

Modellierung des viskoelastischen Werkstoffverhaltens von Kunststoffen mit fraktionalen Zeitableitungen

André Schmidt, Stefan Oexl, Lothar Gaul

Institut A für Mechanik, Universität Stuttgart
Pfaffenwaldring 9, 70550 Stuttgart, Germany

Summary

The theory of fractional derivatives can be considered as an extension of derivatives of integer order. With this concept, generalized constitutive equations are derived which describe the constitutive behaviour of viscoelastic solids in time and frequency domain with improved curvefitting properties and less parameters. The implementation of the generalized constitutive equation in a finite element code is presented and the material parameters of a polymer are identified. This material model is then used to perform a transient three-dimensional finite element analysis of a bolted joint including a polymer layer. Finally, the numerical results are compared with experimental data.

Keywords

fractional derivatives, viscoelastic material, finite elements

1 Einleitung

Der Einsatz von Kunststoffen in der Technik wächst seit vielen Jahren kontinuierlich. Ihre Vorteile gegenüber Metallen liegen in der Gewichtsersparnis, Korrosionsbeständigkeit und Schlagunempfindlichkeit. Sowohl bei der Entwicklung neuer Kunststoffe als auch bei deren Produktions- und Verarbeitungsverfahren wurden in der Vergangenheit große Fortschritte erzielt. Dadurch ergab sich der Bedarf nach neuen, angepassten Berechnungsverfahren, um den Ingenieur sowohl bei Auslegung des Herstellungsverfahrens als auch bei der konstruktiven Gestaltung und Dimensionierung von Kunststoffteilen unterstützen zu können.

Eine zentrale Bedeutung bei der Berechnung geometrisch komplexer Konstruktionen fällt der Methode der Finiten Elemente (FEM) zu. Da die meisten Kunststoffe ein ausgeprägtes Kriechverhalten aufweisen, wird man häufig auch bei statischen Lastfällen zeitabhängige Berechnungen durchführen müssen. Ein zentrales Problem besteht dabei in der Modellierung der Dämpfung. In kommerziellen FE-Codes werden die Dämpfungseigenschaften bei transienten Berechnungen durch geschwindigkeitsproportionale Dämpfung beschrieben. Setzt man eine periodische Anregung voraus, folgt daraus ein linearer Zusammenhang zwischen Verlustfaktor (pro Zyklus dissipierte Energie bezogen auf die maximale gespeicherte Energie) und Schwingungsfrequenz. Bei der experimentellen Untersuchung des Werkstoffverhaltens zeigt sich jedoch eine komplexere Abhängigkeit des Verlustfaktors von der Frequenz. Aus diesem Grund werden bei einer FE-Berechnung mit geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung hohe Frequenzen zu stark und niedrige Frequenzen zu schwach gedämpft, weshalb ein solches Modell nur für einen engen Frequenzbereich geeignet ist. Ein ähnliches Problem ergibt sich bei der Berechnung des Kriechverhaltens, bei dessen Modellierung mittels geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung Zeitverläufe des Kriechmoduls erhalten werden, die erheblich von real gemessenen Kurven abweichen (vgl. auch Kap. 7).

Durch einen Ansatz mit fraktionaler Zeitableitungen kann eine sehr gute Adaption des Materialverhaltens über einen großen Zeit- bzw. Frequenzbereich (mehrere Dekaden) erreicht werden. Darüber hinaus kommt ein solches Modell mit wenigen Parametern aus und liefert kausale Antworten. Da fraktionale Ableitungen einen „integralen Anteil“ besitzen, ist das Materialverhalten von der Belastungs- und Verformungsgeschichte abhängig, wie es auch bei realen Werkstoffen beobachtet wird. Eine physikalische Begründung für ein solches fraktionales Materialmodell wurde von Bagley und Torvik geliefert [1]. Ausgehend von den molekulartheoretischen Arbeiten zu viskoelastischen Materialien von Rouse und Ferry [10],[4] haben sie die Äquivalenz zwischen deren Ergebnissen und dem Auftreten fraktionaler Ableitungen in den entsprechenden Stoffgesetzen gezeigt.

In der Folge wird ein fraktionales Dämpfungsmodell hergeleitet und seine Implementierung in einen FE-Code dargestellt. Im Anschluss an eine Parameteridentifikation wird mit Hilfe dieses Modells in einer transienten 3D-Berechnung das Kriechverhalten des Polymers Delrin[®] der Firma DuPont[®] durchgeführt und mit experimentell ermittelten Daten verglichen.

2 Fraktionale Ableitungen

Genau genommen ist der Begriff der fraktionalen Ableitung irreführend, da er impliziert, dass als Grad der Ableitung nur rationale Zahlen zulässig sind. Tatsächlich gelten die folgenden Definitionen aber für alle reellen Zahlen; sogar komplexe Ableitungsgrade sind definiert. Darüber hinaus schließen fraktionale Ableitungen auch Integrationen beliebigen Grades ein, weshalb in der englischsprachigen Literatur auch von „fractional integrodifferential operators“ gesprochen wird.

