Der Integrand in (2.7) ist stetig und positiv für $t \in (0, \infty)$. Damit folgt $\Gamma(x) > 0 \forall x > 0$. Der Graph von Γ befindet sich also im ersten Quadranten. Betrachte nun die Funktion

$$f(x, t) := \frac{\partial}{\partial x} t^{x-1} e^{-t} = \ln(t) t^{x-1} e^{-t}.$$

Offensichtlich ist f stetig. Sei $x \in [a, b]$ für $0 < a < b < \infty$. Dann gilt:

$$|f(x, t)| \leq (t^{a-1} + t^{b-1}) |\ln(t)| e^{-t} =: g(t), \quad t > 0.$$

Nun folgt die Konvergenz von $\int_0^\infty g(t) dt$ aus der folgenden Rechnung.

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^{a-1} |\ln(t)| e^{-t} dt &\leq - \int_0^1 t^{a-1} \ln(t) dt = \underbrace{\left[-\frac{1}{a} t^a \ln(t) \right]_0^1}_{=0} + \int_0^1 \frac{1}{a} t^{a-1} dt = \frac{1}{a^2} \\ \int_1^\infty t^{a-1} |\ln(t)| e^{-t} dt &\leq \int_1^\infty t^a e^{-t} dt \leq \int_0^\infty t^{[a]} e^{-t} dt = [a]! \end{aligned}$$

Damit folgt die gleichmäßige Konvergenz von $\int_0^\infty f(x, t) dt$ für $x \in [a, b]$ und nach dem Satz über die Differentiation uneigentlicher Parameterintegrale ergibt sich

$$\Gamma'(x) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} t^{x-1} e^{-t} dt = \int_0^\infty \ln(t) t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0. \quad (2.8)$$

Durch analoge Rechnung erhalten wir die zweite Ableitung der Gamma-Funktion

$$\Gamma''(x) = \int_0^\infty (\ln(t))^2 t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0. \quad (2.9)$$

Aus der Positivität des Integranden in (2.9) folgt $\Gamma''(x) > 0 \forall x > 0$. Demnach ist Γ' eine streng monoton wachsende Funktion. Auf Grundlage dieser Erkenntnis wird im Folgen-

den das Verhalten von $\Gamma = \Gamma(x)$ für $x > 0$ ermittelt (vgl. [19, S. 2f.]). Um das Verhalten von Γ für $x \rightarrow \infty$ zu bestimmen, betrachte die logarithmische Ableitung von (2.2)

$$\Psi(x+1) = \frac{1}{x} + \Psi(x), \quad \Psi(x) := \frac{d}{dx} \ln(\Gamma(x)) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}. \quad (2.10)$$

Dabei ist $\Psi = \Psi(x)$ die sogenannte *Digamma-Funktion*. Für natürliche Argumente $n \in \mathbb{N}$ in (2.10) folgt nun

$$\Psi(n+1) = \Psi(1) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Wegen der Divergenz der harmonischen Reihe folgt

$$\Psi(n)\Gamma(n) = \Psi(n)(n-1)! \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.$$

Nun gilt per Definition $\Gamma'(x) = \Psi(x)\Gamma(x)$. Da Γ' monoton wachsend und für natürliche Argumente $n \rightarrow \infty$ divergiert, folgt $\lim_{x \rightarrow \infty} \Gamma'(x) = \infty$. Weiterhin folgt aus (2.4) $\Gamma(2) = 1 < 2 = \Gamma(3)$. Demnach gilt $\Gamma'(x) > 0$ für $x \in [2, 3]$ und da Γ' monoton wachsend ist, sogar $\Gamma'(x) > 0$ für $x \geq 2$. Dies ergibt wiederum:

$$\Gamma(x) \text{ ist monoton wachsend für } x \geq 2. \quad (2.11)$$

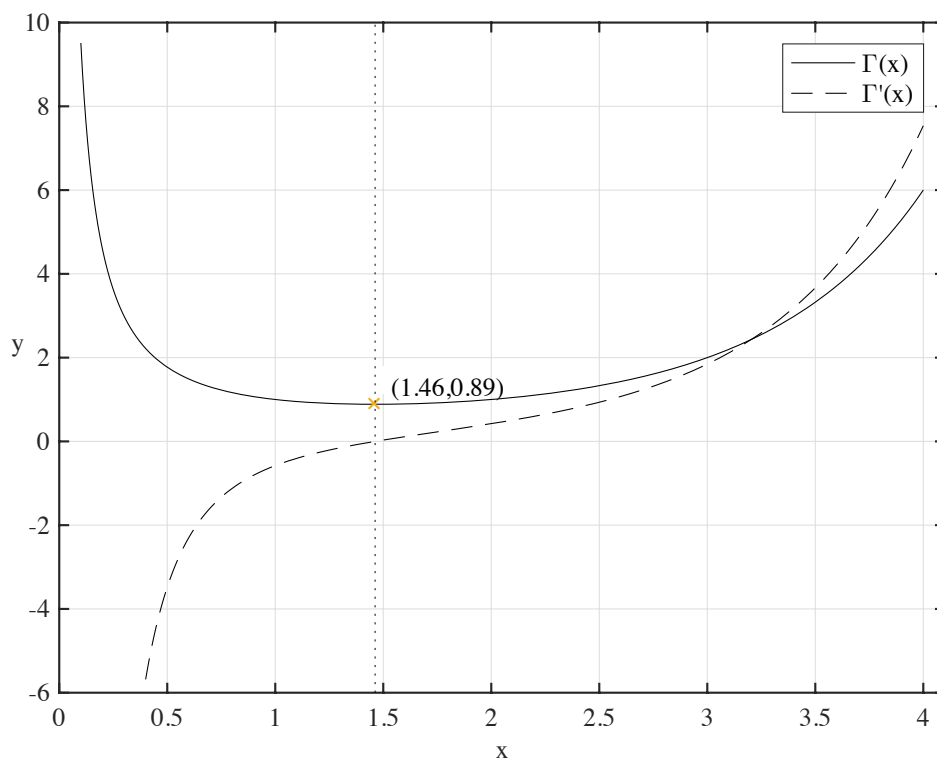
Wegen (2.4) gilt außerdem $\lim_{x \rightarrow \infty} \Gamma(x) = \infty$. Bezüglich des Verhaltens für $x \rightarrow 0$ betrachte

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \geq \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt \geq \int_0^1 t^{x-1} \frac{1}{e} dt = \frac{1}{e} \left[\frac{t^x}{x} \right]_0^1 = \frac{1}{ex} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \infty \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \Gamma(x) = \infty. \end{aligned}$$

Da nach (2.3) und Beispiel 2.2 gilt $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} > 1 = \Gamma(1)$, folgt analog zur Überlegung für (2.11):

$$\Gamma(x) \text{ ist monoton fallend für } x \in (0, 1]. \quad (2.12)$$

Wegen $\Gamma(1) = 1 = \Gamma(2)$ liegt die Nullstelle von Γ' , also das Minimum von Γ in $(1, 2)$. Der genaue Wert wurde in MATLAB numerisch ermittelt (Abbildung 2.1).



```
>> f=@(x) integral(@(t) log(t).*t.^(x-1).*exp(-t),0,inf);
>> x=fzero(f,1.5)
```

```
x =
```

```
1.461632144968310
```

```
>> y=gamma(x)
```

```
y =
```

```
0.885603194410889
```

Abbildung 2.1: Graph der reellen Gamma-Funktion und ihrer Ableitung sowie Bestimmung des Minimums mit MATLAB

2.2 MITTAG-LEFFLER-Funktionen

2.2.1 Historische Einordnung

Die sogenannten MITTAG-LEFFLER-*Funktionen*

$$E_\alpha(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0, z \in \mathbb{C} \quad (2.13)$$

wurden ursprünglich von dem schwedischen Mathematiker GÖSTA MAGNUS MITTAG-LEFFLER zur Beschreibung der analytischen Fortsetzung von Potenzreihen außerhalb ihres Konvergenzradius eingeführt [16, Kap. 2.1]. Genauer beschäftigte er sich mit der folgenden Problematik.

Sei k_0, k_1, \dots eine Folge komplexer Zahlen mit der Eigenschaft

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} |k_\nu|^{1/\nu} = \frac{1}{r} \in \mathbb{R}_+.$$

Dann konvergiert die Reihe

$$FC(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} k_\nu z^\nu$$

in $D_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ und divergiert für $|z| > r$. $FC(z)$ bestimmt eine eindeutige analytische Funktion in D_r .

Welches ist das maximale Gebiet, in dem $FC(z)$ eine eindeutige analytische Fortsetzung $FA(z)$ besitzt und welche analytische Darstellung besitzt der zugehörige Zweig?

MITTAG-LEFFLER konnte die Frage in seinen Studien beantworten. In einem maximalen sternförmigen Gebiet besitzt die analytische Fortsetzung $FA(z)$ von $FC(z)$ die Form

$$FA(z) = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \int_0^\infty e^{-\omega} F_\alpha(\omega^\alpha z) d\omega$$

mit der Familie von Funktionen

$$F_\alpha(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{k_\nu z^\nu}{\Gamma(\nu \cdot \alpha + 1)}, \quad \alpha > 0.$$

Dadurch interessierte sich MITTAG-LEFFLER für die Eigenschaften von $F_\alpha(z)$ und untersuchte diese in der einfachsten Form mit $k_\nu \equiv 1$ anhand der in (2.13) eingeführten und später nach ihm benannten MITTAG-LEFFLER-*Funktion* $E_\alpha(z)$ in fünf aufeinanderfolgenden Arbeiten [16, Kap. 2.2]. Später wurden verschiedene Verallgemeinerungen von (2.13) mit mehreren Parametern beschrieben. Die einfachste Form, die in die-

sem Abschnitt vorrangig untersucht werden soll, bilden die *zwei-parametrischen MITTAG-LEFFLER-Funktionen*

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n\alpha + \beta)}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha > 0, z \in \mathbb{C}. \quad (2.14)$$

Die Funktionen (2.14) wurden von WIMAN erstmals zur Nullstellenbestimmung von (2.13) eingesetzt [44]. Heute erhalten sie erneut Bedeutung in der fraktionalen Analysis bei der Beschreibung von Lösungen fraktionaler Differentialgleichungen. Im Folgenden sollen daher einige Eigenschaften von (2.14) gezeigt werden, die mit $\beta = 1$ dann automatisch für (2.13) gelten.

2.2.2 Konvergenz

Die MITTAG-LEFFLER-Funktionen sind ganze Funktionen, d.h. die Reihendarstellung konvergiert in der gesamten komplexen Zahlenebene. Um dies zu zeigen, betrachte man die STIRLING-Approximation der Gamma-Funktion [37, S. 28f.]

$$\Gamma(x) = \sqrt{\frac{2\pi}{x}} \left(\frac{x}{e}\right)^x (1 + \mathcal{O}(x^{-1})), \quad x \rightarrow \infty. \quad (2.15)$$

Mithilfe dieser Näherung erhält man

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(y)}{\Gamma(y+x)} &= \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{2\pi}{y}} \left(\frac{y}{e}\right)^y (1 + \mathcal{O}(\frac{1}{y}))}{\sqrt{\frac{2\pi}{y+x}} \left(\frac{y+x}{e}\right)^{y+x} (1 + \mathcal{O}(\frac{1}{y+x}))} \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \underbrace{\sqrt{\frac{y+x}{y}}}_{\rightarrow 1} e^x \underbrace{\left(\frac{y}{y+x}\right)^y}_{\rightarrow e^{-x}} \frac{1}{(y+x)^x} \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{(y+x)^x} = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ 1 & x = 0 \\ \infty & x < 0 \end{cases}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Damit folgt aus dem Quotientenkriterium für (2.14)

$$\left| \frac{\Gamma(\alpha k + \beta)}{\Gamma(\alpha(k+1) + \beta)} z \right| = \left| \frac{\Gamma(\alpha k + \beta)}{\Gamma(\alpha k + \beta + \alpha)} \right| \cdot |z| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}, \alpha > 0. \quad (2.17)$$

Dies zeigt die Konvergenz von (2.14) in ganz \mathbb{C} .

2.2.3 Einige Spezialfälle

Bei den zwei-parametrischen MITTAG-LEFFLER-Funktionen werden für bestimmte Werte der Parameter α, β Beziehungen zu anderen bekannten Funktionen deutlich. Dies soll das nachfolgende Beispiel zeigen [29].

Beispiel 2.3:

- | | |
|--|--|
| <p>a) $E_0(z) = \frac{1}{1-z}, z < 1$</p> <p>b) $E_{1,1}(z) = E_1(z) = e^z$</p> <p>c) $E_{1,2}(z) = \frac{e^z - 1}{z}$</p> <p>d) $E_{2,1}(z^2) = E_2(z^2) = \cosh(z)$</p> | <p>e) $E_{2,1}(-z^2) = E_2(-z^2) = \cos(z)$</p> <p>f) $E_{2,2}(z^2) = \frac{\sinh(z)}{z}$</p> <p>g) $E_{2,2}(-z^2) = \frac{\sin(z)}{z}$</p> |
|--|--|

Diese Zusammenhänge folgen leicht aus den Reihendarstellungen der jeweiligen Funktionen.

2.2.4 Funktionalgleichungen und Rekursionsformeln

Lemma 2.4:

Es gelten folgende Formeln für $z \in \mathbb{C}, m \in \mathbb{N}$:

$$\frac{d^m}{dz^m} E_m(z^m) = E_m(z^m) \tag{2.18}$$

$$E_{\alpha,\beta}(z) = z E_{\alpha,\alpha+\beta}(z) + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \tag{2.19}$$

$$\frac{d}{dz} E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{E_{\alpha,\beta-1}(z) - (\beta - 1) E_{\alpha,\beta}(z)}{\alpha z} \tag{2.20}$$

$$\frac{d^m}{dz^m} (z^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(z^\alpha)) = z^{\beta-m-1} E_{\alpha,\beta-m}(z^\alpha) \tag{2.21}$$

[20, S. 3ff.]

Beweis. a)

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{dz^m} E_m(z^m) &= \frac{d^m}{dz^m} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{mk}}{\Gamma(mk + 1)} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{mk-m}}{(mk)!} \frac{(mk)!}{(mk-m)!} && j := k - 1 \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{mj}}{(mj)!} = E_m(z^m) \end{aligned}$$

b)

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} = z \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(\alpha(j+1) + \beta)} + \frac{1}{\Gamma(\beta)} = zE_{\alpha,\alpha+\beta}(z) + \frac{1}{\Gamma(\beta)}$$

c)

$$\begin{aligned} \frac{E_{\alpha,\beta-1}(z) - (\beta-1)E_{\alpha,\beta}(z)}{\alpha z} &= \frac{1}{\alpha z} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta - 1)} - (\beta-1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \right) \\ &= \frac{1}{\alpha z} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k(\alpha k + \beta - 1)}{(\alpha k + \beta - 1)\Gamma(\alpha k + \beta - 1)} \right. \\ &\quad \left. - (\beta-1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \right) \\ &= \frac{1}{\alpha z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha k z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k z^{k-1}}{\Gamma(\alpha k + \beta)} = E'_{\alpha,\beta}(z) \end{aligned}$$

d) folgt aus c) per Induktion. □

Da bei der Lösung fraktionaler Differentialgleichungen auch höhere Ableitungen der MITTAG-LEFFLER-Funktionen vorkommen, wurde basierend auf der dritten Formel in Lemma 2.4 folgende Rekursionsformel gefunden.

Satz 2.5 (Ableitungen der MITTAG-LEFFLER-Funktionen):

Seien $k \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ sowie $z \in \mathbb{C}$. Dann gilt

$$E_{\alpha,\beta}^{(k)}(z) = \frac{E_{\alpha,\beta-1}^{(k-1)}(z) - (\beta-1)E_{\alpha,\beta}^{(k-1)}(z)}{\alpha z} - (k-1) \frac{E_{\alpha,\beta}^{(k-1)}(z)}{z}.$$

Beweis. per Induktion

$k = 1$: $E'_{\alpha,\beta}(z) = \frac{E_{\alpha,\beta-1}(z) - (\beta-1)E_{\alpha,\beta}(z)}{\alpha z}$ in Lemma 2.4 bewiesen.

$k \Rightarrow k + 1$:

$$\begin{aligned}
 E_{\alpha,\beta}^{(k+1)}(z) &= \frac{d}{dz} E_{\alpha,\beta}^{(k)}(z) \\
 &= \frac{d}{dz} \left(\frac{E_{\alpha,\beta-1}^{(k-1)}(z) - (\beta - 1)E_{\alpha,\beta}^{(k-1)}(z)}{\alpha z} - (k - 1) \frac{E_{\alpha,\beta}^{(k-1)}(z)}{z} \right) \\
 &= \frac{\left(E_{\alpha,\beta-1}^{(k)}(z) - (\beta - 1)E_{\alpha,\beta}^{(k)}(z) \right) \alpha z - \alpha \left(E_{\alpha,\beta-1}^{(k-1)}(z) - (\beta - 1)E_{\alpha,\beta}^{(k-1)}(z) \right)}{(\alpha z)^2} \\
 &\quad - (k - 1) \frac{E_{\alpha,\beta}^{(k)}(z)z - E_{\alpha,\beta-1}^{(k-1)}(z)}{z^2} \\
 &= \frac{E_{\alpha,\beta-1}^{(k)}(z) - (\beta - 1)E_{\alpha,\beta}^{(k)}(z)}{\alpha z} \\
 &\quad - \frac{1}{z} \underbrace{\left(\frac{E_{\alpha,\beta-1}^{(k-1)}(z) - (\beta - 1)E_{\alpha,\beta}^{(k-1)}(z)}{\alpha z} - (k - 1) \frac{E_{\alpha,\beta}^{(k-1)}(z)}{z} \right)}_{=E_{\alpha,\beta}^{(k)}(z)} \\
 &\quad - (k - 1) \frac{E_{\alpha,\beta}^{(k)}(z)}{z} \\
 &= \frac{E_{\alpha,\beta-1}^{(k)}(z) - (\beta - 1)E_{\alpha,\beta}^{(k)}(z)}{\alpha z} - k \frac{E_{\alpha,\beta}^{(k)}(z)}{z}
 \end{aligned}$$

□

2.2.5 Integraldarstellung und asymptotisches Verhalten

Zur Untersuchung des asymptotischen Verhaltens der MITTAG-LEFFLER-Funktionen ist die folgende Integraldarstellung aus [7, S. 210] sehr hilfreich. Die nachfolgende Betrachtung des asymptotischen Verhaltens ist in ähnlicher Form in [7, S. 207f.] und [20, S. 6ff.] zu finden.

Satz 2.6:

Die zwei-parametrischen MITTAG-LEFFLER-Funktionen werden durch das Integral

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{t^{\alpha-\beta} e^t}{t^\alpha - z} dt \quad (2.22)$$

beschrieben. Dabei beginnt und endet der Integrationsweg C bei $-\infty$, verläuft entlang der negativen reellen Achse und des Kreises $|t| \leq |z|^{\frac{1}{\alpha}}$ im positiven Sinne $-\pi \leq \arg(t) \leq \pi$ und zurück entlang der negativen reellen Achse (Abbildung 2.2).

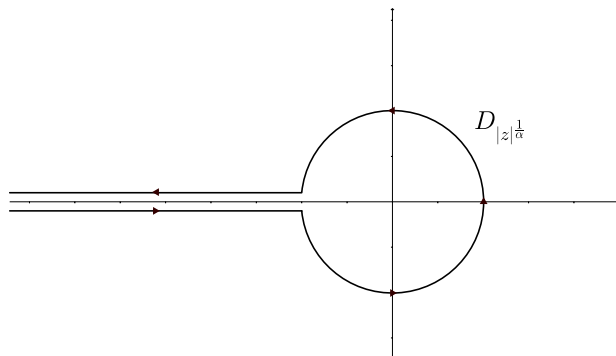


Abbildung 2.2: Integrationsweg der Integraldarstellung der MITTAG-LEFFLER-Funktion

Beweis. Entwickle den Integranden von (2.22) in Potenzen von z . Dabei erhält man

$$\frac{t^{\alpha-\beta} e^t}{t^\alpha - z} = \sum_{k=0}^{\infty} e^t t^{-(\alpha k + \beta)} z^k. \quad (2.23)$$

Verwendet man zusätzlich die Darstellung des Reziproken der Gamma-Funktion (HANKEL-Integral [6, S. 13])

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{t-tz} dt, \quad (2.24)$$

so folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{t^{\alpha-\beta} e^t}{t^\alpha - z} dt &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \sum_{k=0}^{\infty} e^t t^{-(\alpha k + \beta)} z^k dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_C e^t t^{-(\alpha k + \beta)} dt z^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} = E_{\alpha, \beta}(z). \end{aligned}$$

□

Der Integrand in (2.22) hat einen Verzweigungspunkt in $t = 0$. Schlitzt man die komplexe Ebene entlang der negativen reellen Achse, so ist der Integrand bei Betrachtung des Hauptzweiges von t^α in der geschlitzten Ebene eindeutig. Der Integrand hat Pole an den Stellen

$$t_m = z^{\frac{1}{\alpha}} e^{\frac{2\pi i m}{\alpha}}, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (2.25)$$

In der geschlitzten Ebene befinden sich allerdings nur die Pole, welche die Bedingung

$$-\alpha\pi < \arg(z) + 2\pi m < \alpha\pi \quad (2.26)$$

erfüllen. Folglich liegen abhängig von $\arg(z)$ $[\alpha]$ oder $[\alpha + 1]$ Pole innerhalb der Kurve C .

Zur Bestimmung des asymptotischen Verhaltens von $E_{\alpha,\beta}(z)$ betrachte zunächst $|z| \rightarrow \infty$ für z außerhalb des Sektors $|\arg(z)| \leq \alpha \frac{\pi}{2}$. Pole des Integranden in (2.22), die (2.26) erfüllen, liegen dann in der Halbebene $Re(t) < 0$. Deformiert man C so, dass die Pole außerhalb dieser Kurve liegen und betrachtet folgende Darstellung der endlichen geometrischen Reihe

$$\frac{t^\alpha}{t^\alpha - z} = - \sum_{k=1}^{N-1} \frac{t^{k\alpha}}{z^k} - \left(1 - \frac{t^\alpha}{z}\right)^{-1} \frac{t^{N\alpha}}{z^N}, \quad N \in \mathbb{N},$$

so folgt wegen der gleichmäßigen Beschränktheit von $\left(1 - \frac{t^\alpha}{z}\right)^{-1}$ in $|z|$ und t und bei erneuter Verwendung des HANKEL-Integrals

$$E_{\alpha,\beta}(z) = - \sum_{k=1}^{N-1} \frac{z^{-k}}{\Gamma(\beta - \alpha k)} + \mathcal{O}(|z|^{-N}), \quad (2.27)$$

$$|z| \rightarrow \infty, |\arg(-z)| < \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\pi.$$

(Für $\alpha \geq 2$ ist die Aussage leer.)

Im anderen Falle $|\arg(z)| \leq \alpha \frac{\pi}{2}$ gibt es mindestens einen Pol t_m mit

$$-\alpha \frac{\pi}{2} \leq \arg(z) + 2\pi m \leq \alpha \frac{\pi}{2}. \quad (2.28)$$

Diese Pole liegen in der Halbebene $Re(t) \geq 0$. Deformiert man die Kurve C wie vorher, so liegen die Pole mit der Eigenschaft (2.28) innerhalb der Kurve und man erhält mithilfe des Residuensatzes

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\alpha} \sum_m t_m^{1-\beta} e^{t_m} - \sum_{k=1}^{N-1} \frac{z^{-k}}{\Gamma(\beta - \alpha k)} + \mathcal{O}(|z|^{-N}), \quad (2.29)$$

$$|z| \rightarrow \infty, |\arg(z)| \leq \alpha \frac{\pi}{2}.$$

Im speziellen Falle $\alpha \in (0, 2)$ wird die Bedingung (2.28) lediglich für $m = 0$ erfüllt. Damit folgt insbesondere

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\alpha} z^{\frac{1-\beta}{\alpha}} \exp(z^{\frac{1}{\alpha}}) - \sum_{k=1}^{N-1} \frac{z^{-k}}{\Gamma(\beta - \alpha k)} + \mathcal{O}(|z|^{-N}),$$

$$0 < \alpha < 2, |z| \rightarrow \infty, |\arg(z)| \leq \alpha \frac{\pi}{2}. \quad (2.30)$$

2.2.6 Eigenschaften der Funktion $e(t) := E_{\alpha,\beta}(-\lambda t^\alpha)$

Die modifizierten MITTAG-LEFFLER-Funktionen $e : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$e(t) := E_{\alpha,\beta}(-\lambda t^\alpha), \quad \alpha \in [0, 1], \beta \geq \alpha, \lambda > 0 \quad (2.31)$$

spielen für die Lösung der fraktionalen Differentialgleichung zu dem später besprochenen viskoelastischen Modell eine bedeutende Rolle. Wichtig ist hierbei das Verhalten von $e = e(t)$ für $t \rightarrow 0$ und $t \rightarrow \infty$ sowie eine besondere Eigenschaft dieser Funktion, die *vollständige Monotonie*, welche zum Nachweis der Konvergenz der Lösung verwendet wird. Die Funktion $e = e(t)$ hängt natürlich auch von α , β und λ ab. Diese Parameter werden im Folgenden allerdings als fest angenommen.

Betrachte zunächst die beiden asymptotischen Approximationen: Für kleine Zeiten t ergibt sich aus der Reihendarstellung der MITTAG-LEFFLER-Funktionen

$$E_{\alpha,\beta}(-\lambda t^\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda)^n \frac{t^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha n + \beta)}.$$

Daraus erhält man in erster Näherung

$$e(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} - \lambda \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + \beta)} + \mathcal{O}(t^{2\alpha}), \quad t \rightarrow 0. \quad (2.32)$$

Für große Zeiten wird die Reihendarstellung (2.27) aus [7] verwendet. Die erste Näherung liefert hierbei

$$e(t) = \frac{1}{\lambda \Gamma(\beta - \alpha)} t^{-\alpha} + \mathcal{O}(t^{-2\alpha}), \quad t \rightarrow \infty. \quad (2.33)$$

Insgesamt erhält man also die folgende asymptotische Entwicklung

$$e(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\beta)} - \lambda \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + \beta)} + \mathcal{O}(t^{2\alpha}) & t \rightarrow 0 \\ \frac{1}{\lambda \Gamma(\beta - \alpha)} t^{-\alpha} + \mathcal{O}(t^{-2\alpha}) & t \rightarrow \infty \end{cases}. \quad (2.34)$$

Im folgenden Teil soll die genannte Eigenschaft der *vollständigen Monotonie* für $e = e(t)$ nachgewiesen werden. Dazu betrachte man zunächst folgende Definitionen [31].

Definition 2.7:

Die LAPLACE-Transformation eines Maßes μ auf $[0, \infty)$ ist definiert durch

$$\mathcal{L}\{\mu\}(t) := \int_{[0,\infty)} e^{-t\tau} \mu(d\tau),$$

wenn dieses Integral konvergiert.

Bemerkung 2.8:

Ein Maß μ auf $[0, \infty)$ ist endlich genau dann, wenn $\lim_{t \searrow 0} \mathcal{L}\{\mu\}(t) < \infty$. Das Maß μ ist durch seine LAPLACE-Transformation eindeutig bestimmt.

