

## Remco I. Leine

Institut für mechanische Systeme

Departement Maschinenbau und Verfahrenstechnik

ETH Zürich

8092 Zürich, Zwitserland

remco.leine@imes.mavt.ethz.ch

### Onderzoek

# Zeno-gedrag in de mechanica

Als je Achilles en de schildpad op een door Christiaan Huygens gemaakte glijbaan zet, dan kan je rare dingen verwachten. Remco Leine is Privat Dozent aan de ETH Zürich en doet onderzoek naar de niet-lineaire dynamica van mechanische systemen met botsing en wrijving.

De paradoxen van de Griekse filosoof Zeno van Elea hebben al twee millennia lang voor hoofdbrekens en inspiratie in de wetenschap gezorgd. Een van de bekendste is de ‘paradox’ van Achilles en de schildpad. De schildpad daagt Achilles uit voor een hardloopwedstrijd en beweert dat hij wint als Achilles hem een kleine voorsprong geeft. De schildpad legt uit dat hijzelf een stukje verder is gelopen gedurende de tijd die Achilles nodig heeft om de voorsprong te overbruggen. Zo ontstaat er een nieuwe voorsprong die Achilles opnieuw moet afleggen. De tijd die Achilles nodig heeft om de schildpad in te halen is dus te schrijven als een oneindige som. De schildpad suggereert dat Achilles hem daarom nooit kan inhalen en de arme Achilles geeft zich gewonnen. De oneindige som heeft echter een eindige waarde en dit verklaart de paradox.

In de hybride systeemtheorie wordt het optreden van een oneindig aantal discrete toestandsveranderingen in een eindige tijd als Zeno-gedrag betiteld. Ook in de dynamica van stootverschijnselen steekt dit fenomeen vaak de kop op. In deze bijdrage zal ik dit speelsgewijs proberen aan te geven. Als opwarmertje bekijken we eerst het welbekende stuiterbalprobleem.

#### De stuiterbal

Beschouw een bal of puntmassa  $m$  welke op tijdstip  $t_0$  op een hoogte  $h$  boven de grond wordt losgelaten. Neem aan dat het contact tussen de bal en de grond aan de stootwet van Newton voldoet met restitutiecoëfficiënt  $\varepsilon$  en  $0 < \varepsilon < 1$ . Als we de hoogte van de bal op tijdstip  $t$

met  $q(t)$  aangeven dan volgt het verloop  $q(t) = h - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2$  voor  $t_0 \leq t \leq t_1$ , waarbij  $g$  de valversnelling is en  $t_1$  het botsingstijdstip waarop  $q(t_1) = 0$ . De tijd die de bal nodig heeft om de grond te bereiken bedraagt dus

$$t_1 - t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

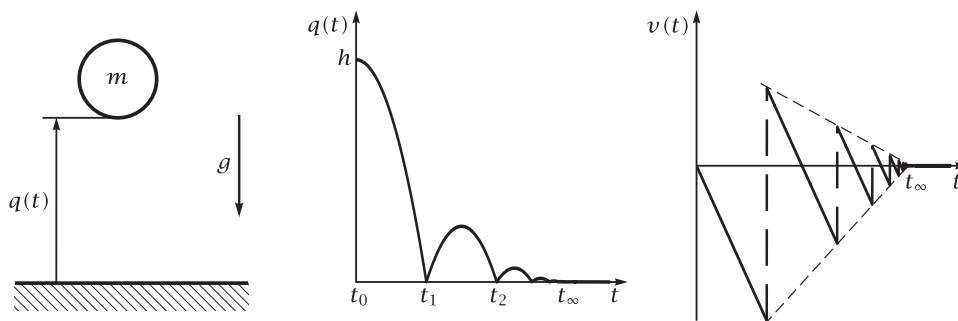
De wet van Galilei geeft ons de valsnelheid bij aankomst op de grond  $v^-(t_1) = -\sqrt{2gh}$ . Door de daarop volgende stoot vliegt de bal met snelheid  $v^+(t_1) = \varepsilon\sqrt{2gh}$  en kinetische energie  $\frac{1}{2}m(v^+(t_1))^2 = \varepsilon^2 mgh$  omhoog. De nieuwe maximale hoogte  $h_1 = \varepsilon^2 h$  volgt uit energiebehoud. De tijd die de bal nodig heeft om tot de hoogte  $h_1$  te komen is gelijk aan de tijd om van hoogte  $h_1$  weer terug op de grond te komen. We leiden daaruit af dat  $t_2 - t_1 = 2\sqrt{2h_1/g} = 2\varepsilon\sqrt{2h/g}$ , waarbij  $t_2$  het tijdstip is waarvoor de bal voor de tweede maal de grond raakt. De totale tijd die de bal nodig heeft om tot rust te komen geeft de oneindige som

$$T = t_\infty - t_0 = \sum_{i=0}^{\infty} t_{i+1} - t_i = \left(1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i\right) \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Met de meetkundige reeks  $\sum_{i=0}^{\infty} r^i = \frac{1}{1-r}$ ,  $0 \leq r < 1$ , kunnen we de som eenvoudig bepalen:

$$T = \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Er treedt dus een oneindig (maar aftelbaar) aantal stoten op in een eindige tijd  $T$ . Na  $t = t_\infty$  blijft de bal in rust liggen. Het tijdstip  $t_\infty$  waarop