Betrachten wir zunächst die Definitionsgleichungen ganzzahliger Zeitableitungen:

$$\frac{d^1 f(t)}{dt^1} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t - \Delta t)}{\Delta t} \quad (1)$$

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t) - 2f(t - \Delta t) + f(t - 2\Delta t)}{(\Delta t)^2} \quad (2)$$

$$\frac{d^3 f(t)}{dt^3} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t) - 3f(t - \Delta t) + 3f(t - 2\Delta t) - f(t - 3\Delta t)}{(\Delta t)^3} \quad (3)$$

⋮

Eine Verallgemeinerung auf alle ganzzahligen Ableitungsgrade n kann mit Hilfe des Binomialkoeffizienten vorgenommen werden:

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[(\Delta t)^{-n} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} f(t - j\Delta t) \right] \quad (4)$$

mit

$$\binom{n}{j} = \begin{cases} \frac{n!}{j!(n-j)!} & \text{für } 0 \leq j \leq n \\ 0 & \text{für } 0 \leq n < j \end{cases} \quad (5)$$

als der Definition des Binomialkoeffizienten für alle natürlichen Zahlen n und j . Setzt man

$$\Delta t = \frac{t}{N} \quad \text{mit } N \in [0, \infty) \quad (6)$$

lässt sich in (4) in

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{t}{N} \right)^{-n} \sum_{j=0}^{N-1} (-1)^j \binom{n}{j} f\left(t - j \frac{t}{N}\right) \right] \quad (7)$$

umformen. Die erweiterte Definition des Binomialkoeffizienten für reelle Zahlen n führt zu der Beziehung

$$\begin{aligned} (-1)^j \binom{n}{j} &= (-1)^j \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2) \cdots (n-j+2)(n-j+1)}^{j \text{ Faktoren}}}{j!} \\ &= \frac{(j-n-1)(j-n-2) \cdots (j-n-1-j+2)(j-n-1-j+1)}{j!} \\ &= \binom{j-n-1}{j} \equiv \frac{\Gamma(j-n)}{\Gamma(-n)\Gamma(j+1)} \end{aligned} \quad (8)$$

mit Γ als der Gammafunktion. Durch den Übergang auf die Gammafunktion, die für alle reellen Zahlen definiert ist, hat man eine Verallgemeinerung der Definitionsgleichung (4) auf Ableitungen beliebig reeller Ordnung, im Folgenden mit q bezeichnet, gefunden. Führt man zusätzlich die Abkürzung

$$A_{j+1} = \frac{\Gamma(j-q)}{\Gamma(-q)\Gamma(j+1)} \quad (9)$$

ein, folgt aus (7)

$$\frac{d^q f(t)}{dt^q} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{t}{N} \right)^{-q} \sum_{j=0}^{N-1} A_{j+1} f\left(t - j \frac{t}{N}\right) \right], \quad q \in (-\infty, \infty). \quad (10)$$

Diese Gleichung wird auch als *Grünwald-Definition* fraktionaler Ableitungen und die darin auftretenden Koeffizienten A_{j+1} als *Grünwald-Koeffizienten* bezeichnet.

Es bleibt festzustellen, dass für $q \in \mathbb{N}$ Gleichung (10) in die Definitionsgleichungen ganzzahliger Ableitungen (4) übergeht. Für ganzzahlig negative Werte von q erhält man aus (10) die Integration $(-q)$ -ter Ordnung nach der Riemannschen Definition, so dass (10) auch als Erweiterung der Integration auf beliebig reelle Ordnungen interpretiert werden kann.

Andere, äquivalente Definitionen, wie z.B. die *Riemann-Liouville-Definition* fraktionaler Ableitungen und weitere Eigenschaften dieser Operatoren werden in [7] oder [9] detailliert diskutiert. Die Anwendung der Riemann-Liouville-Definition zur Beschreibung von viskoelastischem Materialverhalten im Zeit- und Frequenzbereich kann [5] entnommen werden.

3 Fraktionales viskoelastisches Stoffgesetz

Viskoelastische Materialien zeichnen sich dadurch aus, dass die Verformungsantworten auf äußere Lasten zeitabhängig und reversibel sind; es treten also keine plastischen Deformationen auf. Die beiden kennzeichnenden Phänomene von viskoelastischen Materialien sind das Kriechen und die Spannungsrelaxation. Das einfachste Modell, mit dem beide Phänomene abgebildet werden können, ist das 3-Parameter-Modell (s. Fig. 1).

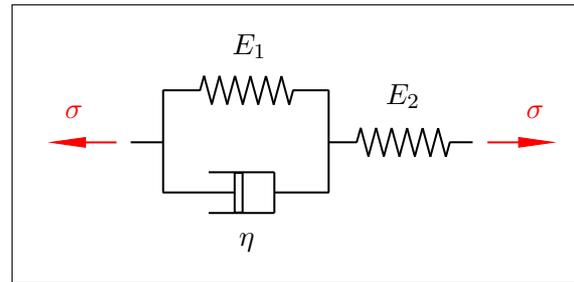


Fig. 1: Drei-Parameter-Modell

Als Stoffgesetz lässt sich für das 3-Parameter-Modell im eindimensionalen Fall der Zusammenhang

$$\sigma + \frac{\eta}{E_1 + E_2} \dot{\sigma} = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \epsilon + \eta \frac{E_2}{E_1 + E_2} \dot{\epsilon} \quad (11)$$

herleiten. Eine Verallgemeinerung von (11) mittels fraktionaler Ableitungen führt auf

$$\sigma + \alpha \left(\frac{d^q}{dt^q} \sigma \right) = E \epsilon + \beta \left(\frac{d^p}{dt^p} \epsilon \right) \quad (12)$$

Der Ausdruck $\frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2}$ wurde dabei durch die Größe E ersetzt.