Definition 2.9:

Eine Funktion $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ heißt:

a) vollständig monoton, falls $f \in C^\infty(0, \infty)$ und

$$(-1)^n f^{(n)}(t) \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, t > 0, \quad (2.35)$$

b) BERNSTEIN-Funktion, falls $f \in C^\infty(0, \infty)$, $f(t) \geq 0 \forall t > 0$ und

$$(-1)^{n-1} f^{(n)}(t) \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, t > 0. \quad (2.36)$$

Die Menge der vollständig monotonen Funktionen wird mit \mathcal{CM} , die Menge der BERNSTEIN-Funktionen mit \mathcal{BF} bezeichnet.

Um die in Definition 2.9 angegebenen Eigenschaften für $e = e(t)$ zu zeigen, benötigt man die beiden folgenden Kriterien.

Satz 2.10 (BERNSTEIN):

Sei $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine vollständig monotone Funktion. Dann ist f die LAPLACE-Transformation eines eindeutig bestimmten Maßes μ auf $[0, \infty)$, d.h. $\forall t > 0$

$$f(t) = \mathcal{L}\{\mu\}(t) = \int_{[0, \infty)} e^{-t\tau} \mu(d\tau).$$

Falls umgekehrt $\mathcal{L}\{\mu\}(t) < \infty \forall t > 0$, dann ist $t \mapsto \mathcal{L}\{\mu\}(t)$ vollständig monoton.

Beweis. Da für diese Arbeit nur die Umkehrung der Behauptung als Kriterium für vollständige Monotonie wichtig ist, soll an dieser Stelle nur der Beweis für diesen Teil des Satzes wie in [31, S. 3], wo auch der vollständige Beweis zu finden ist, geführt werden.

Sei $f(t) := \mathcal{L}\{\mu\}(t)$. Sei $t > 0$ fest. Wähle $\varepsilon \in (0, t)$. Wegen

$$t^n = \varepsilon^{-n} (\varepsilon t)^n \leq n! \varepsilon^{-n} e^{\varepsilon t} \quad \forall t > 0,$$

folgt

$$\int_{[0, \infty)} t^n e^{-t\tau} \mu(d\tau) \leq \frac{n!}{\varepsilon^n} \int_{[0, \infty)} e^{-(t-\varepsilon)\tau} \mu(d\tau) = \frac{n!}{\varepsilon^n} \mathcal{L}\{\mu\}(t - \varepsilon).$$

Damit folgt aus dem Satz über die Differenzierbarkeit von Parameterintegralen

$$(-1)^n f^{(n)}(t) = (-1)^n \int_{[0,\infty)} \frac{d^n}{dt^n} e^{-t\tau} \mu(d\tau) = \int_{[0,\infty)} t^n e^{-t\tau} \mu(d\tau) \geq 0.$$

□

Bemerkung 2.11:

Die letzte Formel im Beweis zeigt $f^{(n)}(t) \neq 0 \forall n \in \mathbb{N} \forall t > 0$, falls $f \in \mathcal{CM}$ und $f \neq \text{const.}$

Lemma 2.12:

a) Die Menge \mathcal{CM} ist ein konvexer Kegel, d.h.

$$af_1 + bf_2 \in \mathcal{CM} \quad \forall a, b \geq 0, f_1, f_2 \in \mathcal{CM}.$$

b) Seien $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ positiv, $f \in \mathcal{BF}$ sowie $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g \in \mathcal{CM}$. Dann ist auch $g \circ f \in \mathcal{CM}$.

Beweis.

a) Die Aussage folgt direkt aus der Definition vollständig monotoner Funktionen.

$$(-1)^n (af_1 + bf_2)^{(n)}(t) = (-1)^n af_1^{(n)}(t) + (-1)^n bf_2^{(n)}(t) \geq 0$$

b) Betrachte die verallgemeinerte Kettenregel von FAÀ DI BRUNO

$$(g \circ f)^{(n)}(t) = \sum_{(m, i_1, \dots, i_l)} \frac{n!}{i_1! \cdots i_l!} g^{(m)}(f(t)) \prod_{j=1}^l \left(\frac{f^{(j)}(t)}{j!} \right)^{i_j}. \quad (2.37)$$

Hierbei ist die Summation über alle $l \in \mathbb{N}$ und alle $i_1, \dots, i_l \in \mathbb{N}_0$ zu betrachten, sodass $\sum_{j=1}^l j \cdot i_j = n$ und $\sum_{j=1}^l i_j = m$ gelten. Sei nun $f \in \mathcal{BF}$ und $g \in \mathcal{CM}$. Dann ist $g(f(t)) \geq 0$. Multipliziere (2.37) mit $(-1)^n$ und beachte $n = m + \sum_{j=1}^l (j-1) \cdot i_j$. Da $f \in \mathcal{BF}$ und $g \in \mathcal{CM}$, folgt, dass jeder Term in (2.37) nichtnegativ ist. Dies liefert $g \circ f \in \mathcal{CM}$ [31, S. 27].

□

Mithilfe dieser Eigenschaften erhält man die vollständige Monotonie von $e = e(t)$ in drei Schritten.

Folgerung 2.13:

- a) Die Abbildung $t \mapsto E_\alpha(-t)$ ist für $\alpha \in [0, 1]$ in \mathcal{CM} .
- b) Die Abbildung $t \mapsto E_{\alpha,\beta}(-t)$ ist für $\alpha \in [0, 1]$ und $\beta \geq \alpha$ in \mathcal{CM} .
- c) Die Abbildung $t \mapsto \lambda t^\alpha$ ist für $\lambda > 0$ und $\alpha \in [0, 1]$ in \mathcal{BF} .
- Insgesamt folgt $e \in \mathcal{CM}$ für $\alpha \in [0, 1], \beta \geq \alpha, \lambda > 0$.

Beweis.

- a) Der Beweis ist ausführlich in [28] zu finden. Für $\alpha = 0$ und $\alpha = 1$ folgt die Behauptung sofort aus

$$E_0(-t) = \frac{1}{1+t}, \quad E_1(-t) = e^{-t}.$$

Im Falle $\alpha \in (0, 1)$ wird die Integraldarstellung (2.22) verwendet und so umgeformt, dass Satz 2.10 angewendet werden kann. D.h. das Maß μ aus dem Satz wird explizit bestimmt zu

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = \frac{1}{\pi\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \sin(\pi\alpha k) \Gamma(\alpha k + 1) t^{k-1}.$$

Damit folgt die vollständige Monotonie von $E_\alpha(-t)$ für $\alpha \in [0, 1]$.

- b) Ein kurzer eleganter Beweis ist in [25] zu finden. Dazu werden die Gleichungen

$$E_{\alpha,\alpha}(-t) = -\alpha \frac{d}{dt} E_\alpha(-t), \quad \alpha \geq 0, \quad (2.38)$$

$$E_{\alpha,\beta}(-t) = \frac{1}{\alpha\Gamma(\beta-\alpha)} \int_0^1 \left(1 - s^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{\beta-\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-st) ds, \quad \beta > \alpha > 0 \quad (2.39)$$

verwendet. (2.38) und (2.39) werden durch direkte Rechnung mithilfe der Reihendarstellung der MITTAG-LEFFLER-Funktionen bewiesen. (2.38) liefert zusammen mit a) die vollständige Monotonie von $E_{\alpha,\alpha}(-t)$. Dies führt gemeinsam mit (2.39) und

$$E_{0,\beta}(-t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \cdot \frac{1}{1+t} & \beta > 0 \\ 0 & \beta = 0 \end{cases}$$

zur Behauptung.

c) Für $\alpha \in [0, 1], t > 0$ erhält man

$$\begin{aligned} (-1)^{n-1} \frac{d^n}{dt^n} t^\alpha &= (-1)^{n-1} \alpha \cdot \underbrace{(\alpha - 1) \cdots (\alpha - (n - 1))}_{\substack{\leq 0 \\ n-1 \text{ Faktoren}}} t^{\alpha-n} \\ &= \alpha \cdot (1 - \alpha) \cdots ((n - 1) - \alpha) t^{\alpha-n} \geq 0 \\ &\stackrel{\text{Lemma 2.12a}}{\Rightarrow} t \mapsto \lambda t^\alpha \in \mathcal{BF}. \end{aligned}$$

Mit Lemma 2.12 b) und Teil b) dieser Folgerung erhält man letztlich

$$t \mapsto E_{\alpha,\beta}(-\lambda t^\alpha) \in \mathcal{CM} \quad \text{für} \quad \alpha \in [0, 1], \beta \geq \alpha, \lambda > 0.$$

□

Bemerkung 2.14:

Aus der vollständigen Monotonie von $t \mapsto E_{\alpha,\beta}(-t)$ folgt mittels Kettenregel insbesondere

- $E_{\alpha,\beta}^{(n)}(-t) \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, \forall t \geq 0.$
- $t \mapsto E_{\alpha,\beta}^{(n)}(-t)$ ist monoton fallend $\forall n \in \mathbb{N}_0.$
- $t \mapsto E_{\alpha,\beta}^{(n)}(-t)$ ist konvex $\forall n \in \mathbb{N}_0.$

Beweis.

- $0 \leq (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} E_{\alpha,\beta}(-t) = (-1)^n \cdot (-1)^n E_{\alpha,\beta}^{(n)}(-t) = E_{\alpha,\beta}^{(n)}(-t).$
- $\frac{d}{dt} E_{\alpha,\beta}^{(n)}(-t) = -\underbrace{E_{\alpha,\beta}^{(n+1)}(-t)}_{\geq 0} \leq 0.$
- $\frac{d^2}{dt^2} E_{\alpha,\beta}^{(n)}(-t) = (-1)^2 \underbrace{E_{\alpha,\beta}^{(n+2)}(-t)}_{\geq 0} \geq 0.$

□

Die soeben bewiesenen Eigenschaften sind gut anhand von Abbildung 2.3 zu erkennen.

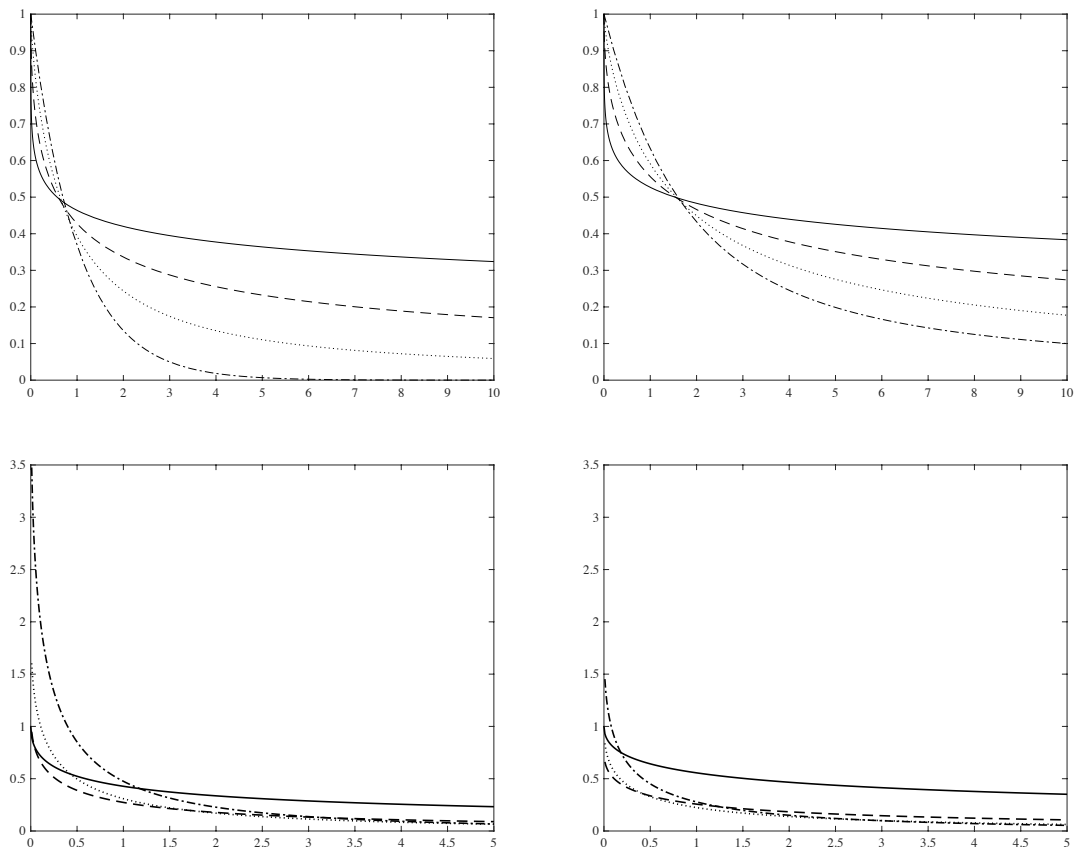


Abbildung 2.3: Graphen von $E_{\alpha,1}(-t^\alpha)$ (links oben) und $E_{\alpha,2}(-t^\alpha)$ (rechts oben) für $\alpha = \frac{1}{4}$ (durchgezogene Linie), $\alpha = \frac{1}{2}$ (gestrichelte Linie), $\alpha = \frac{3}{4}$ (gepunktete Linie) und $\alpha = 1$ (punkt-gestrichelte Linie) sowie von $E_{0.5,1}^{(n)}(-t^{0.5})$ (links unten) und $E_{0.5,2}^{(n)}(-t^{0.5})$ (rechts unten) für $n = 0$ (durchgezogene Linie), $n = 1$ (gestrichelte Linie), $n = 2$ (gepunktete Linie) und $n = 3$ (punkt-gestrichelte Linie)

Folgerung 2.15 (Abschätzung für Ableitungen der MITTAG-LEFFLER-Funktionen):

Für $t \geq 0, \lambda > 0, \alpha \in [0, 1], \beta \geq \alpha$ gilt

$$E_{\alpha,\beta}^{(n)}(-\lambda t^\alpha) \leq \frac{n!}{\Gamma(\alpha n + \beta)}.$$

Beweis. Aus der vorherigen Bemerkung folgt auch, dass die Funktion $t \mapsto E_{\alpha,\beta}^{(n)}(-\lambda t^\alpha)$ monoton fallend ist. Damit kann eine Abschätzung nach oben durch den Funktionswert an der Stelle $t = 0$ erfolgen. Mit der Reihendarstellung der MITTAG-LEFFLER-Funktionen erhält man

$$E_{\alpha,\beta}^{(n)}(-\lambda t^\alpha) \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+n)!}{j!} \frac{x^j}{\Gamma(\alpha(j+n) + \beta)} \Big|_{x=0} = \frac{n!}{\Gamma(\alpha n + \beta)}.$$

□

Mithilfe von Folgerung 2.15 erhält man schließlich eine Konvergenzaussage über eine spezielle Art von Reihen in Ableitungen von MITTAG-LEFFLER-Funktionen. Diese Reihen treten bei den Lösungen der fraktionalen Differentialgleichungen von dem viskoelastischen Modell in Abschnitt 3 auf. Die Einführung der angesprochenen Reihen und der Konvergenznachweis für alle Zeiten $t > 0$ finden sich in der nachfolgenden Aussage.

Aussage 2.16:

Seien $a, b, \lambda > 0$. Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-a)^n \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b^k t^{\alpha(n-k)+n-1} E_{\alpha, n-\alpha k}^{(n)}(-\lambda t^\alpha) \quad (2.40)$$

absolut für alle Zeiten $t > 0$.

Beweis. Für den Beweis der Konvergenz verwende das Majorantenkriterium für konvergente Reihen. Dazu wird die Folge der Summanden von (2.40)

$$f_n(t) := (-a)^n \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b^k t^{\alpha(n-k)+n-1} E_{\alpha, n-\alpha k}^{(n)}(-\lambda t^\alpha)$$

absolut nach oben abgeschätzt. Aus Folgerung 2.15 ergibt sich

$$E_{\alpha, n-\alpha k}^{(n)}(-\lambda t^\alpha) \leq \frac{n!}{\Gamma(\alpha n + n - \alpha k)} = \frac{n!}{\Gamma(n + \alpha(n - k))} \quad \text{für } n \geq \alpha(k + 1).$$

Die Bedingung $n \geq \alpha(k + 1)$ ist für $k < n$ offensichtlich erfüllt. Für $k = n$ gilt $n \geq \alpha(n + 1)$ bei festem $\alpha \in [0, 1)$ zumindest ab einem gewissen $n = N_0 > 0$. Damit erhält man $\forall n \geq N_0 \forall t > 0$

$$|f_n(t)| \leq a^n \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b^k t^{\alpha(n-k)+n-1} \frac{n!}{\Gamma(n + \alpha(n - k))}.$$

Für $n \geq 2$ ist nach (2.11) gesichert, dass die Gamma-Funktion monoton wächst. Es folgt also $\forall n \geq \max\{2, N_0\} \forall t > 0$

$$\begin{aligned}
 |f_n(t)| &\leq \frac{a^n}{\Gamma(n)} t^{n-1} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b^k (t^\alpha)^{n-k} \\
 &= \frac{a^n}{(n-1)!} t^{n-1} (b + t^\alpha)^n && \text{(Binomischer Lehrsatz)} \\
 &= a (b + t^\alpha) \frac{(abt + at^{1+\alpha})^{n-1}}{(n-1)!} \\
 \Rightarrow \sum_{n \geq \max\{2, N_0\}} |f_n(t)| &\leq a (b + t^\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(abt + at^{1+\alpha})^{n-1}}{(n-1)!} \\
 &= a (b + t^\alpha) \exp(abt + at^{1+\alpha}).
 \end{aligned}$$

Damit lässt sich (2.40) bis auf endlich viele Summanden absolut durch eine Exponentialfunktion abschätzen. Dies liefert die absolute Konvergenz. \square

2.3 LAPLACE-Transformation

2.3.1 Definition und Transformationsregeln

Die LAPLACE-Transformation \mathcal{L} und ihre Inversion \mathcal{L}^{-1} sind Integraltransformationen, die u.a. zur Lösung von Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten bzw. zugehörigen Anfangswertproblemen verwendet werden. Durch Anwendung der LAPLACE-Transformation können die Differentialgleichungen in algebraische Gleichungen überführt und diese gelöst werden. Die inverse LAPLACE-Transformation liefert dann die Lösung des Problems. Die Nützlichkeit dieser Methode wird später bei der Anwendung auf fraktionale Differentialgleichungen deutlich.

Definition 2.17:

Sei $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann heißt

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s) := \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt, \quad s \in \mathbb{C}$$

die LAPLACE-Transformation von $f(t)$, falls das Integral existiert. F heißt LAPLACE-Transformierte der Funktion f .

Betrachte den komplexen Parameter $s = \sigma + i\omega$ mit $\sigma, \omega \in \mathbb{R}$ der LAPLACE-Transformierten $F = F(s)$. Dann hat das LAPLACE-Integral die Form

$$\int_0^\infty f(t)e^{-st} dt = \int_0^\infty f(t)e^{-\sigma t} e^{-i\omega t} dt.$$

Wenn die Funktion $g(t) := f(t)e^{-\sigma t}$ absolut integrierbar ist, dann existiert das LAPLACE-Integral, wie in der folgenden Abschätzung zu sehen ist.

$$\left| \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt \right| \leq \int_0^\infty |g(t)| \cdot \underbrace{|e^{-i\omega t}|}_{=1} dt < +\infty$$

Damit $g = g(t)$ absolut integrierbar ist, darf $f = f(t)$ nicht stärker ansteigen als eine Exponentialfunktion. In diesem Falle kann mit geeignet gewähltem σ immer noch $\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = 0$ erreicht werden. Dies beweist die folgende Konvergenzaussage.

Aussage 2.18 (vgl. [41, S. 31]):

Sei $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion, die nicht stärker wächst als eine Exponentialfunktion. Dann existiert für ein gewisses $\beta \in \mathbb{R}$ die LAPLACE-Transformierte $F = F(s)$ für $\operatorname{Re}(s) > \beta$. Die Konvergenzabszisse β wird dabei von der Funktion f bestimmt.

Bemerkung 2.19:

Die Menge $K := \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > \beta\}$ entspricht der Teilmenge von \mathbb{C} , in der das LAPLACE-Integral konvergiert und wird daher als Konvergenzhalbebene bezeichnet. Nur innerhalb der Konvergenzhalbebene stellt $F(s)$ die LAPLACE-Transformierte von $f(t)$ dar, selbst wenn F auch außerhalb von K definiert ist.

Satz 2.20:

Sei F die LAPLACE-Transformierte einer Funktion $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$. Dann ist die inverse LAPLACE-Transformation gegeben durch die komplexe Umkehrformel

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{st} F(s) ds.$$

Dabei ist der Integrationsweg die vertikale Linie mit $\operatorname{Re}(s) = \sigma$ in der komplexen Ebene, sodass σ größer ist als der Realteil aller Singularitäten von F .

Beweis. Vgl. [41, S. 34].

Betrachte die LAPLACE-Transformation von f

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt = \int_0^\infty f(t)e^{-\sigma t} e^{-i\omega t} dt.$$

Damit ist F die FOURIER-Transformierte der Funktion $f(t)e^{-\sigma t}$ (für $t < 0$ wird $f \equiv 0$ gesetzt) und man erhält mithilfe des FOURIER-Integrals

$$f(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty F(s)e^{i\omega t} d\omega.$$

Durch Multiplikation mit $e^{-\sigma t}$ und Substitution $ds = id\omega$ folgt die Behauptung. Dabei ist zu beachten, dass das Integral auch tatsächlich konvergiert, da mit $\sigma > \beta$ gesichert ist, dass s in der Konvergenzhalbebene liegt. \square

LAPLACE- und inverse LAPLACE-Transformationen sind für viele Funktionen und Operatoren auf Funktionen bereits bestimmt. Die in dieser Arbeit benötigten Transformationen sind in folgendem Satz zusammengefasst.

Satz 2.21 (LAPLACE-Transformations-Regeln):

Im Folgenden seien $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$, $F_i(s) = \mathcal{L}\{f_i(t)\}(s)$, $a_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$ sowie $\alpha, \beta, a \in \mathbb{R}$ mit $\alpha > -1$. Dann gelten nachfolgende Transformations-Regeln.

a)

$$\sum_{i=1}^n a_i f_i(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \sum_{i=1}^n a_i F_i(s). \quad (2.41)$$

b) Sei $f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$ die Faltung von f_1 und f_2 . Dann gilt

$$F_1(s) \cdot F_2(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f_1(t) * f_2(t). \quad (2.42)$$

c) Für $\operatorname{Re}(s) > 0$ gilt

$$t^n \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad t^\alpha \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{s^{\alpha+1}}. \quad (2.43)$$

d)

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{F(s)}{s}. \quad (2.44)$$

e) Sei die Funktion f so, dass ihre k -te Ableitung ($k = 1, \dots, n$) $f^{(k)}(t)$ für $t > 0$ existiert und deren LAPLACE-Integrale $\int_0^\infty f^{(k)}(t) e^{-st} dt$ konvergieren. Dann gilt

$$f^{(n)}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(+0). \quad (2.45)$$

Beweis. Vgl. [41, Kap. 4.3].

a)

$$\sum_{i=1}^n a_i f_i(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \int_0^\infty \sum_{i=1}^n a_i f_i(t) e^{-st} dt = \sum_{i=1}^n a_i \int_0^\infty f_i(t) e^{-st} dt = \sum_{i=1}^n a_i F_i(s).$$

- b) Unter der Voraussetzung, dass die angegebenen Integrale der LAPLACE-Transformationen konvergieren, erhält man

$$\begin{aligned} f_1(t) * f_2(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} \int_0^\infty \left[\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \right] e^{-st} dt \\ &= \int_0^\infty \left[\int_0^\infty f_1(\tau) f_2(t-\tau) \theta(t-\tau) d\tau \right] e^{-st} dt. \end{aligned}$$

Dabei ist $\theta = \theta(t)$ die HEAVISIDE-Sprungfunktion

$$\theta(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}. \quad (2.46)$$

Da die Konvergenz der Integrale vorausgesetzt war, kann die Reihenfolge der Integration nach Satz von FUBINI vertauscht werden und es folgt weiter durch Substitution

$$\begin{aligned} f_1(t) * f_2(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} \int_0^\infty f_1(\tau) \left[\int_0^\infty f_2(t-\tau) \theta(t-\tau) e^{-st} dt \right] d\tau \\ &= \int_0^\infty f_1(\tau) [F_2(s) e^{-s\tau}] d\tau \\ &= F_1(s) \cdot F_2(s). \end{aligned}$$

- c) Durch partielle Integration und wegen $\lim_{t \rightarrow \infty} t^n e^{-st} = 0$ für $\operatorname{Re}(s) > 0$ und $\forall n \in \mathbb{N}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} t^n &\xrightarrow{\mathcal{L}} \int_0^\infty t^n e^{-st} dt \\ &= \underbrace{\left[\frac{t^n e^{-st}}{-s} \right]_0^\infty}_{=0} + \frac{n}{s} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-st} dt = \dots = \frac{n!}{s^n} \int_0^\infty e^{-st} dt \\ &= \frac{n!}{s^{n+1}}. \end{aligned}$$

Die zweite Aussage folgt durch Substitution $u = st$ und mithilfe der Integraldarstellung (2.1) der Gamma-Funktion.

$$t^\alpha \xrightarrow{\mathcal{L}} \int_0^\infty t^\alpha e^{-st} dt = \int_0^\infty \frac{u^\alpha}{s^\alpha} e^{-u} \frac{1}{s} du = s^{-(\alpha+1)} \int_0^\infty u^\alpha e^{-u} du = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}.$$

- d) Wende den Faltungssatz b) auf f und $\mathbf{1}$ an ($\mathcal{L}\{\mathbf{1}(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} dt = \frac{1}{s}$ für $\operatorname{Re}(s) > 0$).

$$\int_0^t f(\tau) d\tau = f(t) * \mathbf{1}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{F(s)}{s}$$

e) Induktion:

$n = 1$: Mit partieller Integration erhält man

$$\int_0^{\infty} f'(t)e^{-st} dt = \lim_{\tau \searrow 0} \left([f(t)e^{-st}]_{\tau}^{\infty} + s \int_{\tau}^{\infty} f(t)e^{-st} dt \right) = sF(s) - f(+0).$$

$n \Rightarrow n + 1$: Angenommen, es gilt $f^{(n)}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(+0)$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f^{(n+1)}(t)e^{-st} dt &= \lim_{\tau \searrow 0} \left([f^{(n)}(t)e^{-st}]_{\tau}^{\infty} + s \int_{\tau}^{\infty} f^{(n)}(t)e^{-st} dt \right) \\ &= s\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) - f^{(n)}(+0) \\ &= s \cdot \left(s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(+0) \right) - f^{(n)}(+0) \\ &= s^{n+1} F(s) - \sum_{k=0}^n s^{n-k} f^{(k)}(+0). \end{aligned}$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung. □

2.3.2 Reihenentwicklung von LAPLACE-Transformierten

Zur Gewinnung der Originalfunktion $f(t)$ aus der LAPLACE-Transformierten $F(s)$ hat es sich als hilfreich erwiesen, die LAPLACE-Transformierte $F(s)$ in eine Reihe zu entwickeln $F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(s)$, wobei die inversen LAPLACE-Transformationen $\mathcal{L}^{-1}\{F_n(s)\}(t) = f_n(t)$ der Summanden bekannt sind. Unter gewissen Voraussetzungen kann nun gliedweise invers transformiert werden, d.h. es gilt $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)$. Die Voraussetzungen für dieses Verfahren sind in dem folgenden Satz [13, S. 113], welcher auch in Abschnitt 3 Anwendung findet, zusammengefasst.