Figuur 1 De stuiterbal

het evenwichtspunt wordt bereikt is een ‘Zeno-punt’, dat wil zeggen een ophopingspunt van botsingstijdstippen. Figuur 1 toont schematisch het Zeno-gedrag van de stuiterbal. Het verloop van de snelheid  $v(t)$  is zelfgelijkend: bij vergroting van de figuur rondom  $t = t_\infty$  krijg je een gelijkvormig beeld te zien.

Interessanter wordt het stuiterbalprobleem als we de ondergrond harmonisch laten bewegen [1]. Laten we zeggen dat de ondergrond oscilleert met de voorgeschreven beweging

$$e(t) = A \sin \Omega t,$$

waarbij  $A$  de amplitude en  $\Omega$  de radiaal frequentie van de harmonische excitatie is. Kan de bal nu nog steeds in rust op de bewegende ondergrond blijven liggen? Ja, als de versnelling van de ondergrond kleiner is dan de valversnelling,

$$A\Omega^2 < g,$$

dan blijft de contactkracht tussen bal en ondergrond positief en bestaat er nog steeds een evenwichtspunt. We beschouwen het geval  $A\Omega^2 < g$  (de existentievoorwaarde voor het evenwicht) en laten de bal van een zekere hoogte los. Eén van de drie volgende mogelijke scenario’s treedt dan op:

- de dynamica van de bal wordt door een periodieke of chaotische attractor aangetrokken en de bal blijft al stuitend in beweging;
- de dynamica van de bal convergeert in een eindige tijd en een oneindig aantal stoten naar het evenwichtspunt en blijft daarna in rust;
- de bal wordt door de bewegende ondergrond stootvrij opgevangen en blijft daarna in rust.

Voor het laatste geval heb je geluk nodig: de relatieve snelheid tussen bal en ondergrond moet precies nul zijn op het tijdstip van botsing. Het evenwichtspunt van een bal op een oscillerende ondergrond wordt

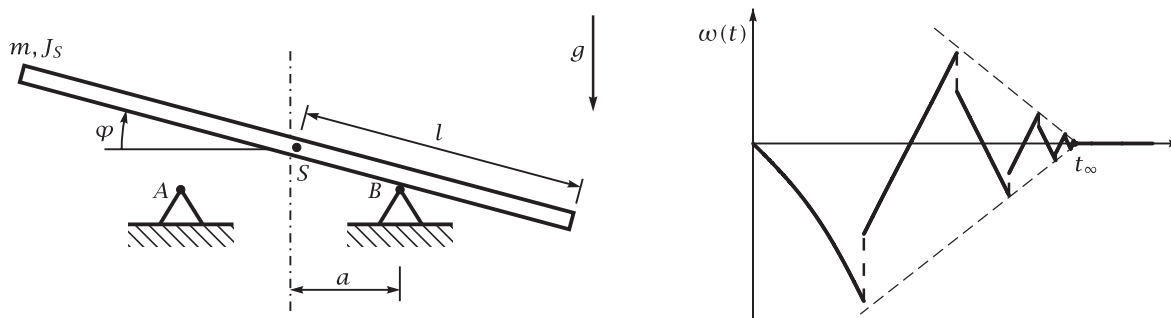
duis vaak ook weer door een Zeno-punt bereikt (scenario 2). Maar niet elk Zeno-punt is een evenwichtspunt. Het aanliggen van de bal op de bewegende ondergrond (de rusttoestand) is niet meer invariant als niet meer aan de existentievoorwaarde voor het evenwicht is voldaan: na een zekere tijd zal het contact tussen bal en ondergrond worden verbroken. Nu kan weer één van de drie genoemde scenario’s optreden. Als scenario 2 optreedt, dan keert de bal door een oneindig aantal stoten in een eindige tijd weer terug naar een nieuwe rustfase. Het hele proces herhaalt zich omdat ook deze rustfase maar tijdelijk is. We verkrijgen zo een periodieke oplossing waarbij een Zeno-punt onderdeel is van de periodieke oplossing.

Het stuiterbalprobleem met oscillerende ondergrond roept veel fundamentele vragen op. Onder welke voorwaarde is het evenwichtspunt globaal attractief en stabiel? Dit geeft aanleiding tot uitgebreid onderzoek naar stabiliteitseigenschappen van niet-gladde dynamische systemen [1–2].