Im Folgenden sollen einfach unterstrichene Größen Vektoren darstellen, doppelt unterstrichene Größen sind Tensoren 2. Stufe. Für den dreidimensionalen Fall lautet das Stoffgesetz

$$\underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{\alpha}} \left(\frac{d^q}{dt^q} \underline{\underline{\sigma}} \right) = \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\epsilon}} + \underline{\underline{\beta}} \left(\frac{d^p}{dt^p} \underline{\underline{\epsilon}} \right) \quad (13)$$

wobei

$$\underline{\underline{\sigma}} = [\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{zz} \ \sigma_{xy} \ \sigma_{yz} \ \sigma_{zx}]^T \quad (14)$$

$$\underline{\underline{\epsilon}} = [\epsilon_{xx} \ \epsilon_{yy} \ \epsilon_{zz} \ \epsilon_{xy} \ \epsilon_{yz} \ \epsilon_{zx}]^T \quad (15)$$

der Spannungs- bzw. Verzerrungsvektor ist. Die Matrix $\underline{\underline{C}}$ bezeichnet die werkstoffabhängige Materialmatrix, $\underline{\underline{\alpha}}$ und $\underline{\underline{\beta}}$ sind ebenfalls werkstoffabhängig. Der Einfachheit halber werden für den hydrostatischen und den deviatorischen Spannungszustand gleiche Ableitungsordnungen eingesetzt. Eine weiter verbesserte Adaptionsfähigkeit von des Stoffgesetzes (13) erhält man durch Summation über verschiedene Ableitungsgrade der Spannungen und Verzerrungen

$$\underline{\underline{\sigma}} + \sum_{\ell} \underline{\underline{\alpha}}_{\ell} \left(\frac{d^{q_{\ell}}}{dt^{q_{\ell}}} \underline{\underline{\sigma}} \right) = \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\epsilon}} + \sum_{\ell} \underline{\underline{\beta}}_{\ell} \left(\frac{d^{p_{\ell}}}{dt^{p_{\ell}}} \underline{\underline{\epsilon}} \right) \quad (16)$$

Setzt man die Definitionsgleichung der fraktionalen Ableitungen (10) in (16) ein, erhält man schließlich

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}} + \sum_{\ell} \underline{\underline{\alpha}}_{\ell} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{t}{N} \right)^{-q_{\ell}} \sum_{j=0}^{N-1} A_{j+1}^{(q_{\ell})} \underline{\underline{\sigma}} \left(t - j \frac{t}{N} \right) \\ = \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\epsilon}} + \sum_{\ell} \underline{\underline{\beta}}_{\ell} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{t}{N} \right)^{-p_{\ell}} \sum_{j=0}^{N-1} A_{j+1}^{(p_{\ell})} \underline{\underline{\epsilon}} \left(t - j \frac{t}{N} \right) \quad (17) \end{aligned}$$

Man beachte, dass die Grünwald-Koeffizienten von den Werten der Parameter q_{ℓ} bzw. p_{ℓ} abhängen, was durch die eingeklammert hochgestellten Indices verdeutlicht werden soll.

4 Berechnungsalgorithmus

Die nahrungswise Berechnung der fraktionalen Ableitung einer beliebigen Funktion nach (10) kann durch den Verzicht auf den Grenzwertubergang $N \rightarrow \infty$ bewerkstelligt werden. Stattdessen wird eine endliche Summe diskreter Funktionswerte ausgewertet. Ist N endlich und wird

$$\Delta t = \frac{t}{N} \quad (18)$$

gesetzt, vereinfacht sich (10) zu

$$\frac{d^q f(t)}{dt^q} \approx (\Delta t)^{-q} \sum_{j=0}^{N-1} A_{j+1} f(t - j\Delta t) \quad . \quad (19)$$

Für alle $q \notin \mathbb{N}$ sind sämtliche Grünwald-Koeffizienten A_{j+1} von Null verschieden. Beschränkt man sich zudem auf $q > 0$, kann gezeigt werden, dass die durch den Betrag der Grünwald-Koeffizienten $|A_{j+1}|$ gegebene Folge ab einem bestimmten j streng monoton fallend ist und dem Grenzwert 0 zustrebt: wegen

$$\Gamma(x) = (x - 1) \Gamma(x - 1) \quad (20)$$

ist

$$A_{j+1} = \frac{\Gamma(j - q)}{\Gamma(-q)\Gamma(j + 1)} = \frac{j - 1 - q}{j} \cdot \frac{\Gamma(j - 1 - q)}{\Gamma(-q)\Gamma(j)} = \frac{j - 1 - q}{j} \cdot A_j \quad . \quad (21)$$