Satz 2.22 (Allgemeiner Entwicklungssatz für LAPLACE-Transformationen):

Eine Funktion $F(s)$ sei als unendliche Reihe von LAPLACE-Transformierten in $\{Re(s) \geq \sigma\}$ darstellbar durch

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(s), \quad \mathcal{L}^{-1}\{F_n(s)\}(t) = f_n(t).$$

Dabei sollen alle Integrale

$$\int_0^{\infty} f_n(t)e^{-st} dt = F_n(s), \quad n = 0, 1, \dots$$

in der gemeinsamen Halbebene $Re(s) \geq \sigma$ existieren. Zusätzlich gelte:

a) Die Integrale

$$\int_0^{\infty} |f_n(t)| e^{-st} dt = \Phi_n(s), \quad n = 0, 1, \dots$$

existieren in der Halbebene $\operatorname{Re}(s) \geq \sigma$.

b) Die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(\sigma)$$

konvergiert.

Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)$ sogar absolut gegen eine Funktion $f(t)$ für fast alle $t \geq 0$ und es ist $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s)$, d.h.

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} F_n(s) \right\} (t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t).$$

2.3.3 LAPLACE-TRANSFORMATION DER MITTAG-LEFFLER-FUNKTIONEN

Zur Lösung fraktionaler Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten wird häufig die LAPLACE-TRANSFORMATION der MITTAG-LEFFLER-FUNKTIONEN bzw. deren Inversion benötigt. Dies soll daher im Folgenden hergeleitet werden, wie in [27, S. 20ff.] beschrieben.

Lemma 2.23:

Seien $\alpha, \beta > 0$ sowie $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$. Dann gilt

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^{\beta-1} E_{\alpha, \beta}(\pm z t^{\alpha}) dt = \frac{1}{1 \mp z}. \quad (2.47)$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\beta-1} E_{\alpha, \beta}(\pm z t^{\alpha}) dt &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\beta-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\pm z)^k t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + \beta)} dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (\pm z)^k \frac{1}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha k + \beta - 1} dt}_{=\Gamma(\alpha k + \beta)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (\pm z)^k = \frac{1}{1 \mp z} \quad (\text{geometrische Reihe}). \end{aligned}$$

□

Satz 2.24:

Seien $\alpha, \beta > 0$, $b \in \mathbb{C}$ fest sowie $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > |b|^{\frac{1}{\alpha}}$. Dann erhält man die LAPLACE-Transformation

$$\mathcal{L}\{t^{\alpha k + \beta - 1} E_{\alpha, \beta}^{(k)}(\pm bt^\alpha)\}(s) = \frac{k! s^{\alpha - \beta}}{(s^\alpha \mp b)^{k+1}} \quad (2.48)$$

Beweis. Durch k -faches Ableiten nach z von (2.47) folgt

$$\int_0^\infty e^{-tz} t^{\alpha k + \beta - 1} E_{\alpha, \beta}^{(k)}(\pm zt^\alpha) dt = \frac{k!}{(1 \mp z)^{k+1}}, \quad |z| < 1. \quad (2.49)$$

Dann ergibt sich (2.48) durch Substitution $p := st$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-st} t^{\alpha k + \beta - 1} E_{\alpha, \beta}^{(k)}(\pm bt^\alpha) dt &= \int_0^\infty e^{-p} p^{\alpha k + \beta - 1} s^{-\alpha k - \beta + 1} E_{\alpha, \beta}^{(k)}\left(\pm \frac{b}{s^\alpha} p^\alpha\right) \frac{dp}{s} \\ &= \frac{s^{\alpha - \beta}}{s^{\alpha(k+1)}} \int_0^\infty e^{-p} p^{\alpha k + \beta - 1} E_{\alpha, \beta}^{(k)}\left(\pm \frac{b}{s^\alpha} p^\alpha\right) dp \\ &\stackrel{(2.49)}{=} \frac{s^{\alpha - \beta}}{s^{\alpha(k+1)}} \frac{k!}{\left(1 \mp \frac{b}{s^\alpha}\right)^{k+1}} = \frac{k! s^{\alpha - \beta}}{(s^\alpha \mp b)^{k+1}}. \end{aligned}$$

□

2.4 Fraktionale Infinitesimalrechnung

Die *fraktionale Infinitesimalrechnung* beschäftigt sich mit der Theorie der Integrale und Ableitungen beliebiger Ordnung als Verallgemeinerung der Ableitung n -ter Ordnung und der n -fach iterierten Integrale (engl.: repeated integral) ($n \in \mathbb{N}$). Die Geburt dieser Theorie wird auf einen Briefwechsel zwischen LEIBNIZ und DE L'HOSPITAL aus dem Jahr 1695 zurückgeführt, in dem DE L'HOSPITAL die Frage „Was bedeutet $\frac{d^n}{dx^n} f(x)$ für $n = \frac{1}{2}$?“ stellte. Die explizite Frage nach $n = \frac{1}{2}$ führte wohl zum Begriff der *fraktionalen Ableitung*. In der heutigen Theorie sind die Ordnungen der Ableitungen allerdings nicht auf rationale Zahlen beschränkt, sondern beliebig (reell oder komplex) [10, S. 3].

In diesem Abschnitt soll die Frage von DE L'HOSPITAL auf zwei verschiedene Weisen beantwortet werden (LEIBNIZ konnte lediglich einen Vorschlag für den Spezialfall $f(x) = x$ liefern [10, S. 4]). Zwei mögliche Definitionen der fraktionalen Ableitung (nach RIEMANN-LIOUVILLE und CAPUTO) werden kurz zusammen mit einigen Eigenschaften eingeführt und die Vorzüge des Ableitungsbegriffs nach CAPUTO für die Anwendung auf physikalische Probleme beschrieben. Zudem werden Aussagen über die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen einfacher linearer fraktionaler Differentialgleichungen, wie sie in Abschnitt 3 auftreten, getroffen. Weitere umfassendere Beschreibungen der Theorie fraktionaler Analysis finden sich u.a. in [10, 26, 27]. Abschließend werden einige numerische Verfahren zur Lösung fraktionaler Differentialgleichungen vorgestellt.

2.4.1 Fraktionale Integrale und Ableitungen

Bei der Entwicklung der fraktionalen Infinitesimalrechnung sind verschiedene Definitionen der Ableitungen und Integrale beliebiger Ordnung aufgetreten (vgl. [27, Kap. 2]). In der mathematischen Theorie spielt vor allem die Definition nach RIEMANN und LIOUVILLE eine bedeutende Rolle.

Definition 2.25 (RIEMANN-LIOUVILLE-Operatoren [10, Kap. 2]):

Seien $f \in L_1[0, T]$, $t \in [0, T]$ und $\alpha > 0$. Dann ist das fraktionale RIEMANN-LIOUVILLE-Integral der Ordnung α von f gegeben durch

$$J^\alpha f(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (2.50)$$

und die fraktionale RIEMANN-LIOUVILLE -Ableitung der Ordnung α von f gegeben durch

$$D^\alpha f(t) := D^m J^{m-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}} d\tau, \quad m-1 \leq \alpha < m. \quad (2.51)$$

Im Falle $\alpha = 0$ ist $J^0 = D^0 = I$ die Identität.

Bemerkung 2.26:

1. Häufig wird in der Literatur bei der Definition fraktionaler Ableitungen ein weiterer Parameter angegeben, der die untere Integrationsgrenze bestimmt [10, 27]. In der hier angegebenen Definition ist dieser Wert zu Null festgelegt. Dies hat praktische Gründe. In Anwendungssituationen werden häufig zeitabhängige Größen betrachtet und mithilfe von fraktionalen Ableitungen und Integralen das Verhalten von Systemen unter gewissen Bedingungen beschrieben. In diesem Fall gibt die untere Integrationsgrenze $\tau = 0$ den Zeitpunkt an, ab dem die Geschichte des Systems berücksichtigt wird bzw. bekannt ist. An dieser Stelle soll auch darauf aufmerksam gemacht werden, dass die fraktionalen Differentialoperatoren im Gegensatz zu natürlichen Differentialoperatoren keinen lokalen Charakter besitzen. Dies macht sie so wertvoll für die Beschreibung von Materialien mit Gedächtnis.
2. Der Operator D^m für $m \in \mathbb{N}$ meint die gewöhnliche m -te Ableitung, d.h. $D^m := \frac{d^m}{dt^m}$. Die obige Definition sollte allerdings auch die Anforderung erfüllen, dass die fraktionale Ableitung bei natürlicher Ordnung in den gewöhnlichen Ableitungsbegriff übergeht. Dies wird neben einigen anderen Eigenschaften, die für Ableitungen und Integrale natürlicher Ordnung bereits bekannt sind, in Satz 2.28 gezeigt.

Beispiel 2.27:

Im Folgenden sind zwei einfache Beispiele zur Bestimmung der RIEMANN-LIOUVILLE-Ableitung zu sehen.

a)

$$\begin{aligned}
 f(t) &= k = \text{const.}, \quad \alpha \in (0, 1) \\
 {}_0^{RL}D^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{k}{(t-\tau)^\alpha} d\tau \\
 &= \frac{k}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \left[-\frac{1}{1-\alpha} (t-\tau)^{1-\alpha} \right]_0^t \\
 &= \frac{k}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha}
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 f(t) &= t^\beta, \quad \beta > 0, \quad \alpha \in (0, 1) \\
 {}_0^{RL}D^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\tau^\beta}{(t-\tau)^\alpha} d\tau && s := \frac{\tau}{t} \\
 &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \left(t^{\beta-\alpha+1} \int_0^1 \frac{s^\beta}{(1-s)^\alpha} ds \right) \\
 &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} t^{\beta-\alpha+1} \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\beta-\alpha+2)} && [6, 1.5 (1)+(5)] \\
 &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} t^{\beta-\alpha}
 \end{aligned}$$

Satz 2.28 (Eigenschaften von RIEMANN-LIOUVILLE-Operatoren [10, Kap. 2]):

Seien $\alpha, \beta \geq 0$, $m, n, p \in \mathbb{N}$, sodass $m-1 < \alpha \leq m$, $n > \alpha$ und $f \in L_1[0, T]$.

a) $J^\alpha J^\beta f = J^{\alpha+\beta} f$ fast überall in $[0, T]$

b) $J^\alpha J^\beta f = J^\beta J^\alpha f$

c) $D^\alpha J^\alpha f = f$

d) $D^\alpha f = D^n J^{n-\alpha} f$

e) $D^p D^\alpha f = D^{p+\alpha} f$

f) Sei zusätzlich $f \in C^p[0, T]$. Dann folgt

$$\lim_{\gamma \nearrow p} D^\gamma f = D^p f$$

punktweise in $(0, T]$.

Beweis.

- a) Zunächst muss gezeigt werden, dass $J^\beta f \in L_1[0, T]$ erfüllt ist. Dies folgt, da das fraktionale RIEMANN-LIOUVILLE-Integral als Faltung zweier in \mathbb{R} integrierbarer Funktionen darstellbar und damit integrierbar ist [10, Thm. 2.1]. Daher kann nachfolgend der Satz von FUBINI angewendet und später $s = \tau + u \cdot (t - \tau)$ substituiert werden, sodass gilt

$$\begin{aligned}
 J^\alpha J^\beta f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \int_0^s (s-\tau)^{\beta-1} f(\tau) d\tau ds \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t f(\tau) \int_\tau^t (t-s)^{\alpha-1} (s-\tau)^{\beta-1} ds d\tau \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t f(\tau) \int_0^1 [(t-\tau)(1-u)]^{\alpha-1} [u(t-\tau)]^{\beta-1} (t-\tau) du d\tau \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{\beta-1} du \int_0^t f(\tau) (t-\tau)^{\alpha+\beta-1} d\tau \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^t f(\tau) (t-\tau)^{\alpha+\beta-1} d\tau \\
 &= J^{\alpha+\beta} f(t).
 \end{aligned}$$

Im vorletzten Schritt wurde die Darstellung des EULER-Integrals erster Art [6, Kap. 1.5] verwendet.

- b) folgt aus a).
 c) Die Behauptung folgt bei natürlicher Ableitungsordnung aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für $\alpha = 1$ und für $\alpha \in \mathbb{N}$ aufgrund der Halbgruppen-Eigenschaft von D (für natürliche Ableitungsordnung) und J . Für $\alpha > 0$ beliebig folgt dann

$$D^\alpha J^\alpha f = D^m J^{m-\alpha} J^\alpha f = D^m J^m f = f.$$

- d) Ähnlich wie in c) liefern die jeweiligen Halbgruppen-Eigenschaften für J und D

$$D^n J^{n-\alpha} = D^m D^{n-m} J^{n-m} J^{m-\alpha} = D^m J^{m-\alpha} = D^\alpha.$$

e) $D^{p+\alpha} f = D^{p+m} J^{p+m-(p+\alpha)} f = D^p D^m J^{m-\alpha} f = D^p D^\alpha f.$

- f) Betrachte das Taylor-Polynom der Ordnung $p - 1$ von f

$$T_{p-1}[f](t) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k$$

und das zugehörige Restglied

$$R_{p-1}[f](t) = f(t) - T_{p-1}[f](t).$$

Dann folgt mit Beispiel 2.27 b)

$$\begin{aligned} D^\gamma f(t) - D^p f(t) &= D^\gamma T_{p-1}[f](t) - D^p T_{p-1}[f](t) \\ &\quad + D^\gamma R_{p-1}[f](t) - D^p R_{p-1}[f](t) \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k+1-\gamma)} t^{k-\gamma} - 0 \\ &\quad + D^p J^{p-\gamma} R_{p-1}[f](t) - D^p R_{p-1}[f](t). \end{aligned}$$

Für $\gamma \nearrow p$ heben sich die beiden unteren Summanden auf und in dem ersten Summanden konvergieren die Argumente der Gamma-Funktion gegen nicht-positive ganze Zahlen, bei denen die Funktion $z \mapsto \frac{1}{\Gamma(z)}$ Nullstellen besitzt, wie leicht anhand der Darstellung (2.6) zu sehen ist. Damit folgt die Behauptung. □

Bemerkung 2.29:

Die Halbgruppen-Eigenschaft der RIEMANN-LIOUVILLE-Integraloperatoren, die in Satz 2.28 a) und b) gezeigt wurden, lassen sich nicht allgemein auf die RIEMANN-LIOUVILLE-Differentialoperatoren übertragen. Ebenso gelten c) und e) i.A. nicht bei Vertauschen der Operatoren [10, S. 30+39].

In der Anwendung der Viskoelastizitätstheorie treten fraktionale Differentialgleichungen auf, die physikalisch interpretierbare Anfangswerte (d.h. $f(0)$, $f'(0)$ etc.) beinhalten sollten. Die RIEMANN-LIOUVILLE-Definition der fraktionalen Ableitung führt jedoch zu Anfangswerten, welche die RIEMANN-LIOUVILLE-Ableitung an der Stelle $t = 0$ enthalten [27, S. 78]. Dadurch wird diese Definition für die Anwendung in dieser Arbeit weniger von Interesse sein, sodass auf die Ausführung weiterer Eigenschaften verzichtet wird. Stattdessen soll das angesprochene Problem durch eine alternative Definition der fraktionalen Ableitung nach [8] gelöst werden.

Definition 2.30 (CAPUTO-Ableitung):

Seien $m \in \mathbb{N}$ und f eine Funktion, sodass $f^{(m)} \in L_1[0, T]$. Weiter seien $\alpha > 0$ mit $m-1 < \alpha \leq m$ und $t \in [0, T]$. Dann ist die fraktionale CAPUTO-Ableitung der Ordnung α von f gegeben durch

$$D_*^\alpha f(t) := J^{m-\alpha} D^m f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}} d\tau. \quad (2.52)$$

Für $\alpha = 0$ ist wieder $D_*^0 = I$ die Identität.

Zur Ableitung von Eigenschaften der CAPUTO-Ableitung soll der Zusammenhang zur RIEMANN-LIOUVILLE-Ableitung im folgenden Satz hergestellt werden.

Satz 2.31 (Zusammenhang von RIEMANN-LIOUVILLE- und CAPUTO-Ableitung):

Seien $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \geq 0$, $m - 1 < \alpha \leq m$. Weiter sei die Funktion f so gewählt, dass $D^\alpha f$ und $D_*^\alpha f$ existieren. Dann gilt

$$D_*^\alpha f(t) = D^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k+1-\alpha)} t^{k-\alpha}. \quad (2.53)$$

Beweis aus [10, S. 50ff.]. Betrachte wieder das Taylor-Polynom der Ordnung $m - 1$ von f um 0

$$T_{m-1}[f](t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k.$$

Dann folgt aus Beispiel 2.27 b)

$$D^\alpha T_{m-1}[f](t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k+1-\alpha)} t^{k-\alpha}.$$

Die Aussage des Satzes lässt sich also wie folgt umformen zu

$$D_*^\alpha f(t) = D^\alpha [f(t) - T_{m-1}[f](t)].$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} D^\alpha [f(t) - T_{m-1}[f](t)] &= D^m J^{m-\alpha} [f(t) - T_{m-1}[f](t)] \\ &= \frac{d^m}{dt^m} \int_0^t \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} (t-\tau)^{m-\alpha-1} (f(\tau) - T_{m-1}[f](\tau)) d\tau. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Durch partielle Integration erhalten wir

$$\begin{aligned} J^{m-\alpha} [f(t) - T_{m-1}[f](t)] &= \int_0^t \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} (t-\tau)^{m-\alpha-1} (f(\tau) - T_{m-1}[f](\tau)) d\tau \\ &= -\frac{1}{\Gamma(m-\alpha+1)} [(f(\tau) - T_{m-1}[f](\tau))(t-\tau)^{m-\alpha}]_0^t \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(m-\alpha+1)} \int_0^t (Df(\tau) - DT_{m-1}[f](\tau))(t-\tau)^{m-\alpha} d\tau \\ &= J^{m-\alpha+1} D[f(\tau) - T_{m-1}[f](\tau)]. \end{aligned}$$

Durch m -fache Wiederholung dieses Schrittes und da $T_{m-1}[f]$ ein Polynom vom Grad $m - 1$ ist, folgt

$$\begin{aligned} J^{m-\alpha} [f(t) - T_{m-1}[f](t)] &= J^{2m-\alpha} D^m [f(t) - T_{m-1}[f](t)] \\ &= J^m J^{m-\alpha} D^m f(t). \end{aligned} \quad (2.55)$$

Einsetzen von (2.55) in (2.54) liefert schließlich

$$D^\alpha [f(t) - T_{m-1}[f](t)] = D^m J^m J^{m-\alpha} D^m f(t) = J^{m-\alpha} D^m f(t) = D_*^\alpha f(t).$$

□

Folgerung 2.32:

Seien f und α wie im vorigen Satz. Dann gilt

$$D^\alpha f = D_*^\alpha f$$

genau dann, wenn

$$f^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m - 1$$

erfüllt ist.

Beispiel 2.33:

Zum Vergleich zur RIEMANN-LIOUVILLE-Ableitung wird die Ableitung nach CAPUTO für die Funktionen aus Beispiel 2.27 bestimmt.

a)

$$\begin{aligned} f(t) &= k = \text{const.}, \quad \alpha \in (0, 1) \\ D_*^\alpha f(t) &= 0 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 f(t) &= t^\beta, \quad \beta > 0, \quad \beta \notin \mathbb{N}, \quad \alpha \in (0, 1) \\
 D_*^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\beta \tau^{\beta-1}}{(t-\tau)^\alpha} d\tau & s &:= \frac{\tau}{t} \\
 &= \frac{\beta}{\Gamma(1-\alpha)} t^{\beta-\alpha} \int_0^1 s^{\beta-1} (1-s)^{-\alpha} ds \\
 &= \frac{\beta}{1-\alpha} t^{\beta-\alpha} \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} & [6, 1.5 (1)+(5)] \\
 &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} t^{\beta-\alpha}
 \end{aligned}$$

Im folgenden Satz werden noch einige Eigenschaften der fraktionalen CAPUTO-Ableitung zusammengefasst.

Satz 2.34 (Eigenschaften von CAPUTO-Differentialoperatoren):

Seien $\alpha \geq 0$, $m, n \in \mathbb{N}$, sodass $m - 1 < \alpha \leq m$.

- a) Sei $f \in C[0, T]$. Dann gilt $D_*^\alpha J^\alpha f = f$.
- b) Sei $f \in C^{n+m}[0, T]$. Dann gilt $D_*^\alpha D_*^n f = D_*^{n+\alpha} f$.
- c) Sei $f \in C^n[0, T]$. Dann ist $\lim_{\gamma \nearrow n} D_*^\gamma f = D^n f$.

Beweis.

- a) Betrachte zunächst die Funktion $t \mapsto J^\alpha f(t)$. Für $k = 0, 1, \dots, m - 1$ ist $\alpha - k > 0$ und es gilt

$$D^k J^\alpha f = D^k J^k J^{\alpha-k} = J^{\alpha-k} \implies D^k (J^\alpha f)(0) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m - 1. \tag{2.56}$$

Damit sind die Bedingungen von Folgerung 2.32 erfüllt und es folgt mit der Aussage c) aus Satz 2.28

$$D_*^\alpha J^\alpha f = D_*^\alpha (J^\alpha f) = D^\alpha J^\alpha f = f.$$

- b) $D_*^{n+\alpha} f = J^{m+n-(n+\alpha)} D^{m+n} f = J^{m-\alpha} D^m D^n f = D_*^\alpha D^n f$.
- c) $D_*^\gamma f = D^\gamma [f - T_{n-1}[f]] = D^\gamma f - D^\gamma T_{n-1}[f] \xrightarrow{\gamma \nearrow n} D^n f$.

□

Aus den vorhergehenden Sätzen folgt schließlich noch eine wichtige Aussage bezüglich der Hintereinanderausführung fraktionaler CAPUTO-Ableitungen, die für die Herleitung der Differentialgleichung in Abschnitt 3 von Bedeutung ist.

Folgerung 2.35:

Seien $\alpha \geq 0$, $m, n \in \mathbb{N}$, sodass $m - 1 < \alpha \leq m$. Weiter sei $f \in C^{m+n}[0, T]$, sodass

$$f^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m + n - 1.$$

Dann gilt

$$D^n D_*^\alpha f = D_*^\alpha D^n f = D_*^{n+\alpha} f.$$

Beweis. Aus Folgerung 2.32, Satz 2.28 e) und Satz 2.34 b) folgt

$$D^n D_*^\alpha f = D^n D^\alpha f = D^{n+\alpha} f = D_*^{n+\alpha} f = D_*^\alpha D^n f.$$

□

Abschließend sollen Vorzüge von Definition 2.30 anhand der LAPLACE-Transformation von (2.52), welche zur Lösung fraktionaler Differentialgleichungen durchgeführt wird [27, S. 106], deutlich gemacht werden.

Satz 2.36 (LAPLACE-Transformation der fraktionalen CAPUTO-Ableitung):

Seien $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$, sodass $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ für $\text{Re}(s) > \sigma$ existiert. Weiter seien $\alpha > 0$ und $m \in \mathbb{N}$, sodass $\alpha \in (m - 1, m)$. Dann gilt für $\text{Re}(s) > \sigma$

$$\mathcal{L}\{D_*^\alpha f(t)\}(s) = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0), \quad m - 1 < \alpha \leq m. \quad (2.57)$$

Beweis. Unter Verwendung der Regeln (2.42), (2.43) sowie (2.45) erhält man

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{D_*^\alpha f(t)\}(s) &= \mathcal{L}\left\{\int_0^t f^{(m)}(\tau) \frac{(t-\tau)^{m-\alpha-1}}{\Gamma(m-\alpha)} d\tau\right\}(s) \\ &= \mathcal{L}\{f^{(m)}(t)\}(s) \cdot \mathcal{L}\left\{\frac{t^{m-\alpha-1}}{\Gamma(m-\alpha)}\right\}(s) \\ &= \left(s^m F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-k-1} f^{(k)}(0)\right) \cdot s^{\alpha-m} \\ &= s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0). \end{aligned}$$

□

In (2.57) sind nun die Werte von f und deren Ableitungen an der Stelle $t = 0$ enthalten, für die eine physikalische Interpretation existiert. Daher wird im weiteren Verlauf dieses Abschnitts und für die Modellbildung im nächsten Abschnitt nur noch der fraktionale Ableitungsbegriff nach CAPUTO verwendet.

2.4.2 Fraktionale Differentialgleichungen

Zur Lösung fraktionaler Differentialgleichungen existiert eine umfassende Theorie (vgl. u.a. [26] und [27]). An dieser Stelle soll lediglich auf die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung linearer fraktionaler Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten (wie im Modell verwendet) eingegangen werden. Betrachte zum Einstieg die konstruktiven Beweise der folgenden relativ speziellen Probleme.

Lemma 2.37:

Sei $g \in C[0, T]$ für ein $T > 0$. Dann hat das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} D_*^\alpha f(t) = g(t) & m - 1 < \alpha \leq m \\ f^{(k)}(0) = f_0^{(k)} & k = 0, \dots, m - 1 \end{cases} \quad (2.58)$$

genau eine Lösung $f(t) \in L_1(0, T)$.

Beweis.

- Existenz: $D_*^\alpha f(t) = g(t)$

$$\xrightarrow{(2.57)} \mathcal{L} \quad s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} f_0^{(k)}(0) s^{\alpha-k-1} = G(s)$$

$$F(s) = G(s) s^{-\alpha} + \sum_{k=0}^{m-1} f_0^{(k)} s^{-k-1}$$

$$\xrightarrow{(2.41), (2.42), (2.43)} \mathcal{L}^{-1} \quad f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} g(\tau) d\tau + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f_0^{(k)}}{k!} t^k$$

- Eindeutigkeit: Angenommen, es gäbe zwei Lösungen $f_1(t)$, $f_2(t)$. Betrachte $h(t) := f_1(t) - f_2(t)$. Dann erfüllt h das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} D_*^\alpha h(t) = 0 & m - 1 < \alpha \leq m \\ h^{(k)}(0) = 0 & k = 0, \dots, m - 1 \end{cases} .$$

Damit folgt dann

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{\mathcal{L}} s^\alpha H(s) - \sum_{k=0}^{m-1} \underbrace{h^{(k)}(0)}_{=0 \quad \forall k} s^{\alpha-k-1} = 0 \\ & \implies H(s) \equiv 0 \\ & \implies h(t) = 0 \quad \text{f.ü. in } (0, T) \\ & \implies f_1 = f_2 \quad \text{f.ü. in } (0, T). \end{aligned}$$

□

Lemma 2.38 (vgl. [10] Th. 7.1):

Seien $\alpha \in (0, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ sowie $g \in C[0, T]$ für ein $T > 0$. Dann hat das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} D_*^\alpha f(t) = \lambda f(t) + g(t) \\ f(0) = f_0 \end{cases} \quad (2.59)$$

genau eine Lösung $f(t) \in L_1(0, T)$.