**De wankelende staaf**

Bij het stuiterbalprobleem treedt het Zeno-gedrag alleen op voor onvolkomen elastische botsing ( $\epsilon > 0$ ) en niet voor inelastische botsing ( $\epsilon = 0$ ). Is onvolkomen elastische botsing noodzakelijk voor Zeno-gedrag in mechanische systemen?

We beschouwen een homogene staaf (zie Figuur 2) met lengte  $2l$ , massa  $m$  en traagheidsmoment  $J_S = \frac{1}{3} ml^2$  ten opzichte van het zwaartepunt, welke op twee steunpunten  $A$  en  $B$  kantelen kan [3–4]. De steunpunten bevinden zich elk op een afstand  $a$  links en rechts van het zwaartepunt van de staaf. Wrijving verhindert het glijden van de staaf over de steunpunten. We nemen aan dat de botsingen tussen staaf en steunpunten inelastisch zijn ( $\epsilon = 0$ ) en beschouwen kantelbewegingen waarvoor de staaf altijd met minstens één steunpunt in contact is. De beweging kan daarom met de kantelhoek  $\varphi(t)$  worden beschreven. Voor  $\varphi = 0$  is de staaf met beide steunpunten in contact. Met  $\gamma_A$  duiden we de relatieve snelheid aan tussen steunpunt  $A$  en



Figuur 2 De wankelende staaf

de staaf en met  $\Lambda_A$  een impulsieve stootkracht welke het steunpunt  $A$  op de staaf uitoefent, en evenzo voor steunpunt  $B$ . Als er zich een botsing in steunpunt  $A$  voordoet dan wordt er onder invloed van de stoot  $\Lambda_A > 0$  aan Newtons stootwet voldaan:

$$\Lambda_A > 0: \quad \gamma_A^+ = -\varepsilon\gamma_A^- = 0.$$

In dit geval participeert steunpunt  $A$  actief in de botsing. Wat gebeurt er als de staaf in contact is met steunpunt  $A$  en er een botsing optreedt tussen de staaf en steunpunt  $B$ ? Met andere woorden: de staaf kantelt om steunpunt  $A$  en klapt op steunpunt  $B$ . Nu zijn er twee mogelijkheden. De eerste mogelijkheid is dat beide steunpunten actief participeren in het botsingsproces, waaruit volgt dat  $\gamma_A^+ = \gamma_B^+ = 0$  en de staaf met één klap tot stilstand komt. De andere mogelijkheid is dat het steunpunt  $A$  niet actief meedoet aan het botsingsproces. Doe het volgende gedachte-experiment: iemand slaat met een klap je hoed van je hoofd (van onder naar boven). Doet dat pijn? Nee, er treedt geen stoot tussen je hoofd en de hoed op! In het passieve geval verricht steunpunt  $A$  geen stoot op de staaf en kan het contact met steunpunt  $A$  worden verbroken:

$$\Lambda_A = 0: \quad \gamma_A^+ \geq 0.$$

Samenvattend vinden we een gegeneraliseerde stootwet van Newton voor inelastische botsing

$$\Lambda_A \geq 0, \quad \gamma_A^+ \geq 0, \quad \Lambda_A \gamma_A = 0,$$

en evenzo voor botsing op steunpunt  $B$ . Er moet dus voor elk contactpunt beslist worden of het actief of passief aan de botsing meedoet: een combinatorisch probleem. Naast de stootwetten moet ook worden voldaan aan de stootvergelijkingen

$$\begin{aligned} m(v^+ - v^-) &= \Lambda_A + \Lambda_B, \\ J_S(\omega^+ - \omega^-) &= a\Lambda_A - a\Lambda_B, \end{aligned}$$

waarbij  $v = \frac{1}{2}(\gamma_A + \gamma_B)$  de verticale snelheid van het zwaartepunt is en  $\omega = \dot{\varphi} = \frac{1}{2a}(\gamma_A - \gamma_B)$  de rotatiesnelheid. De stootwetten vormen samen met de stootvergelijkingen een twee-dimensionaal lineair complementariteitsprobleem [3]. Het combinatorische probleem van de stootdynamica kan zo in een wiskundige standaardvorm uit de besliskunde worden gebracht.