Für $j > q$ ist

$$|A_{j+1}| = \left| \overbrace{\frac{j - 1 - q}{j}}^{<1} \right| |A_j| < |A_j| \quad (22)$$

und damit die Folge $|A_{j+1}|$ streng monoton fallend. Den Grenzwert für $j \rightarrow \infty$ erhält man durch die Abschätzung

$$\lim_{j \rightarrow \infty} |A_{j+1}| = \left| \frac{1}{\Gamma(-q)} \right| \lim_{j \rightarrow \infty} \left| \frac{\Gamma(j - q)}{\Gamma(j + 1)} \right| < \left| \frac{1}{\Gamma(-q)} \right| \lim_{j \rightarrow \infty} \left| \frac{\Gamma(j)}{\Gamma(j + 1)} \right| \quad , \quad (23)$$

falls

$$j > q + 2 \quad , \quad (24)$$

da die Gammafunktion $\Gamma(x)$ für $x \geq 2$ streng monoton steigend ist. ($\Gamma(x)$ besitzt bei $x_0 \approx 1,46$ ein Minimum und ist bereits für alle $x \geq x_0$ streng monoton steigend). Da $j \in \mathbb{N}$ und damit

$$\Gamma(j + 1) = j! \quad (25)$$

gilt, ist

$$\lim_{j \rightarrow \infty} |A_{j+1}| < \left| \frac{1}{\Gamma(-q)} \right| \lim_{j \rightarrow \infty} \left| \frac{(j - 1)!}{j!} \right| = \left| \frac{1}{\Gamma(-q)} \right| \lim_{j \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{j} \right) = 0 \quad . \quad (26)$$

Durch diese Eigenschaften der Grünwald-Koeffizienten werden für $q > 0$ Funktionswerte umso schwächer gewichtet, je weiter sie zurückliegen. Man spricht auch vom *nachlassenden Gedächtnis*. Das motiviert eine weitere Abschätzung von (19), indem die Summe über j auf N_ℓ Terme begrenzt wird:

$$\frac{d^q f(t)}{dt^q} \approx (\Delta t)^{-q} \sum_{j=0}^{N_\ell} A_{j+1} f(t - j\Delta t) \quad . \quad (27)$$

Setzt man (27) in (16) ein, erhält man schließlich

$$\underline{\sigma}(t) + \sum_{\ell} \underline{\alpha}_\ell (\Delta t)^{-q_\ell} \sum_{j=0}^{N_\ell} A_{j+1}^{(q_\ell)} \underline{\sigma}(t - j\Delta t) = \underline{C} \underline{\epsilon}(t) + \sum_{\ell} \underline{\beta}_\ell (\Delta t)^{-p_\ell} \sum_{j=0}^{N_\ell} A_{j+1}^{(p_\ell)} \underline{\epsilon}(t - j\Delta t) \quad (28)$$

als zeitdiskretes Stoffgesetz.

5 FE-Formulierung

Um das in Kapitel 4 hergeleitete Stoffgesetz in eine FE-Formulierung zu integrieren, wird, der Notation von Bathe [3] folgend, vom Verschiebungs-Ansatz

$$\underline{u} = \underline{H} \hat{\underline{u}} \quad (29)$$

ausgegangen, wobei \underline{u} den Verschiebungsvektor bezeichnet, $\hat{\underline{u}}$ die Knotenpunktverschiebungen sind und die Matrix \underline{H} die Ansatz- bzw. Formfunktionen beinhaltet. Die Verzerrungen $\underline{\epsilon}$ und die Knotenpunktverschiebungen $\hat{\underline{u}}$ sind durch den Zusammenhang

$$\underline{\epsilon} = \underline{B} \hat{\underline{u}} \quad (30)$$

miteinander verknüpft, wobei \underline{B} die entsprechenden räumlichen Ableitungen von \underline{H} enthält. Aus dem Prinzip der virtuellen Arbeiten lässt sich für die Bewegungsgleichung die Beziehung

$$\int_V \underline{B}^T \underline{\sigma} dV + \underline{M} \ddot{\underline{u}} = \underline{R} \quad (31)$$

herleiten. Dabei bezeichnet \underline{R} den Lastvektor, der sich aus den äußeren und den Volumenkräften zusammensetzt; hochgestellte Punkte sollen Zeitableitungen symbolisieren. Die konsistente Massenmatrix \underline{M} ist durch

$$\underline{M} = \int_V \underline{H}^T \rho \underline{H} dV \quad (32)$$

mit ρ als der Dichte des Materials gegeben. Der Einfachheit halber werden im Folgenden die Knotenpunktverschiebungen $\hat{\underline{u}}$ (sowie deren Zeitableitungen) ohne den Akzent $\hat{\cdot}$ dargestellt. Zum Zeitpunkt t nimmt die Bewegungsgleichung (31) die Form

$$\int_V \underline{B}^T {}^t \underline{\sigma} dV + \underline{M} {}^t \ddot{\underline{u}} = {}^t \underline{R} \quad (33)$$

an, wobei die Indices oben links der Variable den Zeitpunkt charakterisieren sollen. Die Größe ${}^t \underline{\sigma}$ erhält man durch Umformung von (28) mit (30):

