

Bestimmung des komplexen Elastizitätsmoduls eines Polymers zur Identifikation eines viskoelastischen Stoffgesetzes mit fraktionalen Zeitableitungen

André Schmidt und Lothar Gaul
Institut A für Mechanik
Universität Stuttgart
70550 Stuttgart

ABSTRACT: In vielen Anwendungsfällen kann das Materialverhalten von Polymeren und gummiartigen Werkstoffen als viskoelastisch charakterisiert werden. Typische Phänomene viskoelastischer Werkstoffe sind das Auftreten von Kriech- und Relaxationserscheinungen. Bei dynamischer Beanspruchung wird ein Teil der Deformationsarbeit vom Werkstoff gespeichert, während der Rest dissipiert wird; man spricht auch von Materialdämpfung. Die Dämpfungseigenschaften einer Struktur können global oder über konstitutive Gleichungen modelliert werden, wobei die Beschreibung der Stoffgesetze entweder über Differentialoperatoren oder durch Gedächtnisintegrale erfolgen kann.

Rheologische Dämpfungsmodelle, die aus Federn und Dämpfern aufgebaut sind, führen auf Stoffgesetze, die Differentialoperatoren enthalten. Von solchen Stoffgesetzen ist bekannt, dass sie das gemessene Materialverhalten unbefriedigend adaptieren, v.a. wenn große Frequenz- oder Zeitbereiche abgedeckt werden sollen. Trotz Erhöhung der Anzahl an Materialparametern z.B. in Kelvin-Ketten oder parallelgeschalteten Maxwell-Elementen verhindert man Oszillationen beim curve-fitting nicht.

Durch die Definition eines verallgemeinerten rheologischen Elements können Stoffgesetze hergeleitet werden, die fraktionale Zeitableitungen enthalten. Solche fraktionalen Stoffgesetze führen bei wenig Materialparametern auf gute curve-fitting Eigenschaften, berücksichtigen die Deformationsgeschichte, sind kausal und lassen sich physikalisch begründen.

Im Folgenden wird das Stoffgesetz des verallgemeinerten rheologischen Elements hergeleitet und die Eigenschaften fraktionaler Stoffgesetze werden diskutiert. Mit Hilfe von Ausschwingversuchen wird eine Parameteridentifikation für ein fraktionales 3-Parameter-Modell im Frequenzbereich durchgeführt und mit dem traditionellen 3-Parameter-Modell verglichen. Abschließend wird das identifizierte fraktionale 3-Parameter-Modell herangezogen, um mit Hilfe der FE-Methode eine dreidimensionale Analyse einer viskoelastischen Struktur vorzunehmen und mit Messergebnissen zu vergleichen.

1 Einleitung

Lineare Viskoelastizität kann allgemein mit Hilfe des Gedächtnisintegrals (Boltzmannsches Superpositions-Integral) dargestellt werden:

$$\sigma(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t E_r(\tau) \varepsilon(t - \tau) d\tau \quad (1)$$

Dabei ist die Funktion $E_r(t)$ die sogenannte (Spannungs-) Relaxationsfunktion, also die Antwort des Werkstoffs auf einen Einheitssprung der Dehnung. Nach (1) ist die Antwort des Materials auf eine beliebige zeitabhängige Belastung $\varepsilon(t)$ durch die Relaxationsfunktion festgelegt.

Zur Definition der Relaxationsfunktion werden traditionell abklingende Exponentialfunktionen verwendet, die sich aber bekanntermaßen nur begrenzt an gemessenes Materialverhalten anpassen lassen. Aus diesem Grund werden häufig Reihen von Exponentialfunktionen, sogenannte Prony-Reihen, verwendet, wodurch eine bessere Adaptivität über größere Frequenz- oder Zeitbereiche erreicht wird, sich zugleich aber die benötigte Anzahl an Materialparametern stark erhöht. Zur phänomenologischen Beschreibung des Materialverhaltens mit wenigen Parametern werden häufig andere Ansätze verwendet, wie z.B. Potenzgesetze, gestreckte Exponentialfunktionen oder Debye-Relaxation.