Laten we eens aannemen dat de staaf roterend om  $A$  op steunpunt  $B$  klapt en kantelt. Steunpunt  $A$  wisselt dan geen impuls uit met de staaf,  $\Lambda_A = 0$ . Voor dit geval geldt dus  $\gamma_A^- = \gamma_B^+ = 0$  en daarom

$v^- = \frac{1}{2}\gamma_B^- = -a\omega^-$  en  $v^+ = \frac{1}{2}\gamma_A^+ = a\omega^+$ . Elimineren we  $\Lambda_B$  uit de stootvergelijkingen, dan volgt  $J_S(\omega^+ - \omega^-) = -am(v^+ - v^-)$ . Met de gevonden kinematische betrekkingen geeft dit

$$J_S(\omega^+ - \omega^-) = -ma^2(\omega^+ + \omega^-)$$

hetgeen we kunnen schrijven als

$$\omega^+ = \frac{J_S - ma^2}{J_S + ma^2} \omega^-.$$

Hierbij hebben we stilzwijgend aangenomen dat de staaf *kantelt*, dus dat  $\omega$  zijn teken behoudt. Kantelbewegingen van de staaf zijn daarom alleen mogelijk voor  $J_S > ma^2$ . Dit geeft voor een homogene staaf de voorwaarde  $a/l < 1/\sqrt{3} \approx 0.58$ . Als aan deze voorwaarde is voldaan dan kantelt de staaf onder invloed van de zwaartekracht heen en weer en bij elke botsing wordt een deel van de kinetische energie gedissipeerd, want  $|\omega^+|$  is immers kleiner dan  $|\omega^-|$ . Tussen twee botsingen wordt de dynamica gegeven door de bewegingsvergelijking

$$(J_S + ma^2)\ddot{\varphi} = -mga \cos \varphi \operatorname{sign} \varphi.$$

Met de transformatie  $z = |\varphi|$  kunnen we de kantelbewegingen van de staaf beschrijven met de bewegingsvergelijking

$$\ddot{z} = -\frac{mga}{J_S + ma^2} \cos z, \quad z > 0,$$

en de stootwet voor  $z = 0$ ,

$$\dot{z}^+ = -\frac{J_S - ma^2}{J_S + ma^2} \dot{z}^-.$$

Voor kleine waarden van de kantelhoek  $z$  herkennen we hierin de bewegingsvergelijking van de stuitbal met effectieve valversnelling  $mga/(J_S + ma^2)$ , restitutiecoëfficiënt  $(J_S - ma^2)/(J_S + ma^2)$  en beginhoogte  $z(t_0)$ . Net zoals bij het stuitbalprobleem worden de tijden tussen de botsingen steeds korter. De staaf komt na oneindig veel heen en weer gewankel in een eindige tijd tot rust. Zelfs onder de aanname van inelastische botsing kan het in mechanische systemen met meerdere contactpunten dus toch tot Zeno-gedrag komen.

Als aan de voorwaarde  $J_S > ma^2$  niet is voldaan dan wisselen beide steunpunten een impuls uit met de staaf en ligt de staaf in één klap stil. Heen en weer gewankel is in dit geval niet mogelijk. In feite hebben we het lineaire complementariteitsprobleem handmatig opgelost en hebben we aangetoond dat bij  $J_S = ma^2$  de oplossing kwalitatief verandert.



Figuur 3 Achilles en de schildpad op de glijbaan

Het gevonden resultaat kan je proefondervindelijk makkelijk controleren. Je kan bijvoorbeeld een liniaal of plank op twee gummetjes nemen. Als je de gummetjes dicht bij elkaar zet dan kantelt de liniaal heen en weer en zie je het Zeno-gedrag. Als je de gummetjes ver uit elkaar zet,  $a/l > 1/\sqrt{3}$ , dan blijft de liniaal met één klap liggen en siddert dan nog even na. De uit het model gedissipeerde energie heeft zich deels in niet-gemodelleerde trillingen van de staaf omgezet. Dissipatie kan dus opgevat worden als een energiestroom van gemodelleerde vrijheidsgraden naar niet-gemodelleerde vrijheidsgraden.

### Achilles en de schildpad op de glijbaan

Het stuiterbalprobleem is een archetype van Zeno-gedrag in de mechanica. Wat gebeurt er als we niet een verticaal vrijvallende bal beschouwen, maar de bal op een glijbaan zetten met onderaan een schot waarop de bal terugkaatst? Om het probleem academisch te houden (want niets is toch leuker dan dat?) nemen we aan dat er geen wrijving is, de bal een puntmassa is welke altijd de glijbaan volgt en na botsing met het schot over de glijbaan weer omhoog beweegt. Voor een rechte glijbaan met hellingshoek  $\theta$  wordt het probleem met  $\sin \theta$  geschaald en is daarom equivalent aan het verticale stuiterbalprobleem. Interessanter wordt het pas als de glijbaan, welke zich in een verticaal vlak bevindt, door een kromme wordt beschreven. Komt de bal dan voor  $\varepsilon > 0$  in eindige tijd tot rust?