$$\begin{aligned} {}^t \underline{\sigma} + \sum_{\ell} \underline{\alpha}_{\ell} (\Delta t)^{-q_{\ell}} \left({}^t \underline{\sigma} + \sum_{j=1}^{N_{\ell}} A_{j+1}^{(q_{\ell})} {}^{t-j\Delta t} \underline{\sigma} \right) \\ = \underline{C} \underline{B} {}^t \underline{u} + \sum_{\ell} \underline{\beta}_{\ell} (\Delta t)^{-p_{\ell}} \left(\underline{B} {}^t \underline{u} + \sum_{j=1}^{N_{\ell}} A_{j+1}^{(p_{\ell})} \underline{B} {}^{t-j\Delta t} \underline{u} \right) . \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} {}^t \underline{\sigma} = \left[\underline{I} + \sum_{\ell} \underline{\alpha}_{\ell} (\Delta t)^{-q_{\ell}} \right]^{-1} \left[\left(\underline{C} + \sum_{\ell} \underline{\beta}_{\ell} (\Delta t)^{-p_{\ell}} \right) \underline{B} {}^t \underline{u} \right. \\ \left. + \sum_{\ell} \underline{\beta}_{\ell} (\Delta t)^{-p_{\ell}} \sum_{j=1}^{N_{\ell}} A_{j+1}^{(p_{\ell})} \underline{B} {}^{t-j\Delta t} \underline{u} - \sum_{\ell} \underline{\alpha}_{\ell} (\Delta t)^{-q_{\ell}} \sum_{j=1}^{N_{\ell}} A_{j+1}^{(q_{\ell})} {}^{t-j\Delta t} \underline{\sigma} \right] . \quad (34) \end{aligned}$$

Mit den Abkürzungen

$$\underline{A} = \underline{I} + \sum_{\ell} \underline{\alpha}_{\ell} (\Delta t)^{-q_{\ell}} \quad \text{sowie} \quad \underline{C}^* = \underline{C} + \sum_{\ell} \underline{\beta}_{\ell} (\Delta t)^{-p_{\ell}}$$

erhält man aus (33) und (34)

$$\int_V \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{A}}^{-1} \left[\underline{\underline{C}}^* \underline{\underline{B}}^t \underline{\underline{u}} + \sum_{\ell} \underline{\underline{\beta}}_{\ell} (\Delta t)^{-p_{\ell}} \sum_{j=1}^{N_{\ell}} A_{j+1}^{(p_{\ell})} \underline{\underline{B}}^{t-j\Delta t} \underline{\underline{u}} - \sum_{\ell} \underline{\underline{\alpha}}_{\ell} (\Delta t)^{-q_{\ell}} \sum_{j=1}^{N_{\ell}} A_{j+1}^{(q_{\ell})} t^{-j\Delta t} \underline{\underline{\sigma}} \right] dV + \underline{\underline{M}}^t \underline{\underline{\ddot{u}}} = {}^t \underline{\underline{R}} \quad . \quad (35)$$

Formt man (35) weiter um, ergibt sich

$$\underline{\underline{K}}^* {}^t \underline{\underline{u}} + \underline{\underline{M}}^t \underline{\underline{\ddot{u}}} = {}^t \underline{\underline{R}} - \sum_{\ell} \underline{\underline{\mu}}_{\ell} (\Delta t)^{-p_{\ell}} \sum_{j=1}^{N_{\ell}} A_{j+1}^{(p_{\ell})} t^{-j\Delta t} \underline{\underline{u}} + \int_V \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{A}}^{-1} \sum_{\ell} \underline{\underline{\alpha}}_{\ell} (\Delta t)^{-q_{\ell}} \sum_{j=1}^{N_{\ell}} A_{j+1}^{(q_{\ell})} t^{-j\Delta t} \underline{\underline{\sigma}} dV \quad (36)$$

mit den beiden Abkürzungen

$$\underline{\underline{K}}^* = \int_V \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{C}}^* \underline{\underline{B}} dV \quad \text{und} \quad \underline{\underline{\mu}}_{\ell} = \int_V \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{\beta}}_{\ell} \underline{\underline{B}} dV \quad .$$

6 Implementierung in einen FE-Code für transiente Berechnungen

Die Implementierung von Finiten Elementen mit einer in den vorhergehenden Kapiteln hergeleiteten Dämpfungsbeschreibung in einen FE-Code erfolgt über benutzerdefinierte Elemente. Dazu muss der verwendete FE-Code eine entsprechende Schnittstelle zur Verfügung stellen.