Die Beschreibung von Viskoelastizität in kommerziellen FE-Programmen erfolgt zumeist über eine geschwindigkeitsproportionale Dämpfungsmatrix (z.B. Rayleigh-Dämpfung) oder mit Hilfe einer Prony-Reihe in der Gedächtnisintegraldarstellung. Von der geschwindigkeitsproportionalen Dämpfung ist ebenfalls bekannt, dass gemessenes Materialverhalten nur über einen kleinen Frequenz- oder Zeitbereich abgebildet werden kann (Bathe, 1990).

Durch die Einführung von fraktionalen Ableitungen in den Stoffgesetzen können diese Nachteile umgangen werden. Erstmals vorgeschlagen wurde die Verwendung fraktionaler Ableitungen zur Beschreibung von viskoelastischem Materialverhalten von Gemant (1936, 1938) und später von Scott-Blair und Caffyn (1949), die mit diesem Konzept gute Ergebnisse erzielten. Einen ausführlichen Zusammenhang zwischen fraktionalen Ableitungen und der Theorie der linearen Viskoelastizität geben Caputo und Mainardi (1971). Bis in die 80er Jahre des letzten Jahrhunderts hinein musste dieses Konzept als eine Art curve-fitting-Methode betrachtet werden, bis Bagley und Torvik eine physikalische Begründung für das Auftreten fraktionaler Ableitungen in den Stoffgesetzen lieferten (Bagley & Torvik, 1983). Ausgehend von molekulartheoretischen Betrachtungen von Rouse (1953), die später von Ferry, William und Landel (1955) modifiziert wurden, leiteten sie eine Ableitungsordnung von 1/2 in den entsprechenden Spannungs-Dehnungsbeziehungen ab. Ähnliche Betrachtungen mit der Theorie von Zimm (1956) führen auf eine Ableitungsordnung der Größe 2/3.

Eines der in der Literatur am häufigsten gebrauchten fraktionalen Stoffgesetze ist das fraktionale 3-Parameter-Modell, für das Bagley und Torvik (1986) Restriktionen hergeleitet haben, die sicherstellen, dass das Modell keine negative Energiedissipation hervorruft.

Die Implementierung fraktionaler Stoffgesetze in die FEM wurde von Padovan (1987) umfassend dargestellt. Formulierungen der Randelementmethode (BEM) mit derartigen Stoffgesetzen im Zeitbereich sowie im Frequenzbereich wurden von Gaul und Schanz (1999) bzw. Gaul (2000) untersucht.

2 Definition fraktionaler Ableitungen

Ausgangspunkt ist die Definitionsgleichung ganzzahliger Ableitungen als Grenzwert des Rückwärts-Differenzenquotienten

$$\frac{d^1 f(t)}{dt^1} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t - \Delta t)}{\Delta t} \quad (2)$$

Wiederholte Anwendung führt auf

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t) - 2f(t - \Delta t) + f(t - 2\Delta t)}{\Delta t^2} \quad (3)$$

$$\frac{d^3 f(t)}{dt^3} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t) - 3f(t - \Delta t) + 3f(t - 2\Delta t) - f(t - 3\Delta t)}{\Delta t^3} \quad (4)$$

⋮

Eine Verallgemeinerung auf beliebige ganzzahlige Ableitungsgrade n

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{1}{(\Delta t)^n} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} f(t - j\Delta t) \right] \quad (5)$$

kann mit Hilfe des Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{j} = \begin{cases} \frac{n!}{j!(n-j)!} & \text{für } 0 \leq j \leq n \\ 0 & \text{für } 0 \leq n < j \end{cases}, \quad (6)$$

der für alle natürlichen Zahlen n und j definiert ist, vorgenommen werden. Wenn wir nun den Zeitschritt Δt durch den Quotienten