In de tuin van het Huis Hofwijck neemt Christiaan Huygens (1629–1695) de schildpad onder zijn arm, klimt de ladder op, en zet de schildpad op de door hem geconstrueerde glijbaan (zie Figuur 3). De kromme die de glijbaan beschrijft is een cycloïde die verticaal begint en horizontaal eindigt. De schildpad suist naar beneden en komt na een tijd

$$T_0 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

aan, waarbij  $h$  de hoogte van de glijbaan is. Onder aangekomen knalt de schildpad tegen het schot en er treedt een inelastische botsing op. De schildpad ligt dus na één doffe klap stil. De beduusde schildpad wordt in de moestuin gezet en nu is het de beurt aan Achilles. Achilles is zwaarder dan de schildpad maar heeft, omdat we alle vormen van wrijving verwaarlozen, dezelfde tijd nodig om het schot te bereiken. De lichaamsbouw van de gespierde Achilles is wat elastischer dan die van de schildpad en Achilles stuit weer terug, zij het met een kleinere snelheid dan waarmee hij aangekomen is. Hij komt daarom minder hoog dan de beginhoogte  $h$ . Tot grote verbazing van Achilles heeft hij dezelfde tijd nodig om tot deze kleinere hoogte te komen en nogmaals die tijd om weer terug te keren naar het schot.

Christiaan Huygens glimlacht. In het Huis Hofwijck hangt een door hem ontworpen slingeruurwerk waarvoor de slingertijd onafhankelijk is van de maximale uitwijking. Hij weet heel goed dat de cycloïde een tautochrone eigenschap heeft: de benodigde tijd om van een willekeurige beginhoogte naar beneden te glijden is onafhankelijk van de beginhoogte [5].

Door de tautochrone eigenschap van de glijbaan is de tijd tussen twee botsingen gelijk aan  $2T_0$ , onafhankelijk van de restitutiecoëfficiënt  $\varepsilon > 0$ . Voor  $n$  botsingen met het schot heeft Achilles (opgevat als puntmassa) dus een tijd

$$T_n = T_0 + \sum_{i=2}^n 2T_0 = (2n-1) \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

nodig en is dan nog steeds niet in rust, en de tijd om tot rust te komen is daarom oneindig. De totale mechanische energie, als som van

potentiële en kinetische energie, is een afnemende trapfunctie welke *asymptotisch* naar nul convergeert. In dit geval heeft de oneindige som  $T_\infty$  dus een oneindige waarde en kunnen we niet van Zeno-gedrag spreken. Natuurlijk zijn er ook krommes, waarvoor de tijden tussen de botsingen wel afnemen, maar waarvoor de oneindige som toch een oneindige waarde oplevert.

In werkelijkheid is er altijd droge wrijving. Achilles zal onder invloed van droge wrijving na een eindig aantal botsingen in een eindige tijd ergens op de tautochrone glijbaan stil komen te liggen.

### Een brachistochrone met restitutie

Iemand die thuis is in de variatierekening stelt zich natuurlijk de vraag: voor welke vorm van de glijbaan komt Achilles het snelst tot rust? Dit probleem is een combinatie van het klassieke brachistochrone probleem van Johann Bernoulli en de stootwet van Newton. Een raar ding. Immers, de heren Bernoulli en Newton hadden het niet zo op met elkaar [6].

Laten we eerst voor een willekeurige vorm van de glijbaan de tijd tot rust berekenen. We beschrijven de vorm van de glijbaan met de functie  $y(x)$  in het coördinatensysteem  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$  waarbij de valversnelling in positieve  $\mathbf{e}_y$ -richting werkt, zie Figuur 4a. Een puntmassa  $m$  wordt op  $t = t_0$  zonder snelheid in het beginpunt  $O$  met coördinaten  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  losgelaten en glijdt wrijvingsloos naar het eindpunt  $B$  met coördinaten  $(x_B, y_B)$  waar zich een schot bevindt. We duiden met  $(x(t), y(x(t)))$  de positie van de massa op tijdstip  $t$  aan en nemen dus stilzwijgend aan dat het contact tussen de massa en de glijbaan niet wordt verbroken. Daarnaast moet de massa tegen het schot kunnen blijven liggen, dus we verlangen dat aan de eis  $y'(x_B) \geq 0$  is voldaan. Voor een infinitesimaal stukje afgelegde weg  $ds$  langs de kromme geldt

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

De baansnelheid  $v = ds/dt$  volgt uit energiebehoud

$$\frac{1}{2} m (v(t))^2 = mgy(x(t)), \quad t_0 \leq t < t_1,$$

waarbij  $t_1$  het tijdstip is van de eerste botsing met het schot. Na scheiden van veranderlijken vinden we het tijdsverschil

$$T_0 = t_1 - t_0 = \int_{t_0}^{t_1} dt = \int_0^{x_B} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}} dx.$$