Bei einem impliziten Zeitintegrationsverfahren, wie z.B. dem Newmark-Algorithmus, wird das dynamische Gleichgewicht zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ aufgestellt (für die Implementierung in andere Integrationsverfahren siehe [8]). Aus (36) ergibt sich damit

$$\underline{\underline{K}}^* {}^{t+\Delta t} \underline{\underline{u}} + \underline{\underline{M}} {}^{t+\Delta t} \underline{\underline{\ddot{u}}} = \overbrace{{}^{t+\Delta t} \underline{\underline{R}} - \sum_{\ell} \underline{\underline{\mu}}_{\ell} (\Delta t)^{-p_{\ell}} \sum_{j=1}^{N_{\ell}} A_{j+1}^{(p_{\ell})} t^{-(j-1)\Delta t} \underline{\underline{u}} +}^{\text{Term 1}} \underbrace{\int_V \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{A}}^{-1} \sum_{\ell} \underline{\underline{\alpha}}_{\ell} (\Delta t)^{-q_{\ell}} \sum_{j=1}^{N_{\ell}} A_{j+1}^{(q_{\ell})} t^{-(j-1)\Delta t} \underline{\underline{\sigma}} dV}_{\text{Term 2}} \quad . \quad (37)$$

Während die Größen $\underline{\underline{K}}^*$ und $\underline{\underline{M}}$ als Steifigkeits- bzw. Massenmatrix an das FE-Programm übergeben werden können, stellt der Vektor ${}^{t+\Delta t} \underline{\underline{R}}$ die Reaktionskräfte dar, die mit Hilfe der aktuellen Verschiebungen und der Steifigkeitsmatrix $\underline{\underline{K}}^*$ berechnet werden können. Die beiden mit „Term 1“ bzw. „Term 2“ gekennzeichneten Größen hängen lediglich von der Verformungs- bzw. Spannungsgeschichte ab. Sie können als äußere Lasten interpretiert und zu Beginn eines jeden Inkrements berechnet werden. Um eine entsprechende Berechnung vornehmen zu können muss sowohl die Verschiebungs- als auch die Spannungsgeschichte der letzten N_{ℓ} Inkremente gespeichert werden. Bei manchen Berechnungen ist eine veränderliche Zeitschrittweite während der Berechnung notwendig. Da die Berechnung nach (37) jedoch die Verfügbarkeit der Spannungs- und Verformungsgeschichte zu äquidistanten Zeitpunkten voraussetzt, muss bei einer veränderten Zeitschrittweite die Spannungs- bzw. Verformungsgeschichte durch entsprechende Interpolation neu berechnet werden. Zusätzlich müssen die modifizierte Steifigkeitsmatrix $\underline{\underline{K}}^*$ sowie die Matrizen $\underline{\underline{\mu}}_{\ell}$ neu bestimmt werden, da ihre Werte von der Zeitschrittweite Δt abhängen.

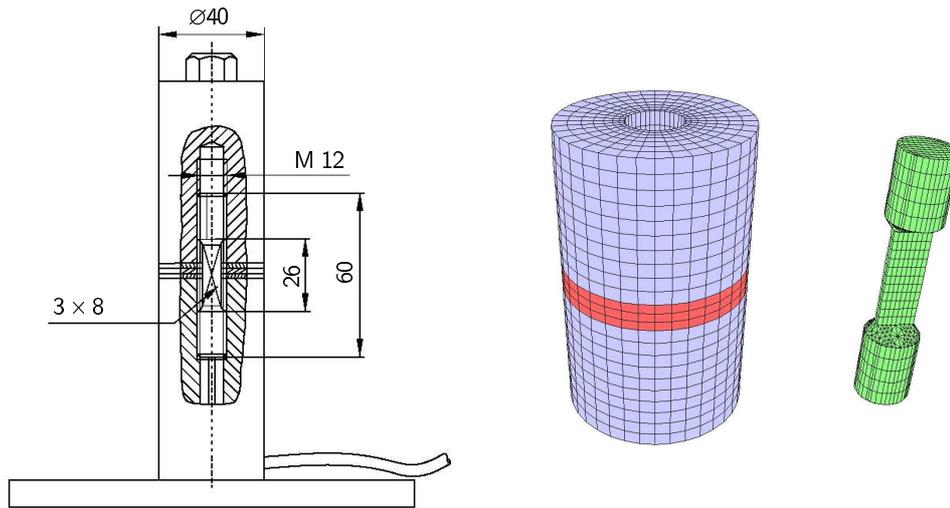


Fig. 2: Versuchsaufbau und FE-Modell

7 Beispiel

Eine Implementierung des mittels fraktionaler Ableitungen verallgemeinerten 3-Parameter-Modells wurde für isoparametrische 3D-Volumenelemente mit linearen Ansatzfunktionen realisiert. Zur Verifikation der Implementierung wurde das nachfolgend beschriebene Experiment mit Hilfe einer transienten FE-Simulation nachgerechnet und die Ergebnisse mit den Messwerten verglichen.

7.1 Experiment

Der in Fig. 2 dargestellt Versuchsaufbau besteht aus zwei Wellen mit Gewindebohrung in der Stirnfläche, die durch eine Messschraube miteinander verschraubt sind (Werkstoff: jeweils Automatenstahl 9SMnPb28). Auf die kontaktseitigen Stirnflächen beider Wellen sind 2 mm starke Scheiben aus Delrin[®] 100 (Fa. DuPont[®]) geklebt. Eine dritte Scheibe aus Delrin[®] 100 wird zwischen den beiden anderen platziert. Auf die Messschraube sind vier Dehnmessstreifen (Typ 3/120LY41 bzw. 3/120LY11, Fa. HBM) in einer Vollbrückenschaltung appliziert, mit denen die Zugspannung in der Schraube bestimmt werden kann. Die DMS-Brücke ist an das Messverstärkersystem HBM MGC mit Messverstärkerkarten MC55 angeschlossen.