$$\frac{t}{N}, \quad N = 1, 2, 3, \dots \quad (7)$$

ersetzen, lässt sich (5) zu

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{t}{N} \right)^{-n} \sum_{j=0}^{N-1} (-1)^j \binom{n}{j} f\left(t - j \frac{t}{N}\right) \right] \quad (8)$$

umformen. Dabei erscheint die obere Grenze der Summe $N-1$ willkürlich gewählt zu sein, da der Binomialkoeffizient für $j > n$ den Wert 0 liefert. Tatsächlich ergibt sich die obere Grenze aus dem unteren Grenzwert des Integrals, wenn Gleichung (8) auch zur Beschreibung beliebiger Integrale ganzzahliger Ordnung im Sinne einer Riemann-Summe verwendet wird, vergleiche Oldham und Spanier (1974) oder Podlubny (1999).

Durch das Auftreten der Fakultät im Binomialkoeffizienten kann Gleichung (8) ausschließlich auf ganzzahlige Ableitungen (oder Integrationsordnungen) angewandt werden. Eine Erweiterung auf beliebige Ableitungsordnungen wird durch den Übergang auf die Gammafunktion Γ erreicht, die eine Verallgemeinerung der Fakultät auf reelle Argumente darstellt. Mit Hilfe der erweiterten Definition des Binomialkoeffizienten erhält man (siehe Schmidt, Oexl und Gaul 2000)

$$(-1)^j \binom{n}{j} = \binom{j-n-1}{j} \equiv \frac{\Gamma(j-n)}{\Gamma(-n)\Gamma(j+1)} \quad . \quad (9)$$

Interpretiert man n als beliebige reelle Zahl ν , erhält man die Grünwald-Definition (Grünwald, 1867) fraktionaler Ableitungen

$$\frac{d^\nu f(t)}{dt^\nu} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{t}{N} \right)^{-\nu} \sum_{j=0}^{N-1} A_{j+1} f\left(t - j \frac{t}{N}\right) \right] \quad , \quad (10)$$

wobei

$$A_{j+1} = \frac{\Gamma(j-\nu)}{\Gamma(-\nu)\Gamma(j+1)} \quad (11)$$

die sogenannten Grünwald-Koeffizienten sind. Die Grünwald-Definition fraktionaler Ableitungen (10) ist für beliebige reelle Ableitungs- und Integrationsordnungen gültig, ν ist also im Bereich von $-\infty$ bis $+\infty$ definiert.

Aus dem Vergleich mit (2) bis (5) ergibt sich, dass bei ganzzahligen Ableitungen lediglich die ersten $\nu+1$ Grünwald-Koeffizienten von Null verschieden sind. Bei allen anderen Ableitungs- sowie den Integrationsordnungen $\nu < 0$ sind sämtliche Grünwald-Koeffizienten ungleich Null. Daraus folgt, dass fraktionale Ableitungen und Integrationen nicht-lokale Operatoren sind, mit Ausnahme der ganzzahligen Ableitungen. Durch die Summe in (10) werden N Funktionswerte zur Berechnung der fraktionalen Ableitung berücksichtigt. Insbesondere ergibt sich für $j=0$ der erste Summand $A_1 f(t)$ und für $j=N-1$ der letzte Summand

$$A_N f\left(t - \frac{N-1}{N}\right) = A_N f\left(\frac{t}{N}\right). \quad \text{Demnach wird das Intervall } (0, t] \text{ in } N \text{ gleich große Abschnitte}$$

unterteilt, an deren Grenzen die Funktionswerte als Stützstellen zur Berechnung der fraktionalen Ableitung herangezogen werden. Die Grenzen der fraktionalen Ableitung nach (10), in der Literatur auch ‚terminals‘ genannt, sind folglich 0 und t .