Beweis.

- Existenz: Mittels Laplace-Transformation sowie (2.41), (2.42), (2.45) und Satz 2.24 folgt

$$\begin{aligned} & D_*^\alpha f(t) = \lambda f(t) + g(t) \\ & \xrightarrow{\mathcal{L}} s^\alpha F(s) - f_0 s^{\alpha-1} = \lambda F(s) + G(s) \\ & F(s) = f_0 \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - \lambda} + G(s) \frac{1}{s^\alpha - \lambda} \\ & \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t) = f_0 E_\alpha(\lambda t^\alpha) + \int_0^t g(t - \tau) \tau^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda \tau^\alpha) d\tau. \end{aligned}$$

- Eindeutigkeit: Angenommen, es gäbe zwei Lösungen $f_1(t)$, $f_2(t)$. Betrachte $h(t) := f_1(t) - f_2(t)$. Dann erfüllt h das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} D_*^\alpha h(t) = \lambda h(t) \\ h(0) = 0 \end{cases} .$$

Damit folgt dann

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\mathcal{L}} \quad s^\alpha H(s) - \underbrace{h(0)}_{=0} s^{\alpha-1} &= \lambda H(s) \\ \implies H(s) &= 0 \quad \text{f.ü.} \\ \implies h(t) &= 0 \quad \text{f.ü. in } (0, T) \\ \implies f_1 &= f_2 \quad \text{f.ü. in } (0, T). \end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.39:

Für den Grenzfall $\alpha \rightarrow 1$ reduziert sich die Lösung von (2.79) zur bekannten Formel

$$f(t) = f_0 e^{\lambda t} + \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} g(\tau) d\tau.$$

Das Anfangswertproblem in dem nachfolgend untersuchten Modell besitzt eine ähnliche Form wie das Problem in (2.79). Lediglich die inverse Laplace-Transformation ist etwas schwieriger. Lemma 2.38 zeigt allerdings den grundlegenden Lösungsweg für fraktionale Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten durch Nutzung der Laplace-Transformation-Methode. Die in den Lemmata angegebenen Spezialfälle sollen schließlich in dem folgenden allgemeinen Existenz- und Eindeutigkeitsatz verallgemeinert werden.

Satz 2.40 (Existenz- und Eindeutigkeitsatz zur Lösung fraktionaler Anfangswertprobleme [10, Kap. 6.1+6.2]):

Seien $\alpha > 0$ und $m \in \mathbb{N}$, sodass $\alpha \in (m - 1, m)$. Weiter seien $f_0^{(0)}, \dots, f_0^{(m-1)} \in \mathbb{R}$, $K > 0$ und $h^* > 0$. Definiere

$$G := \left\{ (t, f) : t \in [0, h^*], \left| f - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} f_0^{(k)} \right| \leq K \right\}.$$

Sei $g : G \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und erfülle eine LIPSCHITZ-Bedingung bezüglich der zweiten Variable, d.h.

$$|g(t, f_1) - g(t, f_2)| \leq L|f_1 - f_2|$$

für eine Konstante L unabhängig von t, f_1, f_2 . Definiere weiterhin $M := \sup_{(t,f) \in G} |g(t, f)|$

und

$$h := \begin{cases} h^* & M = 0 \\ \min \left\{ h^*, \left(\frac{KT(n+1)}{M} \right)^{\frac{1}{n}} \right\} & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dann existiert genau eine Lösung $f \in C[0, h]$ des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} D_*^\alpha f(t) = g(t, f(t)) \\ f^{(k)}(0) = f_0^{(k)}, \quad k = 0, \dots, m-1 \end{cases} \quad (2.60)$$

Hierzu benötigen wir noch die folgende Aussage.

Lemma 2.41 ([10, Lemma 6.2]):

Angenommen, es gelten die Voraussetzungen des obigen Satzes und es existiert eine Lösung des Anfangswertproblems (2.60). Dann ist $f \in C[0, h]$ genau dann eine Lösung von (2.60), wenn f der nicht-linearen VOLTERRA-Integralgleichung 2. Art

$$f(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f_0^{(k)}}{k!} t^k + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} g(\tau, f(\tau)) d\tau \quad (2.61)$$

genügt.

Beweis. Sei zunächst f eine Lösung von (2.61). Dann folgt mit den Anfangsbedingungen von (2.60)

$$f(t) = \underbrace{\sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k}_{=T_{m-1}[f](t)} + J^\alpha g(\cdot, f(\cdot))(t).$$

Anwenden von D_*^α auf beide Seiten und Satz 2.34 a) ergeben

$$\begin{aligned} D_*^\alpha f(t) &= D_*^\alpha T_{m-1}[f](t) + D_*^\alpha J^\alpha g(\cdot, f(\cdot))(t) \\ &= \underbrace{J^{m-\alpha} D^m T_{m-1}[f](t)}_{=0} + g(t, f(t)). \end{aligned}$$

Sei andererseits f eine Lösung des Anfangswertproblems (2.60), dann gilt

$$\begin{aligned} g(t, f(t)) &= D_*^\alpha f(t) = D^\alpha [f(t) - T_{m-1}[f](t)] \\ &= D^m J^{m-\alpha} [f(t) - T_{m-1}[f](t)]. \end{aligned}$$

Da die verwendeten Funktionen stetig sind, kann beidseitig der Operator J^m angewendet werden und es folgt

$$J^m g(\cdot, f(\cdot))(t) = J^{m-\alpha} [f(t) - T_{m-1}[f](t)] + q(t).$$

Dabei ist q ein Polynom höchstens vom Grad $m-1$. Wegen der Stetigkeit von $t \mapsto g(t, f(t))$ hat $J^m g(\cdot, f(\cdot))(t)$ eine mindestens m -fache Nullstelle in $t=0$. Dies

gilt nach Konstruktion auch für $f(t) - T_{m-1}[f](t)$, also auch für $J^{m-\alpha}[f(t) - T_{m-1}[f](t)]$ und damit auch für q . Damit folgt $q \equiv 0$ und Anwenden von $D^{m-\alpha}$ ergibt schließlich

$$\begin{aligned} f(t) - T_{m-1}[f](t) &= D^{m-\alpha} J^m g(\cdot, f(\cdot))(t) = D^1 J^{\alpha-(m-1)} J^m g(\cdot, f(\cdot))(t) \\ &= D^1 J^{1+\alpha} g(\cdot, f(\cdot))(t) = J^\alpha g(\cdot, f(\cdot))(t). \end{aligned}$$

Durch Einsetzen der Anfangswerte folgt (2.61). □

Beweis von Satz 2.40 (Idee). Dieser Satz entspricht einer fraktionalen Variante des bekannten klassischen Satzes für gewöhnliche Differentialgleichungen von PICARD-LINDELÖF. Dabei wird Lemma 2.41 verwendet. Hierzu wird für den Operator A , definiert durch

$$(Af)(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f_0^{(k)}}{k!} t^k + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} g(\tau, f(\tau)) d\tau,$$

das Fixpunktproblem

$$Af = f$$

betrachtet. Mithilfe der Fixpunktsätze von SCHAUDER und WEISSINGER [10, Appendix D.2] als Verallgemeinerungen des BANACH'schen Fixpunktsatzes werden dann Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des Fixpunktproblems gezeigt. □

2.4.3 Numerik fraktionaler Differentialgleichungen

In diesem Abschnitt werden drei verschiedene numerische Methoden zur Lösung linearer fraktionaler Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten vorgestellt und die zugehörigen Fehlerabschätzungen unter gewissen Bedingungen angegeben. Anhand einiger Beispiele zu fraktionalen Differentialgleichungen mit bekannten analytischen Lösungen werden diese Methoden getestet und verglichen. Zudem werden sie in Abschnitt 4 auch auf das Modell in Abschnitt 3 angewendet.

GRÜNWARD-LETNIKOV-Näherung erster Ordnung Die nachfolgend beschriebene numerische Methode ist entnommen aus [27, Kap. 7] und basiert auf einer weiteren Definition der fraktionalen Ableitung nach GRÜNWARD-LETNIKOV

$$D_{GL}^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t}{h} \rfloor} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t - jh), \quad \alpha > 0. \quad (2.62)$$

Diese Definition ist eine direkte Verallgemeinerung der bekannten Formel für gewöhnliche Ableitungen

$$\frac{d^n}{dt^n} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-n} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} f(t - jh), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Seien $0 < \alpha < n$, $f(t)$ $(n - 1)$ -mal stetig differenzierbar in $[a, T]$ und $f^{(n)}(t)$ integrierbar in $[a, T]$. Dann existieren die fraktionale Ableitung nach RIEMANN-LIOUVILLE $D^\alpha f(t)$ und GRÜNWARD-LETNIKOV $D_{GL}^\alpha f(t)$ und stimmen überein [27, S. 75]. Zudem stimmt die fraktionale Ableitung nach CAPUTO $D_*^\alpha f(t)$ mit der nach RIEMANN-LIOUVILLE $D^\alpha f(t)$ für homogene Anfangswerte $f^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, 1, \dots, n - 1$ nach Folgerung 2.32 überein. Folglich ist die Definition (2.62) unter den genannten Voraussetzungen auch zur Beschreibung von CAPUTO-Ableitungen gültig. Für kleine Zeitschritte h wird die gewöhnliche erste Ableitung $f'(t)$ einer Funktion $f(t)$ für ein festes t durch

$$\tilde{f}'(t) = \frac{f(t) - f(t - h)}{h} \quad (2.63)$$

approximiert. Ebenso kann die fraktionale Ableitung für $t = nh$, $n \in \mathbb{N}$ durch

$$\widetilde{D_*^\alpha} f(t) = h^{-\alpha} \sum_{j=0}^n w_j^{(\alpha)} f(t - jh), \quad w_j^{(\alpha)} = (-1)^j \binom{\alpha}{j} \quad (2.64)$$

näherungsweise bestimmt werden. Dabei gilt, wie in [27, Kap. 7.4] gezeigt wurde, für im Punkt 0 analytische Funktionen f im Konvergenzbereich ihrer Reihendarstellung

$$f'(t) - \tilde{f}'(t) = \mathcal{O}(h), \quad D_*^\alpha f(t) - \widetilde{D_*^\alpha} f(t) = \mathcal{O}(h) \quad (h \rightarrow 0).$$

Aus (2.63) und (2.64) kann für eine lineare fraktionale Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten ein rekursives Zeitschrittverfahren abgeleitet werden. Dabei werden die Werte $w_j^{(\alpha)}$ in (2.64) durch folgende Rekursionsformel ermittelt.

Lemma 2.42:

Die Koeffizienten $w_j^{(\alpha)}$, $\alpha > 0$, $j \in \mathbb{N}_0$ sind rekursiv gegeben durch

$$w_0^{(\alpha)} = 1, \quad w_j^{(\alpha)} = \left(1 - \frac{\alpha + 1}{j}\right) w_{j-1}^{(\alpha)}, \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
 w_0^{(\alpha)} &= (-1)^0 \binom{\alpha}{0} \\
 w_j^{(\alpha)} &= (-1)^j \binom{\alpha}{j} = (-1)^j \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(j-1))}{j!} \\
 &= (-1)^{j-1} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(j-2))}{(j-1)!} \cdot \left(-\frac{\alpha-(j-1)}{j}\right) = \left(1 - \frac{\alpha+1}{j}\right) w_{j-1}^{(\alpha)}
 \end{aligned}$$

□

Alternativ können die $w_j^{(\alpha)}$, $\alpha > 0$, $j \in \mathbb{N}_0$ basierend auf der Darstellung

$$(1-z)^\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha}{j} z^j = \sum_{j=0}^{\infty} w_j^{(\alpha)} z^j$$

durch inverse FOURIER-Transformation

$$w_j^{(\alpha)} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f_\alpha(\varphi) e^{ik\varphi} d\varphi, \quad f_\alpha(\varphi) = (1 - e^{-i\varphi})^\alpha \quad (2.65)$$

(implementiert als Fast FOURIER Transformation) bestimmt werden [27, Kap. 7.5].

Prädiktor-Korrektor-Methode Die Idee dieser Methode basiert auf der Eigenschaft, dass das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} D_*^\alpha f(t) = K(t, f(t)) & m-1 < \alpha \leq m, \\ f^{(k)}(0) = f_0^{(k)} & k = 0, 1, \dots, m-1 \end{cases} \quad (2.66)$$

äquivalent zu der VOLTERRA-Integralgleichung

$$f(t) = \sum_{k=0}^{[\alpha]-1} f_0^{(k)} \frac{t^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} K(\tau, f(\tau)) d\tau \quad (2.67)$$

ist, wie in Lemma 2.41 gezeigt wurde. Zur Lösung der Gleichung (2.67) wird das folgende Prädiktor-Korrektor-Verfahren aus [11] als Verallgemeinerung der klassischen ADAMS-BASHFORTH-MOULTON-Methode basierend auf Trapez-Quadratur-Formeln der Integration unter Annahme diskreter Zeiten $\{t_n\}_{n=0,\dots,N} \subset [0, T]$ mit Schrittweite h in $N = \lfloor \frac{T}{h} \rfloor$ Zeitschritten, d.h. $t_n = nh$, $n = 0, \dots, N$ verwendet. Dabei wird zunächst das Integral in (2.67) in eine Summe von Integralen über kleine Zeitbereiche zerlegt und diese mithilfe der Produkt-Trapez-Quadratur-Formel approximiert durch

$$\tilde{f}(t_{n+1}) = \sum_{k=0}^{[\alpha]-1} f_0^{(k)} \frac{t_{n+1}^k}{k!} + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{j=0}^{n+1} a_{j,n+1} K(t_j, \tilde{f}(t_j)). \quad (2.68)$$

Hierbei haben die Koeffizienten $a_{j,n+1}$, $j = 0, \dots, n + 1$ die Form

$$a_{j,n+1} = \begin{cases} n^{\alpha+1} - (n - \alpha)(n + 1)^\alpha & j = 0, \\ (n - j + 2)^{\alpha+1} + (n - j)^{\alpha+1} - 2(n - j + 1)^{\alpha+1} & 1 \leq j \leq n, \\ 1 & j = n + 1. \end{cases}$$

Aufgrund des letzten Summanden auf der rechten Seite kann (2.68) i.A. nicht explizit nach $\tilde{f}(t_{n+1})$ aufgelöst werden. Stattdessen wird der Wert mithilfe der Produkt-Rechteckregel näherungsweise bestimmt. Es folgt die *Prädiktor*-Formel

$$\tilde{f}^p(t_{n+1}) = \sum_{k=0}^{[\alpha]-1} f_0^{(k)} \frac{t_{n+1}^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^n b_{j,n+1} K(t_j, \tilde{f}(t_j)) \quad (2.69)$$

mit den Koeffizienten

$$b_{j,n+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha} ((n + 1 - j)^\alpha - (n - j)^\alpha).$$

Bei einer Implementierung der Methode wird für jeden Zeitschritt (2.69) bestimmt und der ermittelte Wert in die *Korrektor*-Formel

$$\begin{aligned} \tilde{f}(t_{n+1}) &= \sum_{k=0}^{[\alpha]-1} f_0^{(k)} \frac{t_{n+1}^k}{k!} + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 2)} K(t_{n+1}, \tilde{f}^p(t_{n+1})) \\ &+ \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 2)} \sum_{j=0}^n a_{j,n+1} K(t_j, \tilde{f}(t_j)) \end{aligned} \quad (2.70)$$

eingesetzt. Für die damit bestimmte Näherungslösung von (2.67) wird in [11, S. 8] die folgende Fehlerabschätzung angegeben

$$\max_{j=0,1,\dots,N} |f(t_j) - \tilde{f}(t_j)| = \mathcal{O}(h^p), \quad p = \min(2, 1 + \alpha), \quad (h \rightarrow 0).$$

Zur Anwendung dieses Verfahrens auf allgemeinere lineare fraktionale Differentialgleichungen mit mehreren fraktionalen Termen wird die Gleichung analog zu gewöhnlichen Differentialgleichungen höherer Ordnung in ein System fraktionaler Differentialgleichungen der Form (2.66) überführt. Dies führt im fraktionalen Fall i.A. noch zu einigen Problemen. Die Details dazu sind in [11, Kap. 4] zu finden. Ein Beispiel zu der Überführung in ein System fraktionaler Differentialgleichungen und der Anwendung der Prädiktor-Korrektor-Methode wird in Abschnitt 4 bezogen auf (3.5) angegeben.

Faltungsquadratur Die folgende Methode aus [12, 22] dient zur numerischen Lösung speziell von fraktionalen Anfangswertproblemen der Form

$$\begin{cases} D_*^\alpha f(t) - \sum_{j=1}^l c_j D_*^{\beta_j} f(t) = g(t) & 0 < t \leq T, \\ f^{(k)}(0) = f_0^{(k)}, & k = 0, \dots, m-1 \quad m-1 < \alpha \leq m \end{cases} \quad (2.71)$$

mit $\alpha > \beta_j$ und $c_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, l$. Zur Vereinfachung seien nachfolgend homogene Anfangsbedingungen, d.h. $f^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, \dots, m-1$ angenommen. Durch LAPLACE-Transformation der Differentialgleichung in (2.71) ergibt sich

$$F(s) = \frac{1}{\underbrace{s^\alpha - \sum_{j=1}^l c_j s^{\beta_j}}_{=: \Lambda(s)}} \cdot G(s). \quad (2.72)$$

Die Lösung des Problems erhalten wir durch inverse LAPLACE-Transformation nach (2.42) in Form eines Faltungsintegrals

$$f(t) = \int_0^t \lambda(\tau) g(t - \tau) d\tau, \quad (2.73)$$

wobei die inverse LAPLACE-Transformation λ von Λ allgemein schwierig zu bestimmen ist. Betrachte daher die LAPLACE-Inversionsformel (ähnlich wie in Satz 2.20)

$$\lambda(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{st} \Lambda(s) ds.$$

Für eine Funktion Λ , die analytisch im Sektor $|\arg(s - c)| < \pi - \varphi$ mit $\varphi < \frac{\pi}{2}$, $c \in \mathbb{R}$ ist und dort die Bedingung

$$|\Lambda(s)| \leq M \cdot |s|^{-\gamma}, \quad M < \infty, \quad \gamma > 0$$

erfüllt, kann der Integrationsweg Γ innerhalb dieses Sektors von $\infty \cdot e^{-i(\pi-\varphi)}$ nach $\infty \cdot e^{i(\pi-\varphi)}$ gewählt werden [22, S. 130]. Durch Einsetzen dieser Formel in das Faltungsintegral und Vertauschen der Integrationsreihenfolge erhalten wir

$$\int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Lambda(s) \int_0^t e^{s\tau} g(t - \tau) d\tau ds. \quad (2.74)$$

Durch einfache Rechnung kann überprüft werden, dass das innere Integral die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y'(t) = sy(t) + g(t) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

ist. Dieses Anfangswertproblem kann näherungsweise durch lineare Zeitschrittverfahren beschrieben werden. Betrachte dazu wieder äquidistante Zeitpunkte $t_n = nh$ in $[0, T]$, $n = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{T}{h} \rfloor$ mit dem Zeitschritt h . Die einfachste Möglichkeit eines solchen Verfahrens hat die Form

$$y_0 = 0, \quad \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = sy_n + g(nh), \quad n = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{T}{h} \rfloor$$

mit $y_n = y(nh)$ (Rückwärtsdifferenzen). Multiplikation dieser Gleichung mit ζ^n und Summation über alle n liefert

$$\underbrace{(1 - \zeta)}_{=: \delta(\zeta)} \mathbf{y}(\zeta) = h(s\mathbf{y}(\zeta) + \mathbf{g}(\zeta)) \implies \mathbf{y}(\zeta) = \left(\frac{\delta(\zeta)}{h} - s \right)^{-1} \mathbf{g}(\zeta) \quad (2.75)$$

mit den formalen Reihen $\mathbf{y}(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n \zeta^n$ und $\mathbf{g}(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} g(nh) \zeta^n$. Durch Einsetzen von (2.75) in (2.74) und mithilfe der CAUCHY'schen Integralformel folgt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Lambda(s) = \left(\frac{\delta(\zeta)}{h} - s \right)^{-1} \mathbf{g}(\zeta) ds = \Lambda \left(\frac{\delta(\zeta)}{h} \right) \mathbf{g}(\zeta).$$

Dieser Ausdruck ist auch für Rückwärts-Differenzen-Methoden höherer Ordnung, gegeben durch $\delta(\zeta)$, sinnvoll [22, S. 131], beispielsweise für

$$\delta(\zeta) = \sum_{i=1}^p \frac{1}{i} (1 - \zeta)^i, \quad p \leq 6. \quad (2.76)$$

Bezeichnet man die Reihendarstellung von $\Lambda \left(\frac{\delta(\zeta)}{h} \right)$ mit

$$\Lambda \left(\frac{\delta(\zeta)}{h} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(h) \zeta^n,$$

so folgt mithilfe der CAUCHY-Produkt-Formel

$$\tilde{f}(t_n) = \sum_{k=0}^n w_k(h) g((n-k)h). \quad (2.77)$$

Dabei werden die Gewichte $w_k(h)$, $k = 0, 1, 2, \dots, \lfloor \frac{T}{h} \rfloor$ durch Fast FOURIER Transformation aus $\Lambda \left(\frac{\delta(\zeta)}{h} \right)$ approximiert. Für diese Näherung wird in [22, Thm. 5.2] noch nachfolgende Fehlerabschätzung bewiesen. Bei gegebener rechter Seite $g(t)$ von (2.71) mit homogenen Anfangsbedingungen $f^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, \dots, m-1$ und $g(t) = t^{\gamma-1} \hat{g}(t)$,

sodass $\gamma \in (0, 1)$ und $\widehat{g}(t) \in C^p[0, T]$ mit der Ordnung p aus der Differenzen-Methode (2.76), gilt

$$\left| \widetilde{f}(t_n) - f(t_n) \right| \leq \begin{cases} Cn^{\alpha-1}h^{\alpha-1+\gamma} & 0 < \gamma \leq p, \\ Cn^{\alpha-1+\gamma-p}h^{\alpha-1+\gamma} & p \leq \gamma. \end{cases}$$

Dabei ist C für ein hinreichend kleines h_0 unabhängig von $h \in (0, h_0]$ und $n \in \{1, 2, \dots, \lfloor \frac{T}{h} \rfloor\}$.

Numerische Beispiele Die GRÜN WALD-LETNIKOV-Näherung (GLN), die Prädiktor-Korrektor-Methode mit einfacher Korrektoriteration (PKM) und die Faltungsquadratur mit $p = 2$ (FQ) wurden jeweils in MATLAB implementiert und anhand zweier Beispiele aus [12, Kap. 5] mit bekannten analytischen Lösungen für unterschiedliche Schrittweiten h getestet. Die unten angegebenen Fehler wurden dabei ermittelt durch

$$\text{error} = \left| f(t) - \widetilde{f}(t) \right|.$$

Beispiel 2.43:

a) Betrachte das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} D_*^{1/2} f(t) + f(t) = t^2 + \frac{2}{\Gamma(\frac{5}{2})} t^{\frac{3}{2}} \\ f(0) = 0 \end{cases} \quad (2.78)$$

mit der analytischen Lösung $f(t) = t^2$. Dann liefern die oben angegebenen numerischen Verfahren für $t = 1$ folgende Ergebnisse.

h	error GLN	error PKM	error FQ
0,1	0,0275	0,0203	0,0014
0,05	0,0138	0,0063	$3,58 \cdot 10^{-4}$
0,025	0,0069	0,0021	$8,93 \cdot 10^{-5}$
0,0125	0,0035	0,0007	$2,27 \cdot 10^{-5}$

Tabelle 2.1: Fehler bei der numerischen Lösung des fraktionalen AWP (2.78) durch GRÜN WALD-LETNIKOV-Näherung (GLN), Prädiktor-Korrektor-Methode mit einfacher Korrektoriteration (PKM) und Faltungsquadratur mit $p = 2$ (FQ)

b) Für das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} D^2 f(t) + D_*^{3/2} f(t) + f(t) = t + 1 \\ f(0) = 1 \\ f'(0) = 1 \end{cases} \quad (2.79)$$

lautet die analytische Lösung $f(t) = t + 1$. Die numerischen Lösungen ergeben für $t = 5$ die unten angegebenen Abweichungen.

h	error GLN	error PKM	error FQ
0,1	0,4445	0,0064	$8,9 \cdot 10^{-16}$
0,05	0,5302	0,0022	$4,4 \cdot 10^{-15}$
0,025	0,6719	$7,79 \cdot 10^{-4}$	$3,6 \cdot 10^{-15}$
0,0125	0,8912	$2,73 \cdot 10^{-4}$	$7,1 \cdot 10^{-15}$

Tabelle 2.2: Fehler bei der numerischen Lösung des fraktionalen AWP (2.79) durch GRÜN WALD-LETNIKOV-Näherung (GLN), Prädiktor-Korrektor-Methode mit einfacher Korrekteriteration (PKM) und Faltungsquadratur mit $p = 2$ (FQ)

In Beispiel 2.43 a) ergeben sich aus Tabelle 2.1 die weiter oben beschriebenen Fehlerterme

$$\text{errorGLN} = \mathcal{O}(h), \quad \text{errorPKM} = \mathcal{O}(h^{\frac{3}{2}}), \quad \text{errorFQ} = \mathcal{O}(h^2), \quad (h \rightarrow 0).$$

In Beispiel 2.43 b) liefert die Prädiktor-Korrektor-Methode wieder den erwarteten Fehlerterm $\text{errorPKM} = \mathcal{O}(h^{\frac{3}{2}})$, ($h \rightarrow 0$) und bei der Faltungsquadratur zeigen sich sogar für alle Schrittweiten ähnliche Fehler in der Größenordnung der Maschinengenauigkeit. Bei der Implementierung der GRÜN WALD-LETNIKOV-Näherung scheint allerdings eine Instabilität vorzuliegen, deren Ursache noch nicht geklärt werden konnte. Insgesamt empfehlen die Beispiele eher die Nutzung der Faltungsquadratur und des Prädiktor-Korrektor-Verfahrens.

3 Fraktionales Stoffmodell

Zur Beschreibung des viskoelastischen Verhaltens von Beton wurde als rheologisches Modell eine modifizierte Version des Vier-Parameter-Modells in (1.15) gewählt, welches in Abbildung 3.1 zu sehen ist. Die Kombination eines MAXWELL-Elements mit einem fraktionalem KELVIN-Element stellt dabei eine additive Zerlegung in *Basiskriechen* inklusive der *spontanen Elastizität* (MAXWELL-Element) und *Übergangskriechen* (fraktionales KELVIN-Element) dar. Zudem findet eine Unterteilung in *deviatorischen* und *isotropen* Anteil statt. Dies wird durch Parallelschaltung zweier solcher Modelle realisiert (Abbildung 3.2).