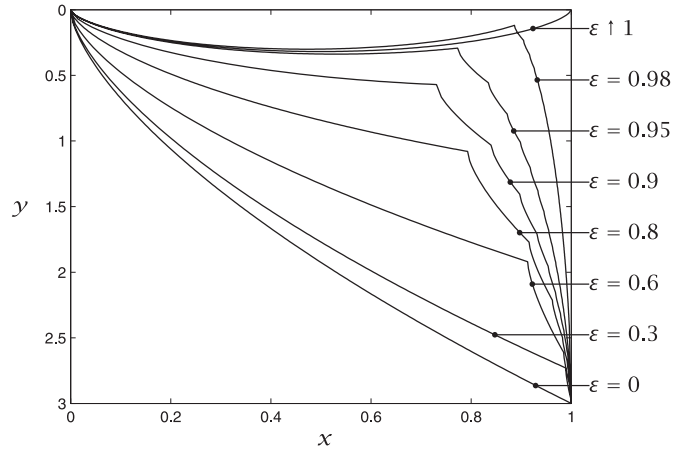
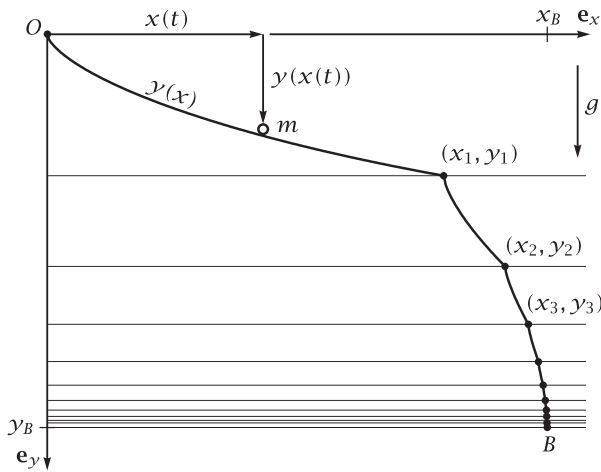
Dit is de welbekende functionaal van het klassieke brachistochrone probleem. In  $B$  aangekomen botst de puntmassa met snelheid  $v^-(t_1) = \sqrt{2gy_B}$  op het schot en geldt de stootwet

$$v^+(t_1) = -\varepsilon v^-(t_1).$$

De massa beweegt zich met snelheid  $v^+(t_1)$  weer omhoog en bereikt een maximale hoogte  $h_1 = y_B - y_1$ , welke weer uit energiebehoud volgt

$$mgh_1 = \frac{1}{2} m (v^+(t_1))^2 = \varepsilon^2 mgy_B.$$

De hoogte van het eerste omkeerpunt van de beweging wordt dus



Figuur 4 Brachistochrone glijbaan met restitutie

gegeven door

$$y_B - y_1 = \epsilon^2 y_B \implies y_1 = (1 - \epsilon^2) y_B.$$

Voor  $\epsilon > 0$  herhaalt zich dit proces oneindig vaak en zo verkrijgen we de  $y$ -waarden van oneindig veel omkeerpunten  $(x_i, y_i)$ ,

$$y_B - y_i = \epsilon^2 (y_B - y_{i-1}) \implies y_i = (1 - \epsilon^{2i}) y_B.$$

De hoogten van de omkeerpunten liggen met  $y_i$  a priori vast. De horizontale posities  $x_i$  moeten aan  $y(x_i) = y_i$  voldoen. Op dezelfde manier leiden we af dat de tijdsduur tussen twee botsingen

$$T_i = t_{i+1} - t_i = 2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2g(y - y_i)}} dx$$

bedraagt. De totale tijd die de massa nodig heeft om tegen het schot tot rust te komen is daarom te schrijven als een oneindige som

$$T[y] = \sum_{i=0}^{\infty} T_i = \int_0^{x_B} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}} dx + \sum_{i=1}^{\infty} 2 \int_{x_i}^{x_B} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2g(y - y_i)}} dx.$$

De optimale glijbaan voor Achilles is dus te formuleren als een variatieprobleem: vind de kromme  $y(x)$  die de functionaal

$$T[y] = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{x_i}^{x_{i+1}} F_i(y, y') dx$$

met de Lagrangiaan

$$F_0 = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}}, \quad F_i = F_{i-1} + 2\sqrt{\frac{1 + y'^2}{2g(y - y_i)}}, \quad i \geq 1,$$

minimaliseert onder de randvoorwaarden  $y(0) = 0$ ,  $y(x_B) = y_B$  en  $y'(x_B) \geq 0$ . Dit probleem in gesloten

vorm oplossen wordt erg lastig, maar laten we eens kijken hoever we komen.

De Lagrangiaan is niet-differentieerbaar op de omkeerpunten  $(x_i, y_i)$ . We moeten daarom toelaten dat de gezochte kromme  $y(x)$  mogelijk niet-differentieerbaar is voor  $x = x_i, i \geq 1$ . Zulke stuksgewijs differentieerbare oplossingen van variatieproblemen worden ook wel 'gebroken extremalen' genoemd.