Eine andere Definition fraktionaler Ableitungen ergibt sich aus der Verallgemeinerung der Cauchyschen Formel für wiederholte Integration

$$\frac{d^{-n}}{dt^{-n}} f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau \quad , \quad (12)$$

wobei $(-n)$ die Integrationsordnung ist. Für fraktionale Ableitungen ν ergibt sich daraus

$$\frac{d^\nu}{dt^\nu} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-\tau)^{-\nu} f(\tau) d\tau \quad (13)$$

mit $0 \leq \nu < 1$, die sogenannte Riemann-Liouville Definition fraktionaler Ableitungen. Man kann zeigen, dass die Definitionen (10) und (13) äquivalent sind, siehe z.B. Oldham und Spanier (1974).

3 Eigenschaften fraktionaler Ableitungen

Für die nachfolgenden Betrachtungen beschränken wir uns auf fraktionale Ableitungen, fraktionale Integrationsordnungen sollen ausgeschlossen sein, es gilt also $\nu > 0$. Neben der Linearität oder der bereits erwähnten Nicht-Lokalität sind im Zusammenhang mit der Materialbeschreibung insbesondere zwei weitere Eigenschaften von Bedeutung.

3.1 Nachlassendes Gedächtnis

Man kann zeigen, dass die durch den Betrag der Grünwald-Koeffizienten $|A_{j+1}|$ gegebene Folge ab $j > \nu$ streng monoton fallend ist und dem Grenzwert 0 zustrebt (vergleiche Schmidt und Gaul 2001). Da aber mit steigendem j die Grünwald-Koeffizienten Funktionswerte wichten, die weiter in der Vergangenheit liegen, wird bei fraktionalen Ableitungen der Geschichtseinfluss allmählich ausgeblendet. Diese Eigenschaft ist gleichbedeutend mit dem „nachlassenden Gedächtnis“ (fading memory).

3.2 Fourier-Transformation

Wird die Fouriertransformierte einer Funktion $f(t)$ mit $F(i\omega)$ und i als der imaginären Einheit bezeichnet, so gilt

$$\frac{d}{dt} f(t) \Rightarrow (i\omega) F(i\omega) \quad (14)$$

$$\frac{d^n}{dt^n} f(t) \Rightarrow (i\omega)^n F(i\omega) \quad . \quad (15)$$

Für die fraktionale Ableitung der Ordnung ν einer Funktion ergibt sich analog

$$\frac{d^\nu}{dt^\nu} f(t) \Rightarrow (i\omega)^\nu F(i\omega) \quad , \quad (16)$$

siehe Podlubny (1999).

3.3 Beispiel

Als Beispiel wird die ganzzahlige Funktion $f(t) = t^3$ betrachtet, deren fraktionale Ableitungen mit Hilfe von (13) berechnet werden können. Definiert man den Ableitungsoperator

$$D^\nu = \frac{d^\nu}{dt^\nu} \quad , \quad (17)$$

erhält man

$$D^\nu t^3 = \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(4-\nu)} t^{3-\nu} \quad . \quad (18)$$

Der Exponent nimmt also mit der Ordnung der fraktionalen Ableitung ab, wie man es auch von ganzzahligen Ableitungen kennt. In Abbildung 1 sind die Funktion $f(t) = t^3$ und ihre fraktionalen Ableitungen in Schritten von $\frac{1}{4}$ Ableitungsordnung bis zur 2. Ableitung $D^2 f(t) = 6t$ dargestellt.

4 Fraktionale Stoffgesetze

Üblicherweise bestehen rheologische Modelle der Viskoelastizität aus Federn und Dämpfern. Ausgehend von den Stoffgesetzen dieser Elemente

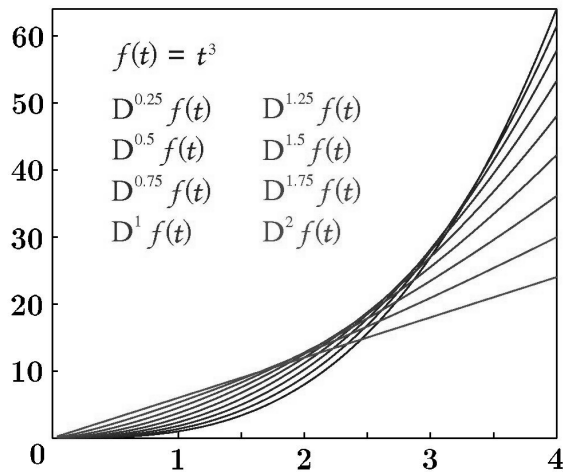


Abbildung 1: fraktionale Ableitungen von $f(t) = t^3$

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{d^0}{dt^0} \varepsilon \quad (19)$$

für die Feder mit E als der Federkonstanten bzw.