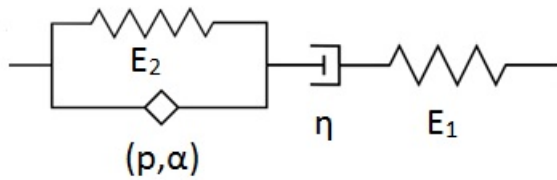


Abbildung 3.1: Modellansatz

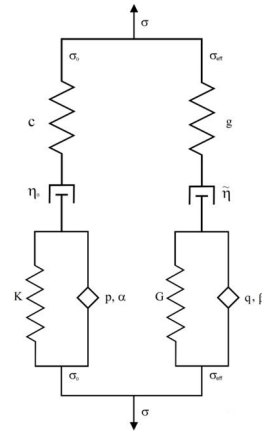


Abbildung 3.2: Viskoeffekte: isotroper und deviatorischer Anteil

Das Modell in Abbildung 3.1 führt zu den Gleichungen

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_{s_1} + \varepsilon_d + \varepsilon_{Kelvin}, & \varepsilon_{Kelvin} &= \varepsilon_{s_2} = \varepsilon_f, \\ \sigma &= \sigma_{s_1} = \sigma_d = \sigma_{Kelvin}, & \sigma_{Kelvin} &= \sigma_{s_2} + \sigma_f. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Dabei stehen die Indizes s , d , f für Feder, Dämpfer und fraktionales Element. Für die einzelnen Komponenten des Modells gelten nach (1.7), (1.8) und (1.12)

$$\varepsilon_{s_1} = \frac{\sigma_{s_1}}{E_1}, \quad \varepsilon_{s_2} = \frac{\sigma_{s_2}}{E_2}, \quad D^1 \varepsilon_d = \frac{\sigma_d}{\eta}, \quad \sigma_f = p D_*^\alpha \varepsilon_f. \quad (3.2)$$

Durch Ableiten der Gleichungen in (3.1) und mit (3.2) erhält man wiederum

$$p D^1 D_*^\alpha \varepsilon_{Kelvin} = D^1 \sigma - E_2 D^1 \varepsilon_{Kelvin}, \quad (3.3)$$

$$D^1 \varepsilon_{Kelvin} = D^1 \varepsilon - \frac{D^1 \sigma}{E_1} - \frac{\sigma}{\eta}. \quad (3.4)$$

Um (3.4) in (3.3) einsetzen zu können, muss $D^1 D_*^\alpha \varepsilon_{Kelvin} = D_*^\alpha D^1 \varepsilon_{Kelvin}$ gelten. Dies ist nach Folgerung 2.35 erfüllt, falls $D^1 \varepsilon_{Kelvin}(0) = \varepsilon_{Kelvin}(0) = 0$ gilt. Die hier betrach-

teten Experimente genügen dieser Bedingung, da die Versuchskonfiguration im Gleichgewicht ist, sodass die Deformation und deren Geschwindigkeit zu Beginn verschwindet. Dies führt schließlich zu der fraktionalen Differentialgleichung

$$pD_*^{1+\alpha}\varepsilon + E_2D^1\varepsilon = \frac{p}{E_1}D_*^{1+\alpha}\sigma + \frac{E_1 + E_2}{E_1}D^1\sigma + \frac{p}{\eta}D_*^\alpha\sigma + \frac{E_2}{\eta}\sigma \quad (3.5)$$

mit homogenen Anfangswerten, d.h.

$$\varepsilon(0) = D^1\varepsilon(0) = 0, \quad \sigma(0) = D^1\sigma(0) = 0. \quad (3.6)$$

Das durch (3.5) und (3.6) gegebene fraktionale Anfangswertproblem wird in den folgenden Abschnitten durch LAPLACE-Transformation nach (2.41) und (2.57) in eine algebraische Gleichung überführt. Dabei sind $\varepsilon^*(s) = \mathcal{L}\{\varepsilon(t)\}(s)$ und $\sigma^*(s) = \mathcal{L}\{\sigma(t)\}(s)$ die LAPLACE-Transformierten von $\varepsilon = \varepsilon(t)$ bzw. $\sigma = \sigma(t)$. Durch Lösung der algebraischen Gleichungen im LAPLACE-Raum und deren geschickte inverse LAPLACE-Transformation werden nachfolgend Lösungen des Anfangswertproblems bei gegebenem Spannungsverlauf $\sigma = \sigma(t)$ (Kriechversuch) bzw. Dehnungsverlauf $\varepsilon = \varepsilon(t)$ (Relaxationsversuch) angegeben.

3.1 Kriechversuch

Sei zunächst $\sigma = \sigma(t)$ ein vorgegebener zeitlicher Spannungsverlauf. Setze

$$\tilde{\varepsilon}(t) = \varepsilon(t) - \frac{\sigma(t)}{E_1}. \quad (3.7)$$

Durch Einsetzen von (3.7) in (3.5) erhalten wir die vereinfachte fraktionale Differentialgleichung

$$pD_*^{1+\alpha}\tilde{\varepsilon} + E_2D^1\tilde{\varepsilon} = D^1\sigma + \frac{p}{\eta}D_*^\alpha\sigma + \frac{E_2}{\eta}\sigma. \quad (3.8)$$

LAPLACE-Transformation von (3.8) und Umstellen nach $\tilde{\varepsilon}^*$ liefert den Ausdruck

$$\tilde{\varepsilon}^*(s) = \underbrace{\left(\frac{1}{p} \frac{1}{s^\alpha + E_2 p^{-1}} + \frac{1}{\eta} \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + E_2 p^{-1}} + \frac{E_2}{\eta p} \frac{s^{-1}}{s^\alpha + E_2 p^{-1}} \right)}_{=:\mu^*(s)} \sigma^*(s). \quad (3.9)$$

Die inverse LAPLACE-Transformation von (3.9) ergibt sich aus Satz 2.24 und mit (3.7) folgt

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \frac{1}{E_1}\sigma(t) + \int_0^t \mu(\tau)\sigma(t-\tau)d\tau, \\ \mu(t) &= \frac{1}{p}t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(-\frac{E_2}{p}t^\alpha\right) + \frac{1}{\eta}E_{\alpha,1}\left(-\frac{E_2}{p}t^\alpha\right) + \frac{E_2}{\eta p}t^\alpha E_{\alpha,1+\alpha}\left(-\frac{E_2}{p}t^\alpha\right). \end{aligned} \quad (3.10)$$

In (3.10) ist $\mu(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mu^*(s)\}(t)$ die invers LAPLACE-Transformierte von $\mu^* = \mu^*(s)$. Beim Betrachten der Gleichung von $\mu = \mu(t)$ wird eine Singularität des ersten Summanden in $t = 0$ deutlich. Unter Verwendung der asymptotischen Näherung (2.34) der MITTAG-LEFFLER-Funktionen folgt für $t \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}\mu(t) &= \frac{1}{p}t^{\alpha-1} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} + \mathcal{O}(t^\alpha) \right) \quad (t \rightarrow 0) \\ &= \frac{1}{p} \frac{t^{-1+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} + \mathcal{O}(t^{-1+2\alpha}) \quad (t \rightarrow 0).\end{aligned}\tag{3.11}$$

Damit ist μ für $\alpha > 0$ integrierbar und die Lösung $\varepsilon = \varepsilon(t)$ existiert für alle Zeiten, wenn $\sigma = \sigma(t)$ entsprechend gewählt wird. (In der Modellierung wird σ stückweise konstant oder linear sein, sodass bei der Integration keine Probleme auftreten.)

3.2 Relaxationsversuch

In ähnlicher Weise, jedoch analytisch etwas anspruchsvoller kann man bei gegebenem zeitlichen Verlauf der Dehnung $\varepsilon = \varepsilon(t)$ die Spannung $\sigma = \sigma(t)$ bestimmen. Aus (3.5) erhält man durch LAPLACE-Transformation und Umstellen nach $\sigma^* = \sigma^*(s)$

$$\sigma^*(s) = \frac{as^{1+\alpha} + bs}{\underbrace{cs^{1+\alpha} + ds + es^\alpha + f}_{=: \nu^*(s)}} \varepsilon^*(s)\tag{3.12}$$

mit den Parametern

$$\begin{aligned}a &= p, & b &= E_2, & c &= \frac{p}{E_1}, \\ d &= \frac{E_1 + E_2}{E_1}, & e &= \frac{p}{\eta}, & f &= \frac{E_2}{\eta}.\end{aligned}\tag{3.13}$$

Zur Bestimmung der inversen LAPLACE-Transformation von $\nu^* = \nu^*(s)$ betrachte man die Umformung (vgl. [27, S. 156f.])

$$\begin{aligned}
 \nu^*(s) &= \frac{as^{1+\alpha} + bs}{cs^{1+\alpha} + ds} \cdot \frac{1}{1 + \frac{es^\alpha + f}{cs^{1+\alpha} + ds}} \\
 &= \frac{ac^{-1}s^\alpha + bc^{-1}}{s^\alpha + c^{-1}d} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{-c^{-1}es^{\alpha-1} + fc^{-1}s^{-1}}{s^\alpha + c^{-1}d} \right)} \\
 &= \frac{ac^{-1}s^\alpha + bc^{-1}}{s^\alpha + c^{-1}d} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{c^{-1}es^{\alpha-1} + fc^{-1}s^{-1}}{s^\alpha + c^{-1}d} \right)^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{ac^{-1}s^\alpha + bc^{-1}}{(s^\alpha + c^{-1}d)^{n+1}} (c^{-1}es^{\alpha-1} + fc^{-1}s^{-1})^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{ac^{-1}s^\alpha + bc^{-1}}{(s^\alpha + c^{-1}d)^{n+1}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{e}{c} \right)^k s^{k(\alpha-1)} \left(\frac{f}{c} \right)^{n-k} s^{-(n-k)} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{f}{c} \right)^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{e}{f} \right)^k \frac{a}{c} \frac{s^{\alpha k - n + \alpha}}{(s^\alpha + c^{-1}d)^{n+1}} \\
 &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{f}{c} \right)^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{e}{f} \right)^k \frac{b}{c} \frac{s^{\alpha k - n}}{(s^\alpha + c^{-1}d)^{n+1}} \\
 &= \frac{a}{c} \left(1 - \frac{c^{-1}d}{s^\alpha + c^{-1}d} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{f}{c} \right)^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{e}{f} \right)^k \frac{a}{c} \frac{s^{\alpha k - n + \alpha}}{(s^\alpha + c^{-1}d)^{n+1}} \\
 &\quad + \frac{b}{c} \frac{1}{s^\alpha + c^{-1}d} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{f}{c} \right)^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{e}{f} \right)^k \frac{b}{c} \frac{s^{\alpha k - n}}{(s^\alpha + c^{-1}d)^{n+1}}.
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Die Konvergenz der in (3.14) gegebenen geometrischen Reihe ist gesichert für

$$\left| \frac{c^{-1}es^{\alpha-1} + fc^{-1}s^{-1}}{s^\alpha + c^{-1}d} \right| < 1.$$

Wegen

$$\left| \frac{c^{-1}es^{\alpha-1} + fc^{-1}s^{-1}}{s^\alpha + c^{-1}d} \right| = \mathcal{O} \left(\frac{1}{\operatorname{Re}(s)} \right) \quad (s \rightarrow \infty)$$

kann die Konvergenzbedingung erfüllt werden, falls $\operatorname{Re}(s)$ nur groß genug ist. Die inverse LAPLACE-Transformation der einzelnen Summanden erhält man wiederum aus Satz 2.24. Nach Satz 2.22 kann die Transformation dann gliedweise erfolgen. Damit folgt für die inverse LAPLACE-Transformation $\nu = \nu(t)$ von $\nu^* = \nu^*(s)$ und (3.12)

$$\begin{aligned}
 \sigma(t) &= \frac{a}{c}\varepsilon(t) + \int_0^t \nu(\tau)\varepsilon(t-\tau)d\tau \\
 \nu(t) &= \frac{a}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{f}{c}\right)^n \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{e}{f}\right)^k t^{\alpha(n-k)+n-1} E_{\alpha, n-\alpha k}^{(n)} \left(-\frac{d}{c}t^\alpha\right) \\
 &\quad + \frac{b}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{f}{c}\right)^n \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{e}{f}\right)^k t^{\alpha(n-k+1)+n-1} E_{\alpha, n-\alpha(k-1)}^{(n)} \left(-\frac{d}{c}t^\alpha\right) \\
 &\quad + \frac{bc-ad}{c^2} t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha} \left(-\frac{d}{c}t^\alpha\right).
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Die Konvergenz der Reihen in (3.15) folgt explizit aus Aussage 2.16. Außerdem ergibt Satz 2.22 wegen der absoluten Konvergenz von (3.14) auch die Konvergenz von (3.15) und sichert zudem, dass die Reihendarstellung von ν auch tatsächlich die inverse LAPLACE-Transformation der Reihendarstellung von ν^* in (3.14) ist.

Bezüglich der Integrierbarkeit von ν müssen die Singularitäten in $t = 0$ betrachtet werden. Solche Singularitäten treten allerdings lediglich bei dem letzten Summanden von ν auf. Dabei folgt mit (2.34)

$$\begin{aligned}
 \nu(t) &= \frac{bc-ad}{c^2} t^{\alpha-1} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} + \mathcal{O}(t^\alpha) \right) \quad (t \rightarrow 0) \\
 &= \frac{bc-ad}{c^2} \frac{t^{-1+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} + \mathcal{O}(t^{-1+2\alpha}) \quad (t \rightarrow 0).
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Folglich ist ν für $\alpha > 0$ integrierbar und die Lösung $\sigma = \sigma(t)$ existiert für alle Zeiten, wenn $\varepsilon = \varepsilon(t)$ entsprechend gewählt wird. (Auch ε wird im Modell stückweise konstant oder linear sein.)

4 Vergleich mit experimentellen Werten

Um den Wert des oben beschriebenen Modells einschätzen zu können, wurden experimentelle Ergebnisse aus den Kriechversuchen BGR 05019 [34], iBMB-10d [24], IfG 414-K-M2-1-56-8 [42] und IfG-M2-TCC 1, 2, 3, 5 [43] sowie aus dem Relaxationsversuch BGR 05020 [35] verwendet. Die Modell-Implementierung, deren Anwendung auf die gegebenen Daten sowie eine Auswertung der Ergebnisse werden nachfolgend vorgenommen.

4.1 Implementierung

Die Gleichungen (3.10) und (3.15) wurden mithilfe von MATLAB implementiert um die Ergebnisse der Modellierung mit experimentellen Werten aus Kriech- und Relaxationsversuchen zu vergleichen. Der eigenständig implementierte Code ist im Anhang zu finden. Bei der Umsetzung sind folgende Dinge zu beachten:

- Die in den Experimenten realisierten Spannungsstufen bei den Kriechversuchen wurden bei der Implementierung als Zusammensetzung von HEAVISIDE-Sprungfunktionen dargestellt, da die Zeitintervalle der Spannungserhöhung zwischen zwei Stufen im Verhältnis zur Gesamtversuchszeit relativ kurz waren. Bei dem betrachteten Relaxationsversuch waren die Übergangszeiten zwischen den einzelnen Stufen konstanter Dehnung deutlich höher. Daher wurde der zeitliche Dehnungsverlauf als Zusammensetzung stückweise linearer bzw. konstanter Funktionen approximiert.
- Zur numerischen Bestimmung der Funktionswerte der MITTAG-LEFFLER-Funktionen wurde die Funktion `ml.m` beschrieben in [14] verwendet. Die Ableitungen der MITTAG-LEFFLER-Funktionen wurden durch die in Satz 2.5 angegebene Rekursionsformel bestimmt. Diese Formel wurde in `deriveml.m` implementiert.
- In der Funktion `eps_modell.m` kann unter Vorgabe einer beliebigen Funktion für $\sigma(t)$ zu einem Array t von Zeitpunkten sowie der Parameter $\alpha, E_1, E_2, p, \eta$ der zeitliche Verlauf $\varepsilon(t)$ bestimmt werden. Zur numerischen Integration wurde hierbei die MATLAB-Funktion `integral.m` verwendet. Da die Funktion μ eine schwache Singularität in 0 besitzt (vgl. (3.11)), musste bei der Implementierung des Integrals eine Methode zur Integration mit Singularitäten (vgl. [38, Kap. 3.7 (3)]) verwendet werden. Dabei wird das Integral folgendermaßen aufgespalten.

$$\int_0^t \mu(\tau)\sigma(t-\tau)d\tau = \int_0^\delta \mu(\tau)\sigma(t-\tau)d\tau + \int_\delta^t \mu_1(\tau)\sigma(t-\tau)d\tau \quad \delta > 0$$

Bei dem zweiten Summanden auf der rechten Seite liegt die Singularität außerhalb des Integrationsintervalls und es muss bei der numerischen Integration keine Besonderheit

beachtet werden. Beim ersten Summanden wird einerseits berücksichtigt, dass σ eine Stufenfunktion ist und in den gegebenen Experimenten für hinreichend kleines δ gilt

$$\sigma(t - \tau) = \sigma(t) \quad \forall \tau \in (0, \delta).$$

Andererseits kann μ für kleine δ mithilfe von (2.14) durch (3.11) abgeschätzt werden.

$$\begin{aligned} \int_0^\delta \mu(\tau) \sigma(t - \tau) d\tau &= \sigma(t) \int_0^\delta \left(\frac{1}{p} \frac{\tau^{-1+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} + \mathcal{O}(\tau^{-1+2\alpha}) \right) d\tau \\ &= \sigma(t) \left(\frac{1}{p} \frac{\delta^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \mathcal{O}(\delta^{2\alpha}) \right) \end{aligned}$$

Die in den Kriechversuchen gegebenen Spannungen $\sigma = \sigma(t)$ und die ermittelten Parameterwerte für p aus den Kurvenanpassungen liefern

$$\frac{1}{p} \frac{\sigma(t)}{\Gamma(1+\alpha)} \leq 10^{-3} d^{-\alpha} \quad \forall t > 0 \quad \forall \alpha \in (0, 1).$$

Weiterhin wurden für den Parameter α in allen Anpassungen Werte von $\alpha > 2 \cdot 10^{-1}$ ermittelt. In der Implementierung wurde $\delta = 1 \cdot 10^{-10} d$ als untere Integrationsgrenze gesetzt. Damit liegt der Wert von $\int_0^\delta \mu(t) \sigma(t - \tau) d\tau$ in der Größenordnung 10^{-5} , sodass $\int_0^\delta \mu(t) \sigma(t - \tau) d\tau$ vernachlässigt werden kann.

Des Weiteren wurden zwei numerische Verfahren aus Abschnitt 2.4.3 zur Lösung von (3.5) in Anwendung auf Kriechversuche in `eps_num_wfft.m` und `eps_num_pc.m` implementiert und mit den Ergebnissen von `eps_modell.m` verglichen.

- In der Funktion `sigma_modell.m` kann unter Vorgabe einer Funktion $\varepsilon = \varepsilon(t)$ und eines Arrays t von Zeiten sowie der gleichen Parameter $\alpha, E_1, E_2, p, \eta$ das Modell einer Relaxationskurve $\sigma(t)$ ermittelt werden. Für die Integration ist dabei dieselbe Näherung wie in `eps_modell.m` anwendbar. Zudem wurde versucht, die in (3.15) befindlichen unendlichen Reihen durch endliche Summen bis zu einem gewissen Reihenglied abzuschätzen. Aufgrund der hohen Rechenzeit konnte allerdings nur eine Näherung bis zum Reihenglied $N = 2$ bestimmt werden. Die damit errechneten Werte werden mit den Ergebnissen der Methoden aus Abschnitt 2.4.3 verglichen, die in `sigma_num_wfft.m`, `sigma_num_pc.m` und `sigma_num_cq.m` implementiert wurden.
- Die MATLAB-Funktion `lsqcurvefit.m` wurde zur Parameterbestimmung von $\alpha, E_1, E_2, p, \eta$ durch nichtlineare Kleinste-Quadrate-Anpassung des Modells an experimentelle Ergebnisse aus den Kriechversuchen verwendet und die gefundenen Parameterwerte auf den Relaxationsversuch angewandt. Bei der Parameteranpassung wurden die experimentellen Werte der Deformation sowie der Deformationsgeschwindigkeit aus allen angegebenen Kriechversuchen berücksichtigt.

4.2 Vorbereitung experimenteller Werte

Die experimentellen Werte aus den Kriechversuchen BGR 05019, iBMB-10d, IfG 414-K-M2-1-56-8 und dem Relaxationsversuch BGR 05020 wurden zunächst zur besseren Verwertbarkeit an eine glatte Funktion angepasst. Das Ziel war dabei eine geglättete Beschreibung des gemessenen Verlaufs, ohne dabei durch die Modellwahl großen Einfluss auf das gemessene Verhalten zu nehmen. Im Anschluss wurden die angepassten Messwerte dem Modell entsprechend vorbereitet, wie nachfolgend beschrieben wird.

In den BGR-Versuchen wurde auf das Versuchsmaterial ein bekannter axialsymmetrischer *Manteldruck* p_c (in der $x_1 - x_2$ -Ebene) sowie ein *Axialdruck* p_{ax} (in x_3 -Richtung) ausgeübt. Dies entspricht den zugehörigen Spannungswerten

$$\sigma_c = -p_c, \quad \sigma_{ax} = -p_{ax}. \quad (4.1)$$

Der sich ergebende Spannungstensor hat dann die Form

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_c & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_c & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{ax} \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Das fraktionale Modell kann nun einzeln auf den *isotropen Spannungsanteil* σ_K und die *Deviatorspannung* $\boldsymbol{\sigma}_D$ (Abbildung 3.2), die sich wie folgt bestimmen lassen, angewandt werden.

$$\sigma_K = \frac{1}{3}(2\sigma_c + \sigma_{ax}) \quad \boldsymbol{\sigma}_D = \boldsymbol{\sigma} - \sigma_K \mathbf{I} = \frac{1}{3}(\sigma_c - \sigma_{ax}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Die im Experiment ermittelten Spannungswerte sind dabei σ_K sowie die *Vergleichsspannung* nach VON MISES $\sigma_V = |\sigma_c - \sigma_{ax}|$, die sich aus $\boldsymbol{\sigma}_D$ ergibt.

Analog erhält man für die Anteile ε_K und ε_D des Verzerrungstensors

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_r & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_r & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{ax} \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

mit der Radialdehnung ε_r und der Axialdehnung ε_{ax}

$$\varepsilon_K = 2\varepsilon_r + \varepsilon_{ax}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_D = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3}\varepsilon_K \mathbf{I} = \frac{1}{3}(\varepsilon_r - \varepsilon_{ax}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Bei den betrachteten Versuchen wurden allerdings nur die Werte von ε_{ax} und nicht von ε_r bestimmt. Für den Kriechversuch BGR 05019 werden (4.3) und (4.5) in (3.10) eingesetzt und man erhält die beiden Gleichungen

$$2\varepsilon_r(t) + \varepsilon_{ax}(t) = \frac{\sigma_K(t)}{E_1} + \int_0^t \mu(\tau)\sigma_K(t-\tau)d\tau, \quad (4.6)$$

$$\varepsilon_r(t) - \varepsilon_{ax}(t) = \frac{\sigma_V(t)}{E_1} + \int_0^t \mu(\tau)\sigma_V(t-\tau)d\tau. \quad (4.7)$$

Aus (4.6) und (4.7) lässt sich ε_r eliminieren und es folgt

$$\varepsilon_{ax}(t) = \frac{1}{3} \left(\frac{\sigma_K(t) - 2\sigma_V(t)}{E_1} + \int_0^t \mu(\tau)(\sigma_K(t-\tau) - 2\sigma_V(t-\tau))d\tau \right). \quad (4.8)$$

Analog setzt man beim Relaxationsversuch (4.3) und (4.5) in (3.15) ein. Im Versuch BGR 05020 ist $\sigma_c = 0$. Dadurch vereinfachen sich die Gleichungen und man erhält nach Eliminierung von ε_r

$$\sigma_{ax}(t) = \frac{9}{7} \left(E_1\varepsilon_{ax}(t) + \int_0^t \nu(t)\varepsilon_{ax}(t-\tau)d\tau \right). \quad (4.9)$$

Demzufolge können die Wertepaare $(\varepsilon_{ax}(t), \frac{\sigma_K(t)-2\sigma_V(t)}{3})$ bzw. $(\sigma_{ax}(t), \frac{9}{7}\varepsilon_{ax}(t))$ auch in die numerischen Methoden aus Abschnitt 2.4.3 angewandt auf (3.5) eingesetzt werden.

Die IfG-Kriechversuche sind isotrope Druck- (IfG 414-K-M2-1-56-8) bzw. Zugversuche (IfG-M2-TCC), bei denen die prozentuale Volumendehnung ε_V bestimmt wurde. Dabei hat der Verzerrungstensor die Form

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{ax} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{ax} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{ax} \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_{ax} = \frac{1}{3}\varepsilon_V.$$

Die für die Versuche angegebene Spannung σ ist dabei für alle Raumrichtungen gleich groß, sodass ε_{ax} in die Gleichung (3.10) eingesetzt werden kann.

Bei dem uniaxialen Zugversuch iBMB-10d können die angegebenen Messwerte der Dehnung ε schließlich direkt in (3.10) eingesetzt werden, da sich die Spannungs- und Verzerrungstensoren in diesem Versuch zu skalaren Größen vereinfachen.

4.3 Ergebnisse

4.3.1 Kriechversuche

Bei der Bestimmung der Parameter des fraktionalen Modells aus der Anpassung an die angegebenen Kriechversuche wurden die Werte

$$\begin{aligned} \alpha &= 0,4870, & E_1 &= 5,9580 \text{ GPa}, & E_2 &= 3,7671 \text{ GPa}, \\ p &= 36,2191 \text{ GPa} \cdot d^\alpha, & \eta &= 6,7521 \cdot 10^3 \text{ GPa} \cdot d \end{aligned} \quad (4.10)$$

ermittelt. Beim Einsetzen dieser Parameter in (3.10) bzw. in `eps_modell.m` wurden zeitliche Dehnungsverläufe berechnet, deren Anstiege für alle betrachteten Kriechversuche gute Übereinstimmungen mit den experimentellen Ergebnissen zeigen. Im Nachhinein wurde für die einzelnen Versuche der Parameter E_1 , der lediglich eine Verschiebung der Dehnungs-Zeit-Diagramme bezüglich der Ordinate bewirkt, neu angepasst. In der nachfolgenden Tabelle sind die ermittelten Werte für E_1 zusammen mit dem jeweiligen *wirksamen Betonalter* t_{eff} zu Versuchsbeginn dargestellt. Bei der Bestimmung des wirksamen Betonalters wird berücksichtigt, dass die Hydratation des Betons bei höheren Lagerungstemperaturen schneller erfolgt. Das wirksame Betonalter entspricht gerade dann dem wahren Betonalter, wenn der Beton durchgängig bei 20°C gelagert wurde [2, S. 9 + S. 60].