Een noodzakelijke voorwaarde voor een minimum is dat de functionaal stationair is voor de gezochte kromme  $y(x)$ . Variatie van  $y$  op elk open deelinterval  $(x_i, x_{i+1}), i \geq 0$ , geeft de Euler-Lagrange vergelijking. Voor het eerste deelinterval  $(x_0, x_1)$  is de Lagrangiaan  $F_0$  gelijk aan die van het klassieke brachistochrone probleem en vinden we de differentiaalvergelijking van de cycloïde. De Euler-Lagrange vergelijking op de overige deelintervallen  $(x_i, x_{i+1}), i \geq 1$ , levert een veel lastigere differentiaalvergelijking op die niet (eenvoudig) in gesloten vorm op te lossen is.

Variatie van de horizontale posities  $x_i$  van de omkeerpunten geeft een tweede noodzakelijke voorwaarde: op alle omkeerpunten moet voldaan zijn aan de tweede Weierstrass-Erdmann voorwaarde. Omdat de Lagrangiaan niet afhankelijk is van  $x$  is dit in feite de Beltrami-identiteit

$$\lim_{x \uparrow x_i} \left( F_{i-1} - y' \frac{\partial F_{i-1}}{\partial y'} \right) = \lim_{x \downarrow x_i} \left( F_i - y' \frac{\partial F_i}{\partial y'} \right)$$

met  $F_i = F_i(y, y')$ . De linker limiet heeft een eindige waarde. De rechter limiet heeft een term met  $y - y_i$  in de noemer en kan alleen een eindige waarde opleveren als  $\lim_{x \downarrow x_i} y'(x) = \infty$ . De optimale glijbaan heeft dus een verticale helling rechts van elk omkeerpunt  $(x_i, y_i)$ . Dit is eigenlijk niet verwonderlijk. Bij het omkeren op de omkeerpunten  $(x_i, y_i)$  heeft de puntmassa geen snelheid en de optimale glijbaan zal daarom een verticale helling aannemen om te zorgen dat de puntmassa zo snel mogelijk op snelheid komt. Evenzo zal de optimale glijbaan verticaal in het punt  $(x_0, y_0)$  vertrekken omdat ook de beginsnelheid nul is.

Samenvattend kunnen we het volgende over de optimale glijbaan zeggen. De kromme  $y(x)$  die de optimale glijbaan beschrijft heeft een knik voor  $x = x_i, i \geq 1$ . Op elk van deze knikpunten (of omkeerpunten) is de rechter afgeleide oneindig, evenals op het beginpunt. De kromme  $y(x)$  is een cycloïde op het eerste deelinterval  $(x_0, x_1)$ . Als we nog meer willen weten, dan zullen we met numerieke methoden aan de slag moeten. Discretisatie van de functionaal geeft een eindig-dimensionaal

optimaliseringsprobleem dat met gebruikelijke numerieke methoden opgelost kan worden. Figuur 4b toont een aantal optimale glijbaanvormen voor  $(x_B, y_B) = (1, 3)$  en voor verschillende waarden van de restitutiecoëfficiënt  $\varepsilon$ . De oplossing van het klassieke brachistochrone probleem is een cycloïde tussen  $O$  en  $B$  welke verticaal in  $O$  vertrekt en voor deze keuze van  $(x_B, y_B)$  aan de voorwaarde  $y'(x_B) \geq 0$  voldoet. Het brachistochrone probleem met restitutiecoëfficiënt  $\varepsilon = 0$  is dus in dit geval equivalent aan het klassieke brachistochrone probleem. Voor  $0 < \varepsilon < 1$  zien we oneindig veel knikpunten in de baan, die zich in punt  $B$  ophopen. Als  $\varepsilon$  nadert naar 1 dan volgt  $y_i \downarrow 0$  en wordt de verhouding  $(t_\infty - t_1)/(t_1 - t_0)$  in de limiet oneindig groot. De optimale glijbaan voor  $\varepsilon \uparrow 1$  zal daarom de omkeerpunten op  $(x_B, 0)$  leggen om zo het tijdsverschil  $t_\infty - t_1$  te minimaliseren. De optimale glijbaanvorm voor  $\varepsilon \uparrow 1$  stelt zich dus samen uit de klassieke brachistochrone oplossing tussen  $O$  en  $(x_B, 0)$  (een cycloïde) en de oplossing van het verticale stuiterbalprobleem met  $\varepsilon \uparrow 1$ .

De knikpunten in de baan zijn lastig met de gemaakte aannamen te verenigen. We hebben stilzwijgend aangenomen dat de massa het contact met de baan niet verliest. Echter, een puntmassa op een glijbaan zal op de knikpunten het contact met de baan verliezen. We beschouwen dus feitelijk niet een massa op een glijbaan maar een kraal langs een draadprofiel. Tevens hebben we aangenomen dat de wrijving verwaarloosbaar is, ook op de knikpunten. Voor een kraal-op-draadprofiel is deze aanname slecht te verdedigen.