$$\sigma = \eta \dot{\varepsilon} = \eta \frac{d^1}{dt^1} \varepsilon \quad (20)$$

des Dämpfers mit η als der Viskosität kann mit Hilfe der fraktionalen Ableitungen ein generalisiertes, „fraktionales“ Element (auch „spring-pot“ genannt, s. Koeller, 1984)

$$\sigma = p \frac{d^v}{dt^v} \varepsilon \quad (21)$$

definiert werden, wobei p ein Proportionalitätsfaktor ist. Für $v = 0$ ergibt sich aus (21) das Stoffgesetz der Feder (19) und für $v = 1$ das des Dämpfers (20). Dieses neue Element besitzt zwei Materialparameter v und p und wird üblicherweise durch eine Raute gekennzeichnet. Die Verbindung zwischen diesem neuen rheologischen Element und der phänomenologischen Beschreibung der Relaxation mit Hilfe von Potenzfunktionen

$$E_r(t) = a \cdot t^{-\alpha} \quad (22)$$

kann mit Hilfe der Riemann-Liouville-Definition fraktionaler Ableitungen (13) verdeutlicht werden. Aus (21) ergibt sich nach Variablentausch

$$\sigma(t) = \frac{p}{\Gamma(1-v)} \frac{d}{dt} \int_0^t \tau^{-v} \varepsilon(t-\tau) d\tau \quad \text{mit} \quad 0 \leq v < 1 \quad (23)$$

Setzt man hingegen das Potenzgesetz (22) in das Gedächtnisintegral (1) ein, erhält man

$$\sigma(t) = a \frac{d}{dt} \int_0^t \tau^{-\alpha} \varepsilon(t-\tau) d\tau \quad (24)$$

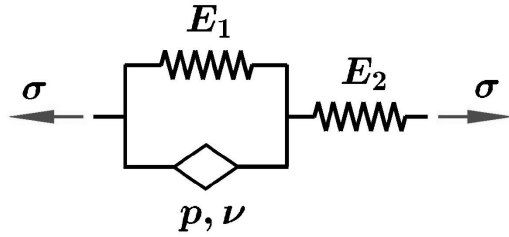


Abbildung 2: fraktionales 3-Parameter-Modell

Die Gleichungen (23) und (24) unterscheiden sich lediglich um einen konstanten Faktor voneinander und beschreiben denselben funktionalen Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung. Insofern kann die Relaxationsbeschreibung mit Potenzgesetzen auch als Modellierung von Viskoelastizität mit einem fraktionalem Element und $\nu = \alpha$ interpretiert werden. Komplexere Stoffgesetze zur Beschreibung von Viskoelastizität erhält man, indem die Dämpfer in bekannten rheologischen Modellen durch generalisierte Elemente ersetzt werden. Für das so modifizierte 3-Parameter-Modell erhält man dadurch das „fraktionale 3-Parameter-Modell“ (siehe Abbildung 2) mit dem Stoffgesetz

$$\sigma + a \frac{d^\nu}{dt^\nu} \sigma = c\varepsilon + b \frac{d^\nu}{dt^\nu} \varepsilon \quad , \quad (25)$$

das die Abkürzungen

$$a = \frac{p}{E_1 + E_2} \quad , \quad b = \frac{pE_2}{E_1 + E_2} \quad \text{und} \quad c = \frac{E_1E_2}{E_1 + E_2} \quad (26)$$