Durch das Verdrehen beider Wellen gegeneinander wird zunächst eine Normalspannung in der Füge­stelle von etwa $5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ erzeugt, die danach allmählich abnimmt. Um diese Normalspannung bestimmen zu können wird die Zugkraft in der Schraube gemessen und über der Zeit aufgenommen. Bei der Spannungsabnahme wirken zwei Charakteristiken viskoelastischer Materialien zusammen: die Spannungsrelaxation (Spannungsabnahme bei konstanter Dehnung) und das Kriechen (Dehnungszunahme bei konstanter Spannung). Durch die Messschraube sind Spannung und Dehnung jedoch zeitunabhängig miteinander gekoppelt, weshalb weder reine Relaxation noch reines Kriechen auftritt.

7.2 Berechnung

7.2.1 Parameteridentifikation

Die Materialparameter des fraktionalen Werkstoffmodells für den Kunststoff Delrin[®] 100 wurden mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate ermittelt, wobei die Kriechkurve (bei 23°C und $\sigma = 5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$) von Delrin[®] 100 für einen Zeitraum von 20 Sekunden bis zu 10 000 Stunden zu Grunde gelegt wurde. Die Messungen des Herstellers für den Bereich ab 6 Minuten wurden dabei durch eigene Messungen entsprechend erweitert. Das fraktionale Werkstoffmodell entspricht dabei der in Gleichung (13) angegebenen Form mit der zusätzlichen Bedingung $q = p$, die nach [2] und [6] sicherstellt, dass das Modell im Einklang mit thermodynamischen Prinzipien steht und die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit endlich bleibt.

Fig. 3 zeigt die hervorragende Adaptionfähigkeit des fraktionalen 3-Parameter-Modells an das reale Kriechverhalten des Werkstoffs. Zu Vergleichszwecken ist auch das Kriechmodul eines angepassten 3-Parameter-Modells dargestellt. In Tabelle 1 sind die für die Berechnung benutzten Materialparameter zusammengestellt.

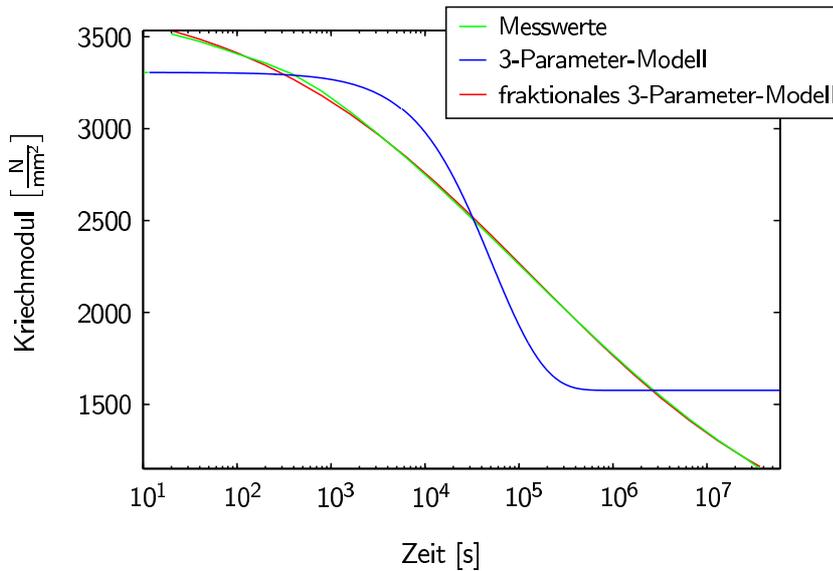


Fig. 3: Adaption verschiedener Materialmodelle an den gemessenen Kriechmodul

7.2.2 FE-Berechnung der Schraubverbindung

Das gegenüber dem Versuch in Längsrichtung verkürzte FE-Modell zur Berechnung ist in Fig. 2 abgebildet. Als Randbedingung sind die Knoten der unteren Stirnfläche festgehalten. Die Schraube ist mit der unteren Welle im gesamten Gewindebereich fest verbunden, während die Verbindung zur oberen Welle durch die koinzidierende Knoten entlang nur einer Umfangslinie der Schraube bzw. Welle gewährleistet wird. Alle Werkstoffe wurden als isotrop modelliert und für die Stahlbauteile typische Materialkennwerte ($E = 210\,000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$, $\rho = 7\,850 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, $\nu = 0,3$) eingesetzt.

Die Verschraubung der Wellen gegeneinander wird durch das Aufbringen einer thermischen Last während der ersten 12 Inkremente (Zeitschrittweite jeweils 1s) auf die Dehnschraube simuliert. Die Berechnung (FE-Programm MARC) wird bei konstanter thermischer Last anschliessend über einen Zeitraum von etwa 90 Minuten mit sukzessive wachsender Zeitschrittweite fortgesetzt.