De behandeling van het hier voorgestelde brachistochrone probleem met restitutie is allesbehalve af. In welke functieruimte zoeken we eigenlijk een oplossing van het variatieprobleem? Hoe zit het met existentie en eenduidigheid van de oplossing? Weten we zeker dat de gevonden numerieke oplossingen ook daadwerkelijk globale minima zijn van de (gediscretiseerde) functionaal?

Het brachistochrone probleem met restitutie geeft een beetje een onbevredigend gevoel: we hebben een halve oplossing van een nogal academisch probleem. Dit onbehagen stuit een wiskundige waarschijnlijk tegen de borst maar is in technische wetenschappen heel normaal. Om technische problemen op te lossen bedenk je een aaneenschakeling van abstracte academische problemen. Elk van deze academische problemen geeft je inzicht in het gestelde technische probleem, ook als zo'n academisch probleem niet in gesloten vorm op te lossen is en een noodgreep naar numerieke methoden moet worden genomen.


Op die manier speelt de mechanica, als een van de oudste technische wetenschappen, een belangrijke rol in de verdere ontwikkeling van de wiskunde. Het hier voorgestelde brachistochrone probleem met restitutie maakt duidelijk dat zich ook in de variatierekening Zeno-gedrag kan voordoen.

### Tot slot

Een aantal voorbeelden van Zeno-gedrag bij stootverschijnselen in mechanische systemen zijn de revue gepasseerd. Het stuiterbalprobleem en het probleem van de wankelende staaf laten zien dat een evenwichtspunt onder invloed van Zeno-gedrag in een eindige tijd bereikt wordt. Zeno-gedrag kan dus aanleiding geven tot attractie *in eindige tijd*. Omdat deze attractie niet een asymptotisch karakter heeft, zouden we het symptotische attractiviteit kunnen noemen. Symptotische attractiviteit heeft een belangrijke consequentie: de oplossing van het dynamische systeem is in teruggaande tijd niet meer eenduidig. Als je een stuiterbal op de grond ziet liggen weet je immers niet hoe lang hij daar al ligt. Deze dagelijkse ervaring komt mooi tot uitdrukking in het wiskundige model.

Een bekend probleem uit de regeltechniek is het volg-probleem, waarbij de regelaar een gegeven traject van het mechanische systeem stabiliseert. Bij het volg-probleem is het doel de volgfout zo snel mogelijk af te laten nemen. Symptotische attractiviteit van het gewenste traject is dus wenselijk. Op die manier heeft Zeno-gedrag een technische toepassing, waarbij opgemerkt moet worden dat een ophopingspunt van regelacties in de praktijk niet (of slecht) uitvoerbaar is.

De numerieke simulatie van hybride systemen met Zeno-gedrag brengt een probleem met zich mee. Een simulatiemethode welke elke discrete toestandsverandering expliciet berekent zal op een Zeno-punt vastlopen. Meer geavanceerde numerieke simulatiemethoden voor hybride systemen zijn in zekere zin 'onscherp', dat wil zeggen, ze maken feitelijk geen onderscheid tussen continue en discrete toestandsveranderingen.

Zeno-gedrag in mechanische systemen is een fenomeen met gevolgen voor modelvorming, technische toepassingen en niet-lineair dynamisch gedrag. Zeno-gedrag is daarom veel meer dan een aardige curiositeit. We zullen Achilles en de schildpad dus nog wel een tijdje in de wetenschap blijven zien. 

### Referenties

- 1 Remco I. Leine en Thomas F. Heimsch, 'Global uniform symptotic attractive stability of the non-autonomous bouncing ball system', *Physica D*, ingediend 2010.
- 2 Remco I. Leine en Nathan van de Wouw, *Stability and Convergence of Mechanical Systems with Unilateral Constraints*, Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics, Vol. 36, Springer, Berlijn, 2008.
- 3 Christoph Glocker, *Dynamik von Starrkörpersystemen mit Reibung und Stößen*, VDI-Fortschrittsberichte Mechanik/Bruchmechanik, Reihe 18, Nr. 182, VDI, Düsseldorf, 1995.
- 4 Christoph Glocker, 'On frictionless impact models in rigid-body systems', *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, **359**, 2385–2404, 2001.
- 5 Christiaan Huygens, *Horologium oscillatorium sive de motu pendulorum ad horologia aptato demonstrationes geometricæ*, F. Muguet, Parijs, 1673.
- 6 Jan van Maanen, *Een complexe grootheid: leven en werk van Johann Bernoulli 1667-1748*, Epsilon Uitgaven 34, Utrecht, 1995.