Versuch	t_{eff} [d]	E_1 [GPa]
iBMB-10d	10	2,85
IfG-414-K-M2-1-56-8	56	14,4
IfG-M2-TCC 1 + 2	ca. 600	15,3
IfG-M2-TCC 3 + 5	ca. 600	3,5
BGR 05019	ca. 800	6,35

Tabelle 4.1: Parameterwerte von E_1 für die Kriechversuche in Abhängigkeit vom Betonalter

Wünschenswert wäre ein erkennbarer Zusammenhang zwischen wirksamem Betonalter und dem Wert von E_1 . Dieser ist allerdings anhand der gegebenen Werte nicht zu erkennen, da in Anwendung des fraktionalen Modells selbst Versuche des gleichen wirksamen Alters stark unterschiedliche Werte in E_1 aufweisen. Basierend auf der Hydratation von Beton wird eine Zunahme der Steifigkeit E_1 bei höherem wirksamem Betonalter zu Versuchsbeginn erwartet. Diese Entwicklung ist in den ersten drei Zeilen in Tabelle 4.1 auch zu sehen. Eine Ursache für die niedrigeren Werte von E_1 in den beiden letzten Zeilen der Tabelle könnte bei den unterschiedlichen Versuchsbedingungen liegen. Während die Betonproben bei den Versuchen iBMB-10d und IfG-414-K-M2-56-8 im Labor gemischt wurden, sind die IfG-TCC- und BGR-Versuche an Bohrkernen aus Versuchsbauwerken

durchgeführt worden. Die Größe der Maschinen zur Betonherstellung untertage führt dabei zu einer stärkeren Heterogenität des Versuchsmaterials und einer ortsabhängigen Steifigkeit des Betons innerhalb des Bauwerks, während unter Laborbedingungen deutlich kleinere, homogenere Proben hergestellt werden können.

Die Graphen des zeitlichen Dehnungs- und Dehnungsgeschwindigkeitsverlaufs aus Experiment und Modell werden für die einzelnen Kriechversuche in den Abb. 4.1 - 4.5 gegenübergestellt. Bei den IfG-M2-TCC-Versuchen ist noch zu beachten, dass die Versuche 1 und 2 bzw. 3 und 5 jeweils mit gleichem Spannungsverlauf bei Beton gleichen Alters durchgeführt wurden, sodass für die zeitlichen Dehnungsverläufe jeweils Mittelwerte der Ergebnissen aus 1 und 2 bzw. 3 und 5 betrachtet werden.

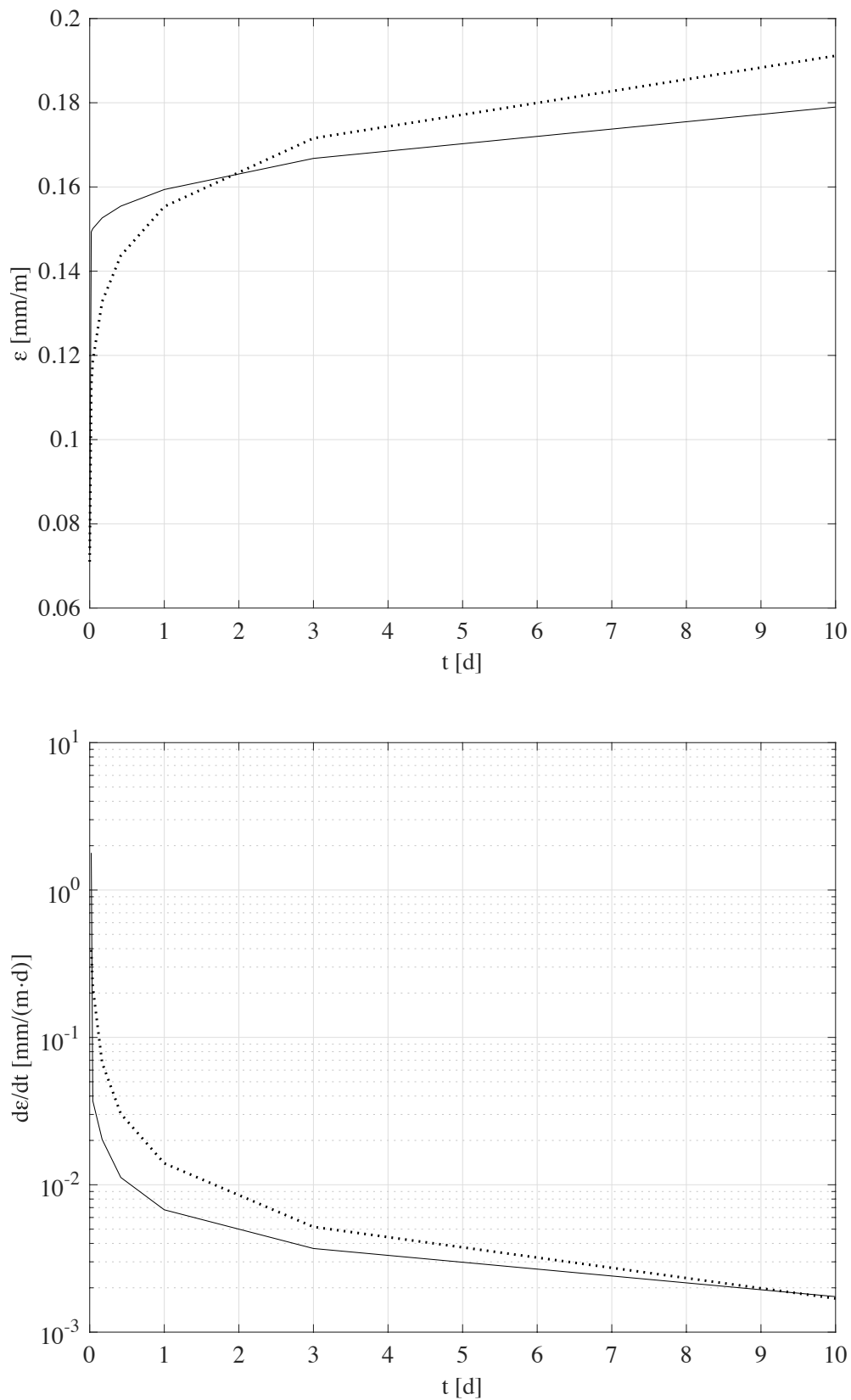


Abbildung 4.1: Dehnung (oben) und Dehnungsgeschwindigkeit (unten) über der Zeit für experimentelle Ergebnisse aus dem Versuch iBMB-10d (gepunktete Linie) und der Parameteranpassung des fraktionalen Modells für $E_1 = 2,85\text{GPa}$ (durchgezogene Linie)

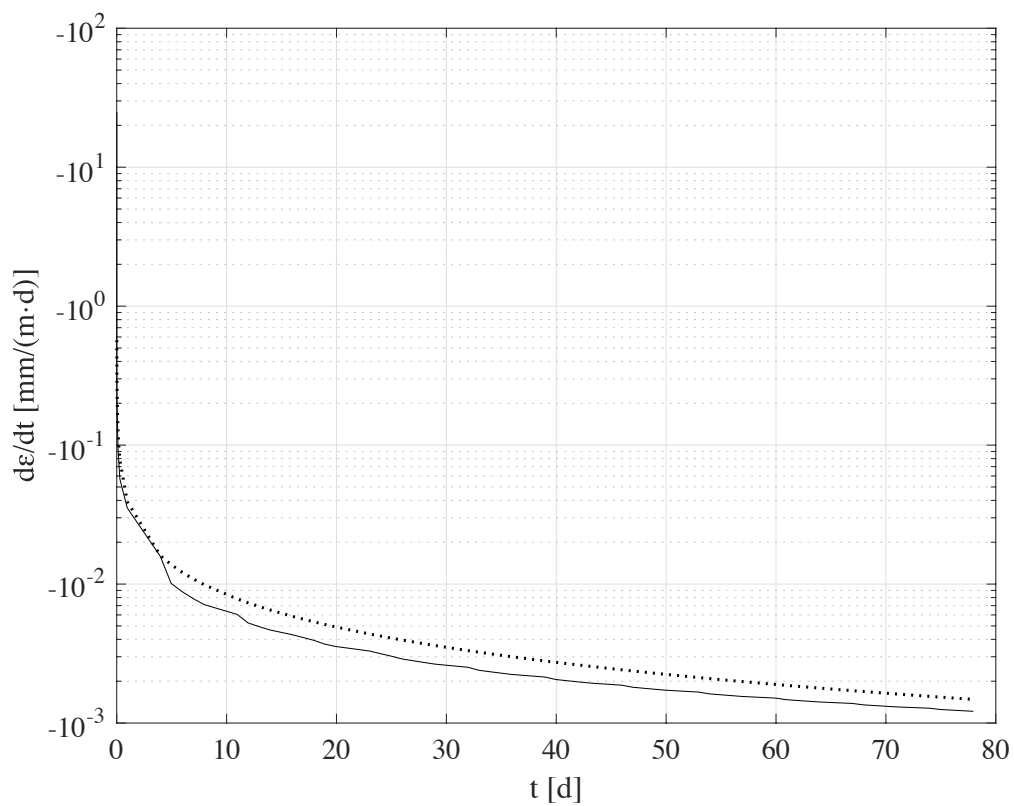
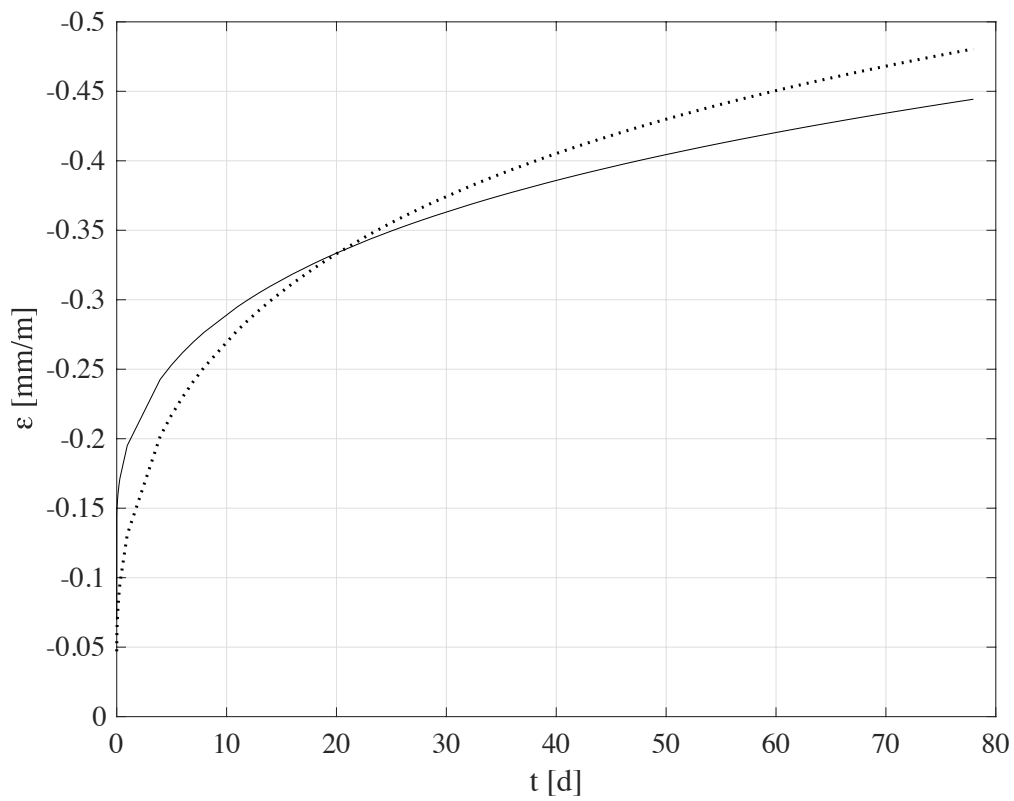


Abbildung 4.2: Dehnung (oben) und Dehnungsgeschwindigkeit (unten) über der Zeit für experimentelle Ergebnisse aus dem Versuch IfG 414-K-M2-1-56-8 (gepunktete Linie) und der Parameteranpassung des fraktionalen Modells für $E_1 = 14,4\text{GPa}$ (durchgezogene Linie)

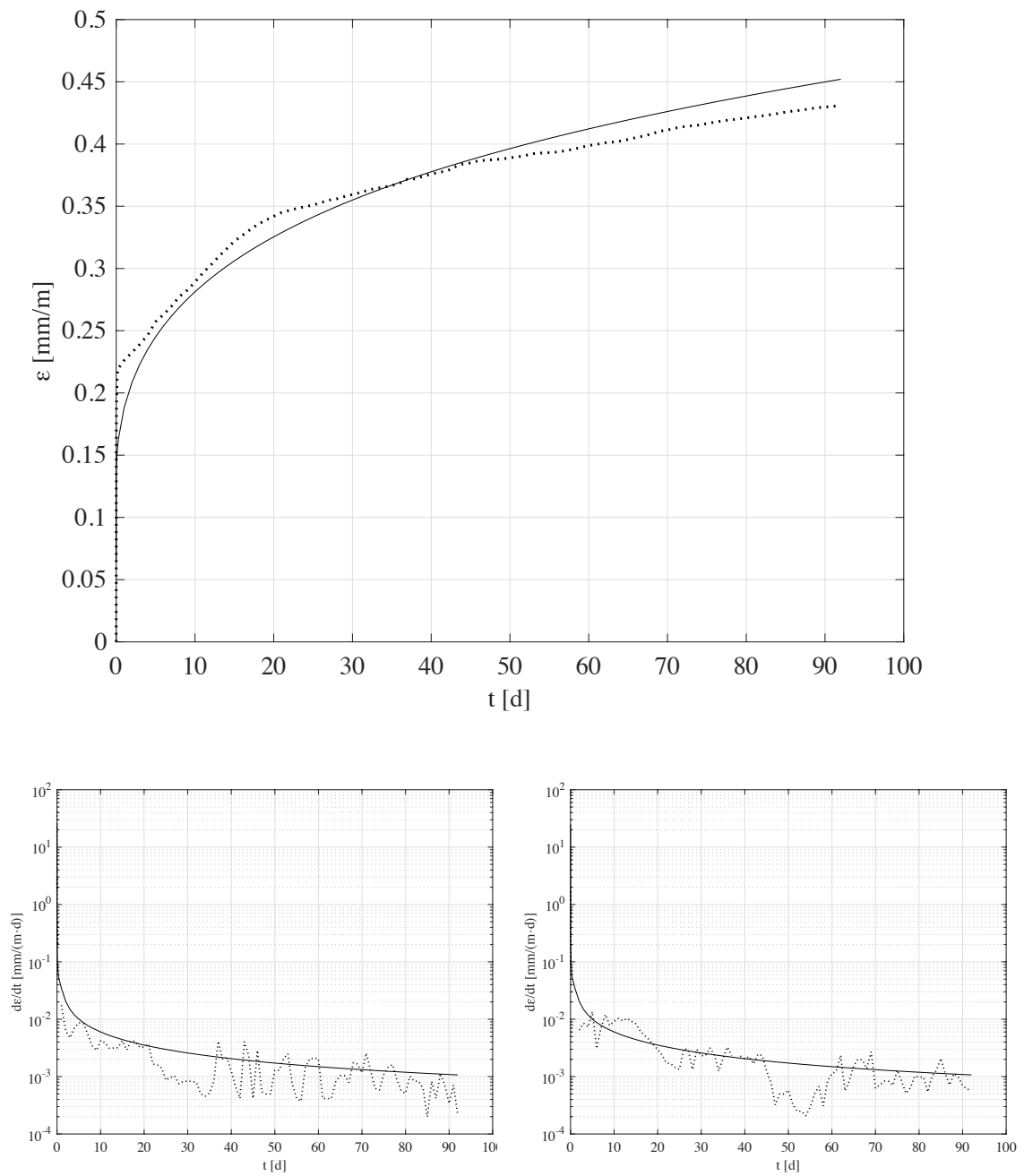


Abbildung 4.3: Dehnung (oben) und Dehnungsgeschwindigkeit (unten links TCC 1, rechts TCC 2) über der Zeit für experimentelle Ergebnisse aus den Versuchen IfG-M2-TCC 1 und 2 (gepunktete Linie) und der Parameteranpassung des fraktionalen Modells für $E_1 = 15,3\text{GPa}$ (durchgezogene Linie)

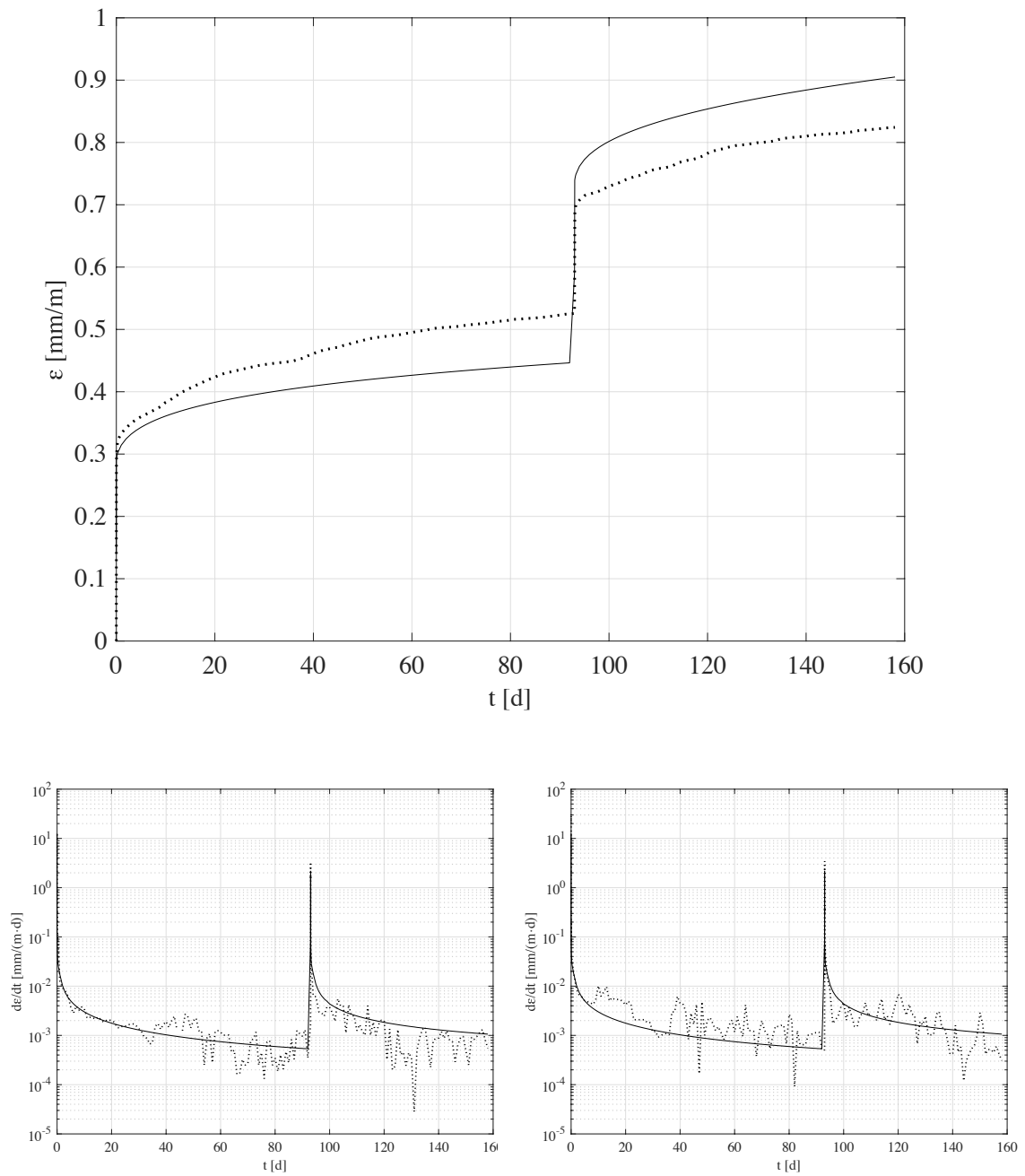


Abbildung 4.4: Dehnung (oben) und Dehnungsgeschwindigkeit (unten links TCC 3, rechts TCC 5) über der Zeit für experimentelle Ergebnisse aus den Versuchen IfG-M2-TCC 3 und 5 (gepunktete Linie) und der Parameteranpassung des fraktionalen Modells für $E_1 = 3,5 \text{ GPa}$ (durchgezogene Linie)

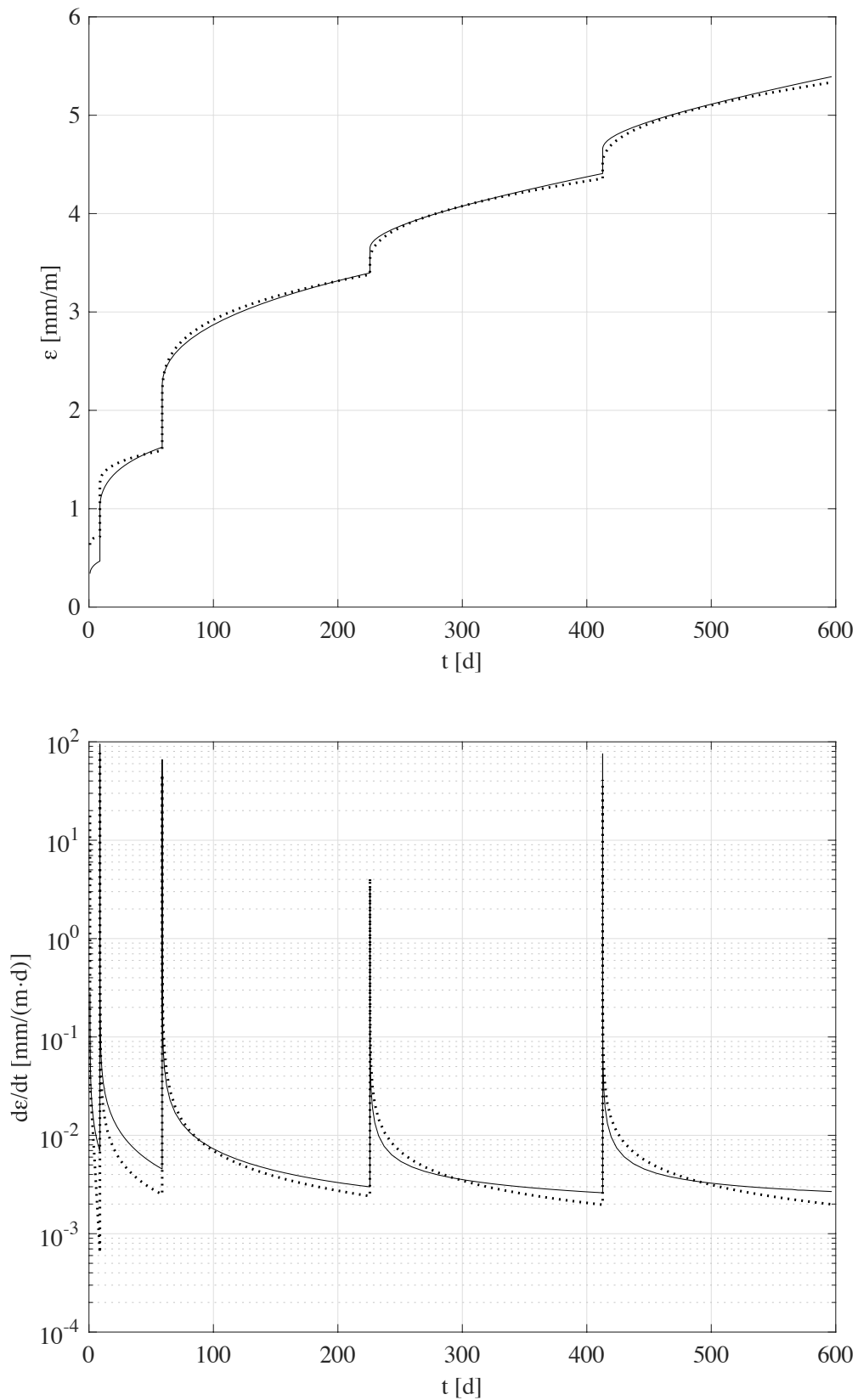


Abbildung 4.5: Dehnung (oben) und Dehnungsgeschwindigkeit (unten) über der Zeit für experimentelle Ergebnisse aus dem Versuch BGR 05019 (gepunktete Linie) und der Parameteranpassung des fraktionalen Modells für $E_1 = 6,35\text{GPa}$ (durchgezogene Linie)

Insgesamt stimmen die experimentellen Ergebnisse mit dem Modell bezüglich E_1 aus Tabelle 4.1 und den restlichen Parametern aus (4.10) für alle Kriechversuche gut überein. Zur genaueren Analyse werden die mittlere absolute Abweichung $\bar{\Delta}_{abs}$ und die mittlere relative Abweichung $\bar{\Delta}_{rel}$ für die einzelnen Versuche in Tabelle 4.2 betrachtet.

Versuch	$\bar{\Delta}_{abs}$ [mm/m]	$\bar{\Delta}_{rel}$ [%]
iBMB-10d	0,0154	10,24
IfG-414-K-M2-1-56-8	0,0307	12,81
IfG-M2-TCC 1 + 2	0,0150	6,37
IfG-M2-TCC 3 + 5	0,0613	11,56
BGR 05019	0,0970	14,97

Tabelle 4.2: Absolute und relative Abweichung bei der Anpassung des Modells an die Kriechversuche bezüglich des zeitlichen Dehnungsverlaufs

Die experimentellen Werte der IfG-M2-TCC-Versuche wurden ohne vorherige Glättung verwendet. Es sind in Abbildung 4.3 und 4.4 gute Anpassungen des Modells an die Dehnungsverläufe zu erkennen, allerdings fluktuieren die ermittelten Dehnungsgeschwindigkeiten sehr stark um das Modellergebnis. Um einen Vergleich des fraktionalen Modells zu den klassischen rheologischen Modellen herzustellen, wurde für den Dehnungsverlauf des Versuchs BGR 05019 auch eine Parameteranpassung für ein Modell mit einem klassischen Dämpferelement mit Viskosität η' anstelle des fraktionalen Elementes im KELVIN-Teil durchgeführt. Dabei wurden die Parameter

$$\begin{aligned}
 E_1 &= 5,7320 \text{ GPa}, & E_2 &= 7,6978 \text{ GPa}, \\
 \eta &= 3,4914 \cdot 10^3 \text{ GPa} \cdot d, & \eta' &= 11,8069 \text{ GPa} \cdot d
 \end{aligned}
 \tag{4.11}$$

ermittelt. Die zugehörige Kurvenanpassung ist in Abbildung 4.6 zu sehen. Dabei ergeben sich Abweichungen zu den experimentellen Daten von

$$\bar{\Delta}_{abs} = 0,1557 \text{ mm/m} \qquad \bar{\Delta}_{rel} = 9,79\%.$$

Diese Abweichungen liegen in der gleichen Größenordnung wie die Abweichungen des fraktionalen Modells von den Versuchsdaten aus BGR 05019. Allerdings ist in Abbildung 4.6 eine qualitativ deutlich schlechtere Anpassung der Dehnungsgeschwindigkeit im Vergleich zu Abbildung 4.5 zu erkennen.