7.3 Vergleich der Rechenergebnisse mit dem Experiment

Ein Vergleich der FE-Simulation mit dem Experiment kann über die Zugkraft in der Schraube vorgenommen werden. In Fig. 4 ist die gemessenen (und gefilterte) Zugkraft über der Zeit aufgetragen und den gerechneten Werten gegenübergestellt. Die Abweichungen zu Beginn der Messung lassen sich im wesentlichen auf zwei Einflüsse zurückführen: zum einen wurde das Materialmodell nur für Zeiträume ab 20 Sekunden nach der Last-Applikation angepasst, so dass im Zeitbereich davor keine verlässlichen Aussagen möglich sind. Zum anderen kommt es im Experiment nach Aufbringen der Last zu Setzungen in den Gewindebereichen sowie durch die Torsionsbelastung des Aufbaus zu geringen Relativbewegungen an den reibungsarmen Fügstellen zwischen den Kunststoffscheiben. Diese Effekte bleiben in der Berechnung unberücksichtigt.

Die gute qualitative Übereinstimmung der weiteren Kraftverläufe stellt die Leistungsfähigkeit des fraktionalen 3-Parameter-Modells unter Beweis und kann als Anhaltspunkt für die korrekte Implementierung des Modells gewertet werden.

Parameter	Zahlenwert	Dimension
E	658,2	$\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$
$p = q$	0,2845	–
$\underline{\underline{\alpha}}$	32,017 $\underline{\underline{I}}$	$\text{s}^{0,2845}$
$\underline{\underline{\beta}}$	120 593,0 $\frac{1}{E} \underline{\underline{C}}$	$\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \text{s}^{0,2845}$

Tab. 1: Identifizierte Parameter des fraktionalen 3-Parameter-Modells

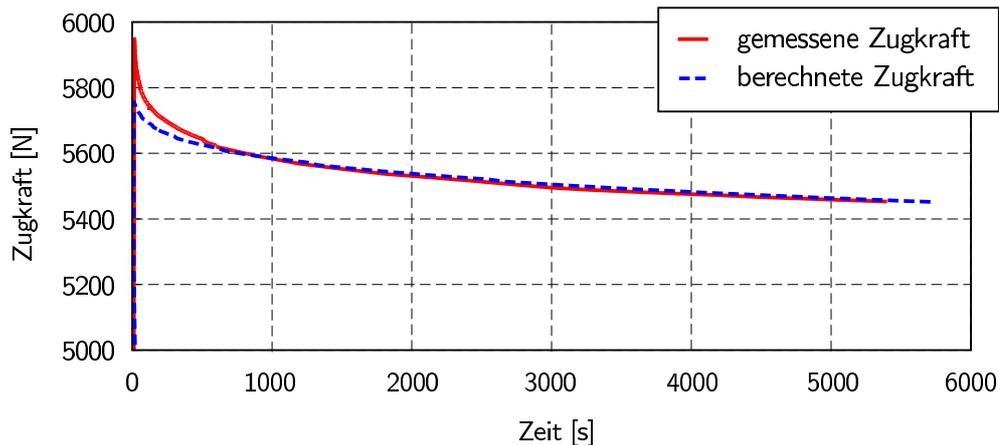


Fig. 4: Vergleich zwischen gemessener und berechneter Zugkraft in der Schraube

8 Danksagung

An dieser Stelle möchten sich die Autoren bei Herrn Class und der Firma DuPont® bedanken, die uns verschiedene Materialproben für experimentelle Untersuchungen sowie umfangreiches Datenmaterial zur Verfügung gestellt haben. Der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) sei für die Förderung dieser Untersuchungen im Rahmen des Sonderforschungsbereiches 543 (ultraschallbeeinflusstes Umformen metallischer Werkstoffe) gedankt.

References

- [1] Bagley, R. L. ; Torvik, P. J.: "A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity". *Journal of Rheology* 27 (1983), Nr. 3, S. 201–210.
- [2] Bagley, R. L. ; Torvik, P. J.: "On the fractional calculus model of viscoelastic behaviour". *Journal of Rheology* 30 (1986), Nr. 1, S. 133–155.
- [3] Bathe, K.-J.: "Finite-Elemente-Methoden". Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [4] Ferry, J. D. ; Landel, R. F. ; Williams, M. L.: "Extensions to the Rouse Theory of viscoelastic properties to undiluted linear polymers". *Journal of Applied Physics* 26 (1955), Nr. 4, S. 359–362.
- [5] Gaul, L. ; Klein, P. ; Kemple, S.: "Damping description involving fractional operators". *Mechanical Systems and Signal Processing* 5 (1991), Nr. 2, S. 81–88.
- [6] Gaul, L. ; Schanz, M.: "A comparative study of three boundary element approaches to calculate the transient response of viscoelastic solids with unbounded domains". *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 179 (1999), S. 111–123.
- [7] Oldham, K. B. ; Spanier, J.: "The Fractional Calculus". Academic Press, New York and London, 1974.
- [8] Padovan, J.: "Computational algorithms for FE formulations involving fractional operators". *Computational Mechanics* 2 (1987), S. 271–287.
- [9] Podlubny, I.: "Fractional Differential Equations". Academic Press, San Diego and London, 1999.
- [10] Rouse, P. E. J.: "The theory of linear viscoelastic properties of dilute solutions of coiling polymers". *The Journal of Chemical Physics* 21 (1953), Nr. 7, S. 1272–1280.