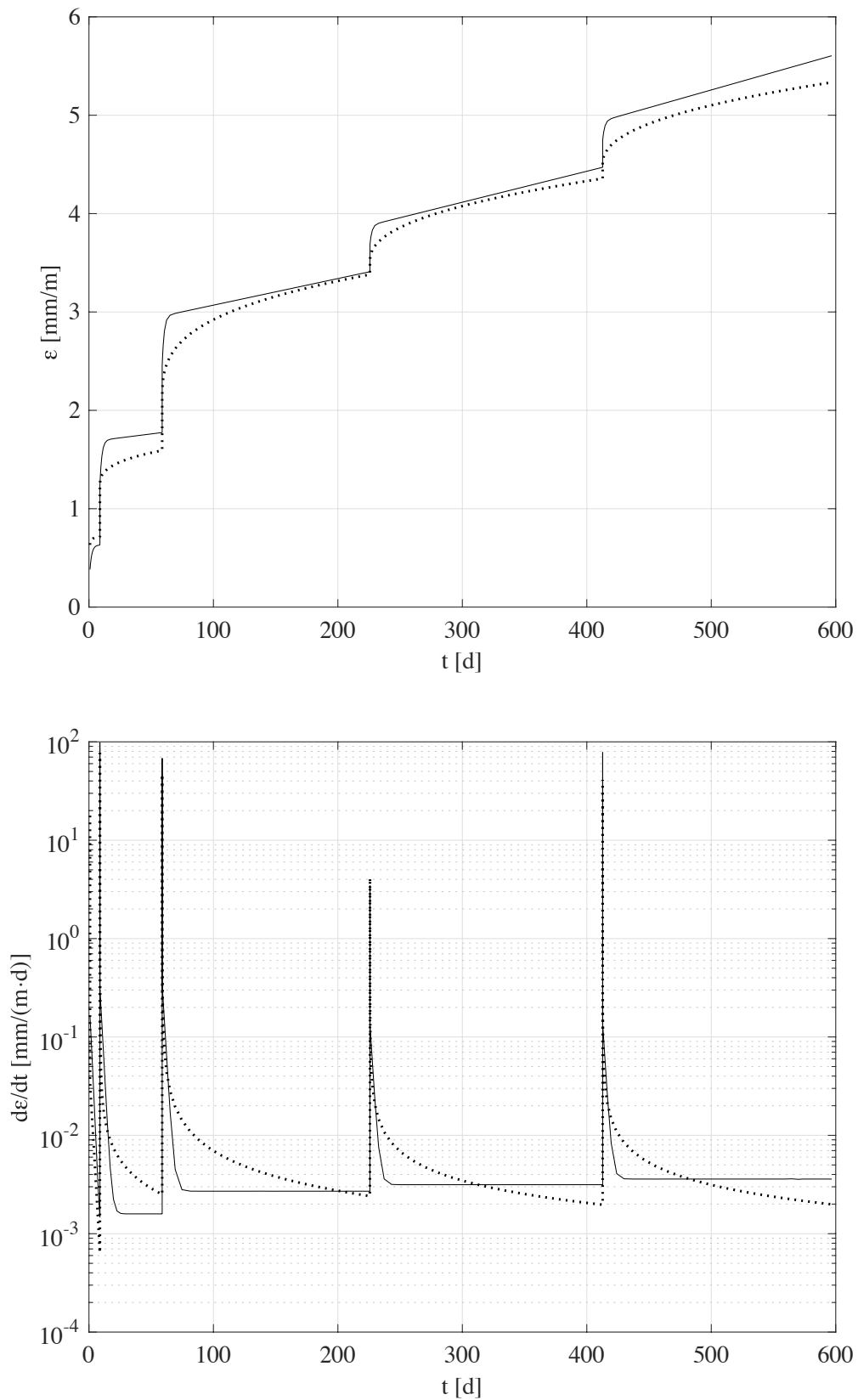


Abbildung 4.6: Dehnung (oben) und Dehnungsgeschwindigkeit (unten) über der Zeit für experimentelle Ergebnisse aus dem Versuch BGR 05019 (gepunktete Linie) und der Parameteranpassung des klassischen Modells (durchgezogene Linie)

Zur Evaluation der numerischen Verfahren aus Abschnitt 2.4.3 werden diese bezüglich der Parameter (4.10) und des Spannungsverlaufs aus dem Versuch BGR 05019 ausgewertet und mit den Ergebnissen der Berechnung mittels `eps_modell.m` verglichen. Zu den einzelnen Verfahren werden nachfolgend noch einige Bemerkungen gemacht. Die GRÜN WALD-LETNIKOV-Näherung liefert bei Anwendung auf (3.5) die Gleichung

$$\begin{aligned}
 & ph^{-(1+\alpha)} \sum_{j=0}^n w_j^{(1+\alpha)} \varepsilon(t-jh) + E_2 \frac{\varepsilon(t) - \varepsilon(t-h)}{h} \\
 &= \frac{p}{E_1} h^{-(1+\alpha)} \sum_{j=0}^n w_j^{(1+\alpha)} \sigma(t-jh) + \frac{E_1 + E_2}{E_1} \cdot \frac{\sigma(t) - \sigma(t-h)}{h} \\
 &+ \frac{p}{\eta} h^{-\alpha} \sum_{j=0}^n w_j^{(\alpha)} \sigma(t-jh) + \frac{E_2}{\eta} \sigma(t).
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Betrachtet wird nun der bei Kriechversuchen gegebene Spannungsverlauf $\sigma = \sigma(t)$ zu den diskreten Zeiten $\{t_k\}_{k=0, \dots, N} \subset [0, T]$ mit Schrittweite h in $N = \lfloor \frac{T}{h} \rfloor$ Zeitschritten, d.h. $t_k = kh$, $k = 0, \dots, N$. Dann erhält man aus (4.12) durch Umstellen die Werte $\varepsilon_k := \varepsilon(t_k)$ der Dehnung nach dem k -ten Zeitschritt ($k = 0, \dots, N$) durch

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_0 &= \varepsilon_1 = \varepsilon(0), \\
 \varepsilon_k &= \frac{1}{p + E_2 h^\alpha} \left[-p \sum_{j=1}^k w_j^{(1+\alpha)} \varepsilon_{k-j} + E_2 h^\alpha \varepsilon_{k-1} + \frac{p}{E_1} \sum_{j=0}^k w_j^{(1+\alpha)} \sigma((k-j)h) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{E_1 + E_2}{E_1} h^\alpha (\sigma(kh) - \sigma((k-1)h)) + \frac{p}{\eta} h \sum_{j=0}^k w_j^{(\alpha)} \sigma((k-j)h) + \frac{E_2}{\eta} h^{1+\alpha} \sigma(kh) \right], \\
 k &= 2, \dots, N.
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Das Verfahren (4.13) ist in der Funktion `eps_num_wfft.m` implementiert. Des Weiteren wurde das Prädiktor-Korrektor-Verfahren zur Anwendung auf (3.5) zur Ermittlung von Kriechkurven in `eps_num_pc.m` implementiert. Dazu musste (3.5) noch in das folgende fraktionale Differentialgleichungssystem überführt werden.

$$\begin{cases} D^1 \varepsilon_1 = \varepsilon_2 & \varepsilon_1(0) = 0, \\ D_*^\alpha \varepsilon_2 = \frac{1}{p} \left(\frac{p}{E_1} D_*^{1+\alpha} \sigma + \frac{E_1 + E_2}{E_1} D^1 \sigma + \frac{p}{\eta} D_*^\alpha \sigma + \frac{E_2}{\eta} \sigma - E_2 \varepsilon_2 \right) & \varepsilon_2(0) = 0 \end{cases} \tag{4.14}$$

Die Gleichungen in (4.14) haben die Form (2.66) und können sukzessiv mittels (2.70) gelöst werden. Man erhält schließlich die numerische Lösung $\varepsilon = \varepsilon_1$.

Die beiden angegebenen Verfahren wurden auf den Versuch BGR 05019 angewandt. Die zugehörigen Ergebnisse sind in Abbildung 4.7 zu sehen. Dabei ist eine deutliche Übereinstimmung mit den Ergebnissen basierend auf (3.10) zu beobachten. Hierbei muss

allerdings erwähnt werden, dass beide Verfahren sehr stark von der Schrittweite h abhängig sind. Wird die Schrittweite zu klein gewählt, so kommt es ab einem gewissen Zeitpunkt zum Abflachen der Kurven gegenüber den Modell-Ergebnissen. Dies ist möglicherweise auf Auslöschung in (4.13) und (2.70) zurückzuführen. Zudem erzielt die GRÜNWARD-LETNIKOV-Näherung für Schrittweiten $h > 0,1d$ bei Vorgabe von Anfangswerten $\varepsilon(0) > 0$ bessere Ergebnisse. Die Wahl der Anfangswerte erfolgt jedoch lediglich im Sinne einer guten Anpassung und folgt keinem physikalischen Prinzip.

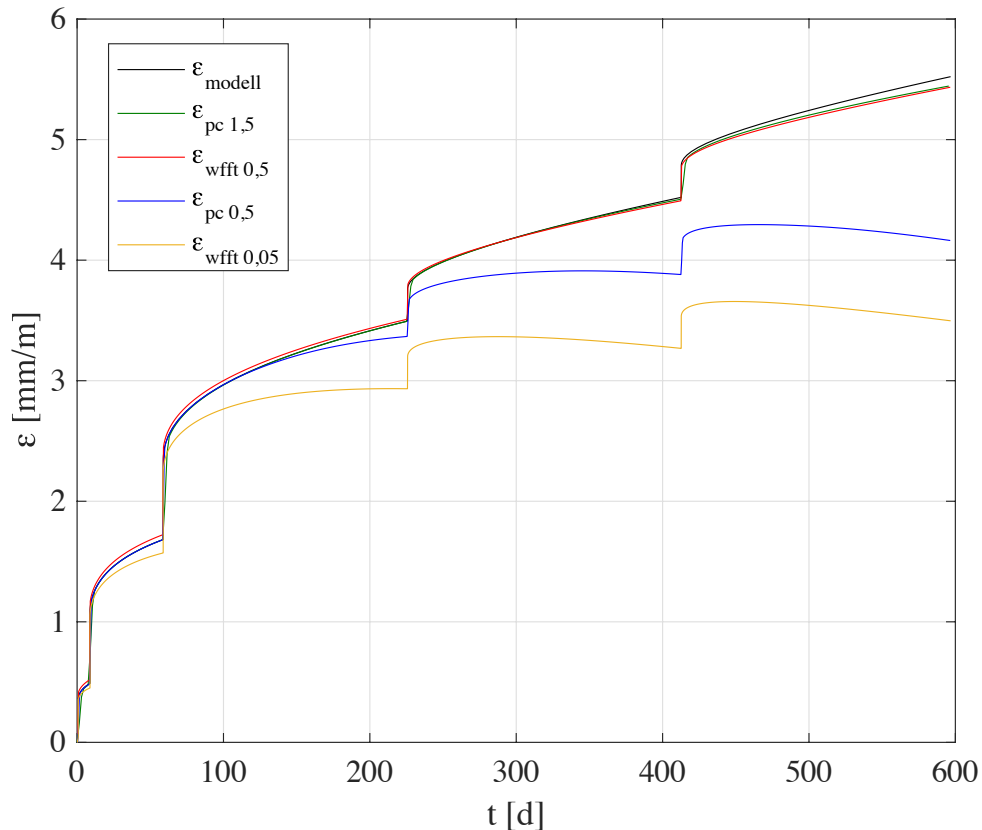


Abbildung 4.7: Vergleich der Ergebnisse der Methoden zur numerischen Lösung von (3.5) (GRÜNWARD-LETNIKOV-Methode [$h = 0,5d$ rot; $h = 0,05d$ gelb], Prädiktor-Korrektor-Verfahren [$h = 1,5d$ grün; $h = 0,5d$ blau]) mit dem Modell-Ergebnis [schwarz] in Anwendung auf den Versuch BGR 05019

4.3.2 Relaxationsversuch

Die Parameter aus (4.10) wurden als Grundlage für den Vergleich der verschiedenen Berechnungsverfahren mit den experimentellen Ergebnissen aus dem Relaxationsversuch BGR 05020 verwendet. Für die Anwendbarkeit des Prädiktor-Korrektor-Verfahrens war es allerdings notwendig, die Ableitungsordnung α geringfügig zu verändern [11, Kap. 4].

Daher wurde für die nachfolgend beschriebenen Berechnungen $\alpha = 0,5$ gewählt. Zur Anwendung der GRÜNWALD-LETNIKOV-Näherung wird (4.12) überführt in

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \sigma_1 = \sigma(0) \\ \sigma_k &= \frac{1}{p\eta + (E_1 + E_2)\eta h^\alpha + pE_1h + E_1E_2h^{1+\alpha}} \\ &\cdot \left[pE_1\eta \sum_{j=0}^k w_j^{(\alpha)} \varepsilon((k-j)h) + \eta E_1E_2h^\alpha (\varepsilon(kh) - \varepsilon((k-1)h)) \right. \\ &\quad \left. - p\eta \sum_{j=1}^k w_j^{(\alpha)} \sigma_{k-j} + (E_1 + E_2)\eta h^\alpha \sigma_{k-1} - pE_1 \sum_{j=1}^k w_j^{(\alpha)} \sigma_{k-j} \right] \quad k = 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Dabei repräsentiert $\sigma_k := \sigma(t_k)$ den Spannungswert nach dem k -ten Zeitschritt ($k = 0, \dots, N$). Dieses Verfahren ist in der Funktion `sigma_num_wfft.m` implementiert. Zur Anwendung des Prädiktor-Korrektor-Verfahrens wurde (3.5) in das fraktionale Differentialgleichungssystem

$$\begin{cases} D_*^{1/2} \sigma_1 = \sigma_2 & \sigma_1(0) = 0, \\ D_*^{1/2} \sigma_2 = \sigma_3 & \sigma_2(0) = 0, \\ D_*^{1/2} \sigma_3 = -\frac{E_1E_2}{p\eta} \sigma_1 - \frac{E_1}{\eta} \sigma_2 - \frac{E_1+E_2}{p} \sigma_3 + E_1 D_*^{3/2} \varepsilon + \frac{E_1E_2}{p} D^1 \varepsilon & \sigma_3(0) = 0 \end{cases} \quad (4.16)$$

überführt und dieses durch Anwendung von (2.70) in `sig_num_pc.m` gelöst. Schließlich wurde auch die Faltungsquadratur für die Relaxation in `sig_num_cq.m` programmiert. Dabei ergeben sich aus (3.5) die Funktionen g und Λ in (2.71) bzw. (2.72) zu

$$\begin{aligned} g(t) &= pD_*^{1+\alpha} \varepsilon(t) + E_2 D^1 \varepsilon(t), \\ \Lambda(s) &= \frac{1}{\frac{p}{E_1} s^{1+\alpha} + \frac{E_1+E_2}{E_1} s + \frac{p}{\eta} s^\alpha + \frac{E_2}{\eta}} \end{aligned} \quad (4.17)$$

und es wurde für das lineare Zeitschrittverfahren δ die Ordnung $p = 2$ gewählt. Die Ergebnisse dieser drei Methoden sowie von `sigma_modell.m` in Anwendung auf den Dehnungsverlauf aus dem Versuch BGR 05020 sind in Abbildung 4.8 gegenübergestellt. Zudem sind zum Vergleich die experimentellen Ergebnisse aus BGR 05020 mit angegeben. Dabei wird deutlich, dass die Ergebnisse von `sigma_modell.m` trotz der Näherung der Reihendarstellung (3.15) der Lösung sehr gut mit den Ergebnissen der drei anderen Methoden übereinstimmen. Die Prädiktor-Korrektor-Methode und die Faltungsquadratur verhalten sich abhängig von der Schrittweite in etwa gleich. Für $h = 0,5d$ gibt es dabei die beste Übereinstimmung mit den anderen Methoden. Für $h < 0,5d$ kommt es ähnlich wie bei den Methoden für die Kriechversuche zur starken Abflachung

der Kurven und für $h > 0,5d$ gibt es gute Übereinstimmungen mit den anderen Methoden in Bereichen konstanter Dehnung. Allerdings werden die Spannungsspitzen bei den Dehnungssprüngen unterschätzt. Die GRÜN WALD-LETNIKOV-Näherung zeigt die beste Übereinstimmung mit der Modell-Implementierung, allerdings auch hier nur bei Vorgabe gewisser Anfangswerte $\sigma(0) > 0$. Betrachtet man die experimentellen Ergebnisse aus BGR 05020, so werden doch deutlichere Abweichungen zu den Berechnungsverfahren mit den Parametern (4.10) mit der Änderung $\alpha = 0,5$ deutlich. Diese Abweichungen treten jedoch vor allem bei der Höhe der Spannungssprünge auf, wohingegen die Anstiege in den Bereichen konstanter Dehnung gute Übereinstimmungen mit den Ergebnissen aus BGR 05020 zeigen.

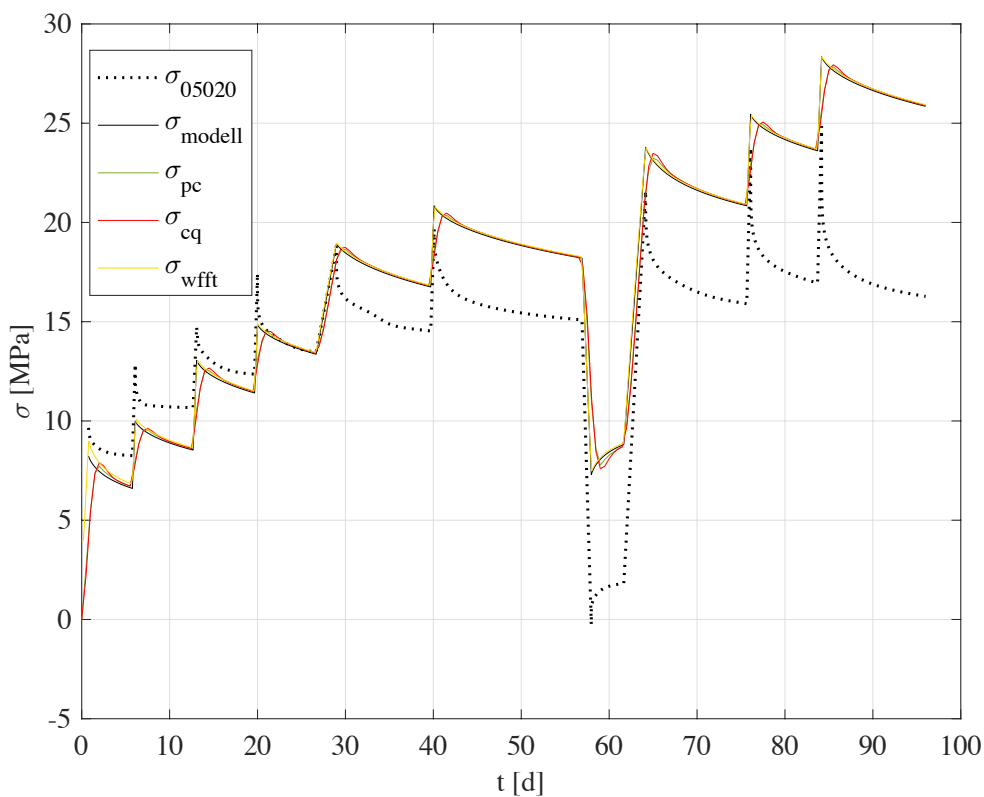


Abbildung 4.8: Vergleich der Ergebnisse der Methoden zur numerischen Lösung von (3.5) (GRÜN WALD-LETNIKOV-Methode [$h = 0,2d$ gelb], Prädiktor-Korrektor-Verfahren [$h = 0,5d$ grün], Faltungsquadratur [$h = 0,5d$ rot]) mit dem Modell-Ergebnis [schwarz] sowie den experimentellen Werten [gepunktet] bzgl. des Versuchs BGR 05020

5 Resümee und Ausblick

Auf der Grundlage physikalischer Überlegungen wurde ein rheologisches Modell zur Beschreibung des viskoelastischen Verhaltens von Beton unter Nutzung fraktionaler Infinitesimalrechnung entwickelt. Dabei wurden einige Aussagen zur Theorie fraktionaler Integrale und Ableitungen zusammengestellt. Insbesondere zur Theorie der MITTAG-LEFFLER-Funktionen wurde neben bekannten Sätzen und Eigenschaften auch eine Aussage zur Bestimmung höherer Ableitungen dieser Funktionen (Satz 2.5) und eine Konvergenzaussage zu einer speziellen Form von unendlichen Reihen in MITTAG-LEFFLER-Funktionen (Aussage 2.16) getroffen und dabei umfassend die Eigenschaft der vollständigen Monotonie der modifizierten MITTAG-LEFFLER-Funktion $e = e(t)$ herausgearbeitet. Ein großer Bestandteil der vorliegenden Arbeit war dann die Anwendung der theoretischen Ergebnisse auf die fraktionale Differentialgleichung (3.5). Die Aufstellung dieser Gleichung erfolgte unter Berücksichtigung rheologischer Gesetzmäßigkeiten und zu deren analytischer Lösung wurde die LAPLACE-Transformation-Methode umfassend studiert. Desweiteren wurden drei numerische Lösungsmethoden dargestellt und implementiert.

Im praktischen Teil der Arbeit wurde das entwickelte Modell mit experimentellen Daten aus Zug- und Druckversuchen am Beton M2 verglichen. Die Ergebnisse empfehlen durchaus ein weiteres Verfolgen des fraktionalen Ansatzes zur Beschreibung des viskoelastischen Verhaltens von Beton. Dazu bedarf es weiterer Vergleiche experimenteller Daten mit den Modellergebnissen unter Berücksichtigung des wirksamen Betonalters zu Versuchsbeginn sowie der Zeitskala der Versuchsdauer. Zudem müssen die numerischen Methoden weiter evaluiert und die Abhängigkeit ihrer Ergebnisse von den Versuchsdaten bestimmt werden.

Weiterhin ist zu untersuchen, welches Potential in der Anpassung des bisherigen Modells steckt. Der Parameter E_1 wurde bereits als altersabhängige Größe eingeführt. Ein möglicher Ansatz wäre die Annahme eines ebenfalls zeitabhängigen Parameters η , da sich dieser wie auch E_1 bei vielen experimentellen Ergebnissen aus Kriech- und Relaxationsversuchen als vom Betonalter abhängige Größe gezeigt hat. Eine Darstellung dieser beiden Größen als $E_1 = E_1(t)$ und $\eta = \eta(t)$ führt zu einer veränderten fraktionalen Differentialgleichung mit zeitabhängigen Koeffizienten. Auch für diesen Fall existiert eine Lösungstheorie und wieder ist der Einsatz numerischer Lösungsmethoden zu prüfen. Jedoch entstehen bereits beim Aufstellen der Differentialgleichung Probleme, da eine fraktionale LEIBNIZ-Regel [10, S.59] angewandt werden muss. Eine andere Möglichkeit wäre die Einführung einer zeitabhängigen Ableitungsordnung α zur Berücksichtigung des Betonalters. Auch zu fraktionalen Differentialgleichungen mit variabler

Ableitungsordnung gibt es bereits theoretische Ansätze (vgl. [9], [30]). Die Ergebnisse eines modifizierten viskoelastischen Modells sind dann in das gesamte Stoffmodell zu integrieren. Dabei ist u.U. auch eine Temperaturabhängigkeit des viskoelastischen Verhaltens zu berücksichtigen. Um das allgemeine Spannungs-Dehnungsverhalten von Beton beschreiben zu können und über die Spezialfälle des Kriechens und der Relaxation hinauszugehen, ist ein Finite-Elemente-Modell aufzustellen und zu implementieren. Dies wurde für Polymere bereits in [4] sowie [32] erfolgreich durchgeführt.

Kurzzusammenfassung

In dieser Arbeit wird ein rheologisches Modell zur Beschreibung des viskoelastischen Verhaltens von Beton unter Anwendung fraktionaler Infinitesimalrechnung vorgestellt. Es soll später in ein Gesamtstoffmodell für den Salzbeton M2 integriert werden um den Nachweis der Rissbeschränkung des Betons zu führen und den Einbau in Endlagern für Abfallstoffe in tiefen geologischen Schichten sichern.

Das Modell wird unter physikalischen Gesichtspunkten motiviert und zugehörige theoretische Resultate der fraktionalen Analysis zusammengestellt. Dabei wird insbesondere auf Eigenschaften der MITTAG-LEFFLER-Funktionen eingegangen. Diese treten bei der Lösung fraktionaler Differentialgleichungen unter Verwendung von LAPLACE-Transformationen auf. Diese Lösungstheorie wird zur analytischen Lösung einer fraktionalen Differentialgleichung bezüglich des oben genannten Modells verwendet. Zudem werden auch numerische Lösungsmöglichkeiten beschrieben und angewandt. Die Ergebnisse werden mit experimentellen Daten aus sogenannten Kriech- und Relaxationsversuchen bezüglich des Betons M2 verglichen und dadurch die Tragfähigkeit des Modells sowie der zugehörigen mathematischen Methoden eingeschätzt.

Anhang

A Nomenklatur

An dieser Stelle werden die in der Arbeit verwendeten Symbole mit ihrer typischen Verwendung aufgelistet.

Variable

Typische Variable in den verwendeten Funktionen:

- t [Zeit, Integrationsvariable]
- s [Variable im LAPLACE-Raum]
- τ [Integrationsvariable]
- h [Schrittweite in num. Verfahren]
- α, β, γ [Ordnung fraktionaler Ableitungen]

Vektoren und Tensoren

- \mathbf{a}, \mathbf{x} [Vektoren]
- $\mathbf{F}, \mathbf{C}, \mathbf{T}$ sowie \mathbf{I} (Einheitstensor), $\boldsymbol{\sigma}$ (Spannungstensor) und $\boldsymbol{\varepsilon}$ (linearisierter Verzerrungstensor) [Tensoren und insbesondere Matrizen]

Funktionen

- $f, g, h, \lambda, \mu, \varepsilon, \nu, \sigma$ [typische Symbole für Funktionen]
- $F, G, H, \Lambda, \mu^*, \varepsilon^*, \nu^*, \sigma^*$ [zugehörige Laplace-Transformierte]
- $[\cdot]$ [Floor-Funktion, $[x] = \max\{z \in \mathbb{Z} : z \leq x\}$]
- $\lceil \cdot \rceil$ [Ceiling-Funktion, $\lceil x \rceil = \min\{z \in \mathbb{Z} : z \geq x\}$]
- Γ [Gamma-Funktion]
- E_α [MITTAG-LEFFLER-Funktion der Ordnung α]
- $E_{\alpha, \beta}$ [zwei-parametrische MITTAG-LEFFLER-Funktion]
- e [modifizierte MITTAG-LEFFLER-Funktion, $e(t) = E_{\alpha, \beta}(\lambda t^\alpha)$,
 $\alpha \in [0, 1], \beta \geq \alpha, \lambda > 0$]
- o, \mathcal{O} [LANDAU-Symbole]
 $f \in o(g) \quad (x \rightarrow a) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = 0$
 $f \in \mathcal{O}(g) \quad (x \rightarrow a) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = \text{const.} < \infty$
- tr [Spur eines Tensors]
- $T_j[f], R_j[f]$ [Taylor-Polynom bzw. Restglied vom Grad j entwickelt um 0]

Mengen

- $C[a, b]$ [Menge aller im Intervall $[a, b]$ stetigen Funktionen]
- $C^k[a, b]$ [Menge aller im Intervall $[a, b]$ k -fach stetig differenzierbaren Funktionen]
- $L_1[a, b]$ [Menge aller über $[a, b]$ integrierbarer Funktionen]
- \mathbb{N} [Menge der natürlichen Zahlen]
- $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$
- \mathbb{R} [Menge der reellen Zahlen]
- \mathbb{R}_+ [Menge der strikt positiven reellen Zahlen]
- \mathbb{Z} [Menge der ganzen Zahlen]
- $D_r = \{x \in \mathbb{C} : |x| \leq r\}$
- \mathcal{CM} [Menge der vollständig monotonen Funktionen]
- \mathcal{BF} [Menge der BERNSTEIN-Funktionen]

Operatoren

- D^n [$n \in \mathbb{N}$, n -facher Differentialoperator $D^n f(t) = f^{(n)}(t)$]
- D^α [$\alpha \in \mathbb{R}_+$, fraktionaler RIEMANN-LIOUVILLE-Differentialoperator]
- D_*^α [$\alpha \in \mathbb{R}_+$, fraktionaler CAPUTO-Differentialoperator]
- D_{GL}^α [$\alpha \in \mathbb{R}_+$, fraktionaler GRÜN WALD-LETNIKOV-Differentialoperator]
- J^α [fraktionales RIEMANN-LIOUVILLE-Integral]
- $\mathcal{L}, \mathcal{L}^{-1}$ [LAPLACE- und inverse LAPLACE-Transformation]

B MATLAB-Quellcode

Quellcode 1: *eps_modell.m*

```
1 function eps = eps_modell(t, sigma, alpha, E_1, E_2, p, eta)
2 %Funktion zur Bestimmung des zeitlichen Dehnungsverlaufs
   eps=epsilon(t)
3 %aus dem fraktionalen Modell (Gleichung (3.10)) zu den Zeiten t
4 %bei bekannter Spannungsfunktion sigma=sigma(t)
5 %mit gegebenen Parametern alpha, E_1, E_2, p, eta
6
7 %untere Integrationsgrenze
8 a = 1e-10;
9
10 %Berechnung der Funktionswerte von mu nach (3.10) mithilfe der
   Funktion
11 %ml.m von R. Garrappa (MATLAB File Exchange 48154)
12 mu = @(s) 1/p.*s.^(alpha-1).*ml(-E_2/p.*s.^alpha, alpha, alpha)...
13         +1./eta.*ml(-E_2/p.*s.^alpha, alpha, 1)...
14         +E_2./(eta.*p).*s.^alpha...
15         .*ml(-E_2/p.*s.^alpha, alpha, 1+alpha);
16
17
18 %%%% Fortschrittsanzeige
19 q = waitbar(0, 'Please_wait...');
20 %%%%
21
22 %numerische Integration
23 eps=zeros(1, length(t));
24 integrand = @(s, T) mu(s).*sigma(T-s);
25 for k = 1:length(t)
26     eps(k) = sigma(t(k))./E_1...
27           + integral(@(s) integrand(s, t(k)), a, t(k));
28 %%%%
29 waitbar(k/length(t), q, sprintf('Loading...%.2f%%', k/length(t)*100));
30 %%%%
31 end
32
33 %Funktions-Plot
34 plot(t, eps);
35 %%%%
36 delete(q)
```


Quellcode 2: *w_fft.m*

```
1 function w = w_fft(alpha,N)
2 %Funktion zur Bestimmung der Koeffizienten fuer die
   Gruenwald-Letnikov-
3 %Naeherung mittels Fast Fourier Transformation
4
5 n = 0:N;
6 phi = 2*pi.*n./N;
7 y = (1-exp(-1i.*phi)).^alpha;
8 w=real(ifft(y));
9 end
```

Quellcode 3: *eps_num_wfft.m*

```
1 function eps =
   eps_num_wfft(t_end,sig,alpha,E_1,E_2,p,eta,eps_0,h)
2 %Funktion zur Bestimmung des zeitlichen Dehnungsverlaufs
   eps=epsilon(t)
3 %basierend auf der Gruenwald-Letnikov-Naeherung (Gleichung
   (4.14))
4 %zu den Zeiten t mit Schrittweite h
5 %bei bekannter Spannungsfunktion sigma=sigma(t)
6 %mit gegebenen Parametern alpha, E_1, E_2, p, eta und
   Anfangswert eps_0
7
8 %%%% Fortschrittsanzeige
9 q = waitbar(0,'Please_wait...');
10 %%%%
11
12 %Zeitschritte
13 t=0:h:t_end;
14 %n = floor(t_end/h);
15
16 %Fourier-Koeffizienten
17 w_1 = w_fft(1+alpha,1e6);
18 w_2 = w_fft(alpha,1e6);
19
20 eps = zeros(size(t));
21 %Anfangswerte
22 eps(1) = eps_0;
23 eps(2) = eps_0;
24
```

```

25 for k = 2:length(t)-1
26     eps(k+1) = (-p*sum(w_1(2:k+1).*eps(k-(0:(k-1)))))...
27               +E_2*h^alpha*eps(k)...
28               +p/E_1*sum(w_1(1:k+1).*sig((k-(0:k)).*h))...
29               +(E_1+E_2)/E_1*h^alpha*(sig(k*h)-sig((k-1)*h))...
30               +p/eta*h*sum(w_2(1:k+1).*sig((k-0:k).*h))...
31               +E_2/eta*h^(1+alpha)*sig(k*h)...
32               /(p+E_2*h^alpha);
33 %%%
34 waitbar(k/length(t),q,sprintf('Loading...%.2f%%',k/length(t)*100));
35 %%%
36 end
37 plot(t,eps);
38 delete(q)

```

Quellcode 4: *predcorfrac2.m*

```

1 function f = predcorfrac2(t,alpha,K,f_0,h)
2 %Algorithmus zur numerischen Loesung des fraktionalen AWP
3 %D^alpha(f(t))=K(t,f(t)) mit Vektor von AW f_0(k)=f^(k)(0) im
4   Intervall
5 % [0,t] mit Schrittweite h nach Gleichung (2.69) + (2.70)
6
7 n=floor(t/h);
8 m=ceil(alpha);
9
10 a=zeros(1,n);
11 b=zeros(1,n);
12 for k=1:n
13     b(k) = k^alpha-(k-1)^alpha;
14     a(k) = (k+1)^(alpha+1)-2*k^(alpha+1)+(k-1)^(alpha+1);
15 end
16
17 f=zeros(length(f_0),n+1);
18 f(:,1)=f_0;
19
20 for j=1:n
21     p = sum((j*h).^ (0:m-1). *f_0./factorial(0:m-1),2)...
22         +h^alpha/gamma(alpha+1). * (K(1:j,f(:,1:j)) *b(j-(0:j-1)))';
23
24     f(:,j+1) = sum((j*h).^ (0:m-1). *f_0./factorial(0:m-1),2)...
25         +h^alpha/gamma(alpha+2). * (K(j+1,p)+((j-1)^(alpha+1))...

```

```

25     -(j-1-alpha)*j^alpha).*K(1,f(:,1))...
26     +K(2:j,f(:,2:j))*a(j-(1:j-1))');
27 end

```

Quellcode 5: *eps_num_pc.m*

```

1 function eps1 = eps_num_pc(t, sigma, alpha, E_1, E_2, p, eta, h)
2 %Funktion zur Bestimmung des zeitlichen Dehnungsverlaufs
   eps=epsilon(t)
3 %basierend auf der Praediktor-Korrektor-Methode bzgl. Gleichung
   (4.15)
4 %zu den Zeiten t mit Schrittweite h
5 %bei bekannter Spannungsfunktion sigma=sigma(t)
6 %mit gegebenen Parametern alpha, E_1, E_2, p, eta
7
8 n=floor(t/h);
9 s=0:h:n*h;
10 %Bestimmung der fraktionalen Ableitung durch
   Gruenwald-Letnikov-Naeherung
11 %mittels der Funktion fderiv.m von A. Manurung (MATLAB File
   Exchange 52587)
12 A=fderiv(sigma(s),1+alpha,1000,h);
13 B=fderiv(sigma(s),1,1000,h);
14 C=fderiv(sigma(s),alpha,1000,h);
15
16 K=@(t,f) 1/E_1*A(t)+(E_1+E_2)/(E_1*p)*B(t)...
17     +1/eta*C(t)+E_2/(eta*p)*sigma((t-1).*h)-E_2/p.*f;
18
19 eps2=predcorfrac2(t,alpha,K,0,h);
20 eps1=zeros(size(s));
21 eps1(1)=0;
22 for k=2:length(s)
23     eps1(k)=trapz(s(1:k),eps2(1:k));
24 end
25 plot(s,eps1);

```

Quellcode 6: *deriveml.m*

```

1 function d = deriveml(z,alpha,beta,n)
2 %Funktion zur Bestimmung der Ableitung von natuerlicher Ordnung
   n der
3 %zwei-parametrischen Mittag-Leffler-Funktion ml(z,alpha,beta)
   nach der

```

```
4 %Rekursionsformel aus Satz 2.5
5
6 if n < 0
7     printf('Fehler: Die Ableitungsordnung muss ganzzahlig
8         nicht-negativ sein');
9     return
10 elseif n == 0
11     d = ml(z, alpha, beta);
12 elseif n == 1
13     d = (ml(z, alpha, beta-1) -
14         (beta-1).*ml(z, alpha, beta))./(alpha.*z);
15 else
16     d= (deriveml(z, alpha, beta-1, n-1) - (beta-1).*
17         deriveml(z, alpha, beta, n-1))./(alpha.*z)...
18         - (n-1).*deriveml(z, alpha, beta, n-1)./z;
19 end
```

Quellcode 7: *sigma_modell.m*

```
1 function sigma = sigma_modell(t, eps, alpha, E_1, E_2, p, eta)
2 %Funktion zur Bestimmung des zeitlichen Spannungsverlaufs
3     sigma=sigma(t)
4 %aus dem fraktionalen Modell (Gleichung (3.15)) zu den Zeiten t
5 %bei bekannter Dehnungsfunktion eps=epsilon(t)
6 %mit gegebenen Parametern alpha, E_1, E_2, p, eta
7
8 %untere Integrationsgrenze
9 a = 1e-10;
10
11 %Ordnung der Reihenentwicklung
12 N = 2;
13
14 %Berechnung der Funktionswerte von nu nach (3.15) mithilfe der
15     Funktion
16 %ml.m (MATLAB File Exchange 48154) und deriveml.m
17 Y_1 = @(s) 0;
18 Y_2 = @(s) 0;
19 for n = 1:N
20     X_1 = @(s) 0;
21     X_2 = @(s) 0;
22
23     for k = 0:n
```

```

22     X_1 = @(s) X_1(s)...
23         +nchoosek(n,k)*(p/E_2)^k.*s.^(alpha*(n-k)+n-1)...
24         .*deriveml(-(E_1+E_2)/p.*s.^alpha,alpha,n-alpha*k,n);
25     X_2 = @(s) X_2(s)...
26         +nchoosek(n,k)*(p/E_2)^k.*s.^(alpha*(n-k+1)+n-1)...
27         .*deriveml(-(E_1+E_2)/p.*s.^alpha,alpha,n-alpha*(k-1),n);
28     end
29     Y_1 = @(s)
30         Y_1(s)+((-E_1*E_2/(eta*p))^n)/factorial(n).*X_1(s);
31     Y_2 = @(s)
32         Y_2(s)+((-E_1*E_2/(eta*p))^n)/factorial(n).*X_2(s);
33     end
34     nu = @(s) E_1.*(Y_1(s) - E_1/p.*s.^(alpha-1)...
35         .*ml(-(E_1+E_2)/p.*s.^alpha,alpha,alpha)) +
36         E_1*E_2/p.*Y_2(s);
37     %%%% Fortschrittsanzeige
38     p = waitbar(0,'Please_wait...');
39     %%%%
40     %numerische Integration
41     sigma=zeros(1,length(t));
42     integrand = @(s,T) nu(s).*eps(T-s);
43     for k = 1:length(t)
44         sigma(k) = eps(t(k)).*E_1...
45             + integral(@(s)integrand(s,t(k)),a,t(k));
46     %%%%
47     waitbar(k/length(t),p,sprintf('Loading...%.2f%',k/length(t)*100));
48     %%%%
49     end
50
51     %Funktions-Plot
52     plot(t,sigma);
53     %%%%
54     delete(p)

```

Quellcode 8: *sigma_num_wfft.m*

```

1 function sig =
    sigma_num_wfft(t_end,eps,alpha,E_1,E_2,p,eta,sig_0,h)

```

```

2  %Funktion zur Bestimmung des zeitlichen Spannungsverlaufs
   sigma=sigma(t)
3  %basierend auf der Gruenwald-Letnikov Naeherung (4.16)
4  %zu den Zeiten t mit Schrittweite h mit gegebenem
5  %Anfangswert sig_0=sig(0) bei bekannter Dehnungsfunktion
   eps=epsilon(t)
6  %mit gegebenen Parametern alpha, E_1, E_2, p, eta
7
8  %%%% Fortschrittsanzeige
9  q = waitbar(0,'Please_wait...');
10 %%%%
11
12 %Zeitschritte
13 t=0:h:t_end;
14 %n = floor(t_end/h);
15
16 %Fourier-Koeffizienten
17 w_1 = w_fft(1+alpha,1e6);
18 w_2 = w_fft(alpha,1e6);
19
20 sig = zeros(size(t));
21 %Anfangswerte
22 sig(1) = sig_0;
23 sig(2) = sig_0;
24
25 for k = 2:length(t)-1
26     sig(k+1) =
27         (p*E_1*eta*sum(w_1(1:(k+1)).*eps((k-(0:k)).*h))...
28         +E_1*E_2*eta*h^alpha*(eps(k*h)-eps((k-1)*h))...
29         -p*eta*sum(w_1(2:(k+1)).*sig(k-(0:(k-1))))...
30         +(E_1+E_2)*eta*h^alpha*sig(k)...
31         -p*E_1*h*sum(w_2(2:(k+1)).*sig(k-(0:(k-1))))...
32         / (p*eta+(E_1+E_2)*eta*h^alpha...
33         +p*E_1*h+E_1*E_2*h^(1+alpha));
34 %%%%
35 waitbar(k/length(t),q,sprintf('Loading...%.2f%%',k/length(t)*100));
36 %%%%
37 end
38 plot(t,sig);
39 delete(q)

```

Quellcode 9: *sigma_num_pc.m*

```

1 function sig=sigma_num_pc(t,eps,alpha,E_1,E_2,p,eta,h)
2 %Funktion zur Bestimmung des zeitlichen Spannungsverlaufs
   sig=sigma(t)
3 %basierend auf der Praediktor-Korrektor-Methode bzgl. Gleichung
   (4.17)
4 %zu den Zeiten t mit Schrittweite h
5 %bei bekannter Spannungsfunktion sigma=sigma(t)
6 %mit gegebenen Parametern alpha, E_1, E_2, p, eta
7
8 s=0:h:t;
9
10 %Bestimmung der fraktionalen Ableitung durch
   Gruenwald-Letnikov-Naeherung
11 %mittels der Funktion fderiv.m von A. Manurung (MATLAB File
   Exchange 52587)
12 A=fderiv(eps(s),1+alpha,1000,h);
13 B=fderiv(eps(s),1,1000,h);
14
15 K=@(x,f)
   [f(2,:);f(3,:);-E_1*E_2/(eta*p).*f(1,)-E_1/eta.*f(2,)...
16   -(E_1+E_2)/p.*f(3,)+E_1.*A(x)+E_1*E_2/p.*B(x)];
17 sig=predcorfrac2(t,alpha,K,[0;0;0],h);
18 plot(s,sig(1,:));

```

Quellcode 10: *sigma_num_cq.m*

```

1 function sig=sigma_num_cq(t_end,eps,alpha,E_1,E_2,p,eta,h)
2 %Funktion zur Bestimmung des zeitlichen Spannungsverlaufs
   sig=sigma(t)
3 %basierend auf der Faltungsquadratur bzgl. der Gleichungen
   (4.18)
4 %zu den Zeiten t mit Schrittweite h
5 %bei bekannter Spannungsfunktion sigma=sigma(t)
6 %mit gegebenen Parametern alpha, E_1, E_2, p, eta
7
8 t=0:h:t_end;
9
10 %Anzahl der Summanden fuer Fourier-Reihen-Entwicklung
11 N=1e6;
12

```

```
13 %Bestimmung der fraktionalen Ableitung durch
    Gruenwald-Letnikov-Naeherung
14 %mittels der Funktion fgl_deriv.m von J. Hadida (MATLAB File
    Exchange 45982)
15 g = p.*fgl_deriv(1+alpha,eps(t),h)+E_2.*fgl_deriv(1,eps(t),h);
16 Lamb = @(x) (p/E_1.*x.^(1+alpha)...
    +(E_1+E_2)/E_1.*x+p/eta.*x.^alpha+E_2/eta).^(-1);
18 d=@(x) (1-x)+(1-x).^2./2+(1-x).^3./3;
19 y = Lamb(d(exp(2*pi*1i.*(0:N-1)./N))./h)./N;
20 w = real(fft(y));
21 sig=zeros(size(t));
22 for n=1:length(t)
23     sig(n)=sum(w(1:n).*g(n+1-(1:n)));
24 end
25
26 plot(t,sig);
```


Literaturverzeichnis

- [1] H. Altenbach. *Kontinuumsmechanik. Einführung in die materialunabhängigen und materialabhängigen Gleichungen*. 3., überarb. Aufl. 2015. Berlin, Heidelberg: Springer Vieweg, 2015, XIV, 340 S. 41 Abb.
- [2] I. Anders. „Stoffgesetz zur Beschreibung des Kriech- und Relaxationsverhaltens junger normal- und hochfester Betone“. Diss. Karlsruhe: Zugl.: Karlsruhe KIT Diss. 2012., 2013.
- [3] R. L. Bagley und P. J. Torvik. „A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity“. In: *Journal of Rheology (1978-present)* 27.3 (1983), S. 201–210.
- [4] R. L. Bagley und P. J. Torvik. „Fractional calculus in the transient analysis of viscoelastically damped structures“. In: *AIAA Journal* 23.6 (1985), S. 918 –925.
- [5] R. L. Bagley und P. J. Torvik. „On the fractional calculus model of viscoelastic behavior“. In: *Journal of Rheology (1978-present)* 30.1 (1986), S. 133–155.
- [6] H. Bateman und A. Erdelyi. *Higher transcendental functions, Vol. 1*. 1953.
- [7] H. Bateman und A. Erdelyi. *Higher Transcendental Functions, Vol. 3: Elliptic and Automorphic Functions, Lamé and Mathieu Functions*. 1955.
- [8] M. Caputo. „Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent“. In: *Annals of Geophysics* 19 (1966), S. 383 –393.
- [9] C. F. M. Coimbra. „Mechanics with variable-order differential operators“. In: *Annalen der Physik* 12.11-12 (2003), S. 692–703.
- [10] K. Diethelm. *The analysis of fractional differential equations : An application-oriented exposition using differential operators of caputo type*. Berlin: Springer, 2010, VIII, 247 S.
- [11] K. Diethelm, N. J. Ford und A. D. Freed. „A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations“. In: *Nonlinear Dynamics* 29.1-4 (2002), S. 3–22.
- [12] K. Diethelm und Y. Luchko. „Numerical solution of linear multi-term initial value problems of fractional order“. In: *J. Comput. Anal. Appl.* 6.3 (2004), S. 243–263.

- [13] G. Doetsch. *Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation*. München: Oldenbourg, 1956.
- [14] R. Garrappa. „Numerical evaluation of two and three parameter Mittag-Leffler functions“. In: *SIAM Journal on Numerical Analysis* 53.3 (2015), S. 1350–1369.
- [15] A. N. Gerasimov. „A generalization of linear laws of deformation and its application to problems of internal friction“. In: *Akad. Nauk SSSR. Prikl. Mat. Meh* 12 (1948), S. 251–260.
- [16] R. Gorenflo, Hrsg. *Mittag-Leffler functions, related topics and applications*. Berlin: Springer, 2014, XIV, 443 S.
- [17] P. L. Gould. *Introduction to linear elasticity*. 2. Aufl. New York: Springer, 1989, XII, 159 S.
- [18] D. Gross. *Technische Mechanik 4 Hydromechanik, Elemente der Höheren Mechanik, Numerische Methoden*. Hrsg. von W. Hauger. 9., aktualisierte Aufl. 2014. Berlin, Heidelberg: Springer Vieweg, 2014, XI, 503 S.
- [19] W. F. Hammond. *About the Gamma Function*. <http://www.albany.edu/~hammond/gellmu/examples/gamma.pdf>. 1995.
- [20] H. J. Haubold, A. M. Mathai und R. K. Saxena. „Mittag-Leffler Functions and Their Applications“. In: *Journal of Applied Mathematics* 2011 (2011).
- [21] M. Hinze. *Zur Nutzung fraktionaler Infinitesimalrechnung bei der Beschreibung des viskoelastischen Verhaltens von Beton*. Techn. Ber. DBE TECHNOLOGY GmbH, 2016.
- [22] C. Lubich. „Convolution quadrature and discretized operational calculus. I“. In: *Numerische Mathematik* 52.2 (1988), S. 129–145.
- [23] F. Mainardi. „On some properties of the Mittag-Leffler function $E_\alpha(-t^\alpha)$, completely monotone for $t > 0$ with $0 < \alpha < 1$ “. In: *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B* 19.7 (2014), S. 2267–2278.
- [24] R. Mauke und D. Laske. *Stilllegung Endlager Morsleben - Verfüllen von Strecken mit hohen Anforderungen - Bauzustände für horizontale Strecken (ergänzende Untersuchungen zum Nachweis der Rissbeschränkung im Salzbeton und Nachweis-konzept für das südliche Wetterrollloch). Planfeststellungsverfahren zur Stillle-*

- gung des Endlagers für radioaktive Abfälle Morsleben - Verfahrensunterlage P255. Techn. Ber. Salzgitter: Bundesamt für Strahlenschutz, 2007.
- [25] K. S. Miller u. a. „A note on the complete monotonicity of the generalized Mittag-Leffler function“. In: *Real Analysis Exchange* 23.2 (1999), S. 753–756.
- [26] K. B. Oldham. *The fractional calculus: Theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order*. Hrsg. von J. Spanier. New York [u.a.]: Acad. Pr., 1974, XIII, 234 S.
- [27] I. Podlubny. *Fractional differential equations. An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*. San Diego: Academic Press, c 1999.
- [28] H. Pollard. „The completely monotonic character of the Mittag-Leffler function $E_\alpha(-x)$ “. In: *Bulletin of the American Mathematical Society* 54.12 (1948), S. 1115–1116.
- [29] S. Rogosin. „The Role of the Mittag-Leffler Function in Fractional Modeling“. In: *Mathematics* 3.2 (2015), S. 368–381.
- [30] S. G. Samko und B. Ross. „Integration and differentiation to a variable fractional order“. In: *Integral Transforms and Special Functions* 1.4 (1993), S. 277–300.
- [31] R. L. Schilling, R. Song und Z. Vondracek. *Bernstein functions: theory and applications*. Bd. 37. Walter de Gruyter, 2012.
- [32] A. Schmidt und L. Gaul. „Parameter Identification and FE Implementation of a Viscoelastic Constitutive Equation Using Fractional Derivatives“. In: *Proc. Appl. Math. Mech.* 1.1 (2002).
- [33] A. Schmidt, S. Oexl und L. Gaul. „Modellierung des viskoelastischen Werkstoffverhaltens von Kunststoffen mit fraktionalem Zeitableitungen“. In: *CAD-FEM User's Meeting, Friedrichshafen*. 2002.
- [34] O. Schulze. *Thermomechanisches und hydraulisches Verhalten von Salzgestein*. Techn. Ber. BGR Hannover, 2006.
- [35] O. Schulze. *Relaxations-Versuche an Salzbeton*. E-mail: Otto.Schulze@bgr.de [30.10.2012]. 2012.
- [36] G. W. Scott Blair. „The role of psychophysics in rheology“. In: *Journal of Colloid Science* 2.1 (1947), S. 21–32.

- [37] N. Sieber. *Spezielle Funktionen*. Hrsg. von H.-J. Sebastian. 2., durchges. Aufl. Leipzig: Teubner, 1980, 136 S.
- [38] J. Stoer. *Numerische Mathematik*. 7., neubearb. und erw. Aufl. Bd. 1. Berlin: Springer, 1994, XI, 367 S.
- [39] R. Temam und A. Miranville. *Mathematical modeling in continuum mechanics*. Cambridge [u.a.]: Cambridge University Press, 2001, XIII, 288 S.
- [40] E. Ulrich. „Über das Problem der Vergleichsspannungen in der Festigkeitslehre“. In: *Forschung auf dem Gebiet des Ingenieurwesens* 25.4 (1959), S. 106–114.
- [41] H. Weber, Hrsg. *Laplace-Transformation Grundlagen - Fourierreihen und Fourierintegral - Anwendungen*. 8. Auflage. Wiesbaden: Vieweg+Teubner, 2007.
- [42] D. Weise und D. Brückner. *Untersuchung des Kompaktionsverhaltens von Salzbe-
ton M2*. Techn. Ber. unveröffentlicht. Leipzig: Institut für Gebirgsmechanik.
- [43] D. Weise, D. Naumann und W. Bodenstein. *Laborbericht zu gesteinsmechanischen
Untersuchungen an Bohrkernen aus dem Abdichtbauwerk im Steinsalz im ERAM*.
Techn. Ber. unveröffentlicht. Leipzig: Institut für Gebirgsmechanik.
- [44] A. Wiman. „Über die Nullstellen der Funktionen $E_a(x)$ “. In: *Acta Mathematica*
29.1 (1905), S. 217–234.

Abbildungsverzeichnis

2.1	Gamma-Funktion	14
2.2	Integrationsweg MITTAG-LEFFLER-Funktion	20
2.3	Modifizierte MITTAG-LEFFLER-Funktion $e(t)$ und deren Ableitungen in Abhängigkeit von α	27
3.1	Modellansatz	56
3.2	Teilstoffmodell: Viskoeffekte	56
4.1	Parameteranpassung iBMB-10d	67
4.2	Parameteranpassung IfG 414-K-M2-1-56-8	68
4.3	Parameteranpassung IfG-M2-TCC 1 und 2	69
4.4	Parameteranpassung IfG-M2-TCC 3 und 5	70
4.5	Parameteranpassung BGR 05019	71
4.6	Parameteranpassung eines klassischen Modells an BGR 05019	73
4.7	Vergleich numerischer Methoden bzgl. BGR 05019	75
4.8	Vergleich numerischer Methoden bzgl. BGR 05020	77

Tabellenverzeichnis

2.1	Fehler bei der numerischen Lösung fraktionaler AWP I	54
2.2	Fehler bei der numerischen Lösung fraktionaler AWP II	55
4.1	Parameterwerte von E_1 für die Kriechversuche in Abhängigkeit vom Be- tonalter	65
4.2	Fehleranalyse zur Parameteranpassung Kriechversuche	72

Quellcodeverzeichnis

1	eps_modell.m	iii
2	w_fft.m	iv
3	eps_num_wfft.m	iv
4	predcorfrac2.m	v
5	eps_num_pc.m	vi
6	deriveml.m	vi
7	sigma_modell.m	vii
8	sigma_num_wfft.m	viii
9	sigma_num_pc.m	ix
10	sigma_num_cq.m	x

Erklärung

Ich versichere, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe, insbesondere sind wörtliche oder sinngemäße Zitate als solche gekennzeichnet. Mir ist bekannt, dass Zuwiderhandlung auch nachträglich zur Aberkennung des Abschlusses führen kann.

Ort

Datum

Unterschrift