enthält. Eine Erweiterung auf den dreidimensionalen Fall erfordert die Unterscheidung zwischen den hydrostatischen (Index h) und den deviatorischen (Index d) Anteilen der Spannungen und Dehnungen. Damit ergibt sich

$$\vec{\sigma}_h + \vec{A}_h \frac{d^{\nu_h}}{dt^{\nu_h}} \vec{\sigma}_h = \vec{C}_h \vec{\varepsilon}_h + \vec{B}_h \frac{d^{\nu_h}}{dt^{\nu_h}} \vec{\varepsilon}_h \quad \text{und} \quad (27)$$

$$\vec{\sigma}_d + \vec{A}_d \frac{d^{\nu_d}}{dt^{\nu_d}} \vec{\sigma}_d = \vec{C}_d \vec{\varepsilon}_d + \vec{B}_d \frac{d^{\nu_d}}{dt^{\nu_d}} \vec{\varepsilon}_d \quad , \quad (28)$$

wobei $\vec{\sigma}$ den Spannungsvektor und $\vec{\varepsilon}$ den Verzerrungsvektor darstellt. \vec{A} , \vec{B} und \vec{C} sind Tensoren, durch die das Materialverhalten beschrieben wird. Für den isotropen Fall sind sie in Schmidt und Gaul (2001) näher beschrieben.

5 Eigenschaften des fraktionalen 3-Parameter-Modells

5.1 Zeitbereich

Wird ein rheologisches Modell, das aus Federn und Dämpfern aufgebaut ist, mit einem Spannungssprung belastet, setzt sich die Dehnungsantwort (das Kriechverhalten) aus einer oder mehreren Exponentialfunktionen zusammen. Für die Spannungsrelaxation, also die Antwort auf einen Dehnungssprung, gilt das Gleiche, sofern das Modell einen Dehnungssprung überhaupt zulässt. Diese Eigenschaft hat ein diskretes Spektrum an Kriechzeiten bzw. Relaxationszeiten zur Folge, wobei das Relaxationsspektrum $H(\tau)$ über die Spannungsrelaxation

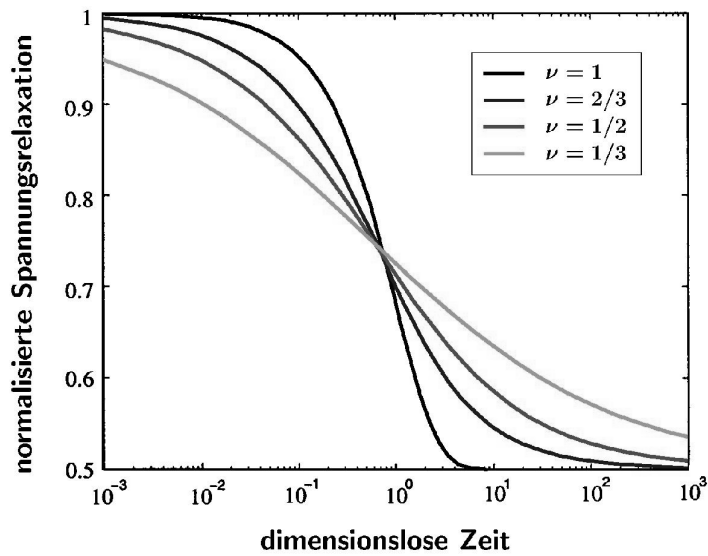


Abbildung 3: Spannungsrelaxation in Abhängigkeit von ν

$$E(t) = E_{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{1}{\tau} H(\tau) e^{-t/\tau} d\tau \quad (29)$$

definiert ist mit $E_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} E(t)$ als dem Gleichgewichtsmodul. Analog gilt für das Retardationsspektrum $L(\tau)$ und die Kriechnachgiebigkeit $J(t)$ von Festkörpern

$$J(t) = J_0 + \int_0^{\infty} \frac{1}{\tau} L(\tau) \left(1 - e^{-t/\tau}\right) d\tau \quad , \quad (30)$$

wobei $J_0 = \lim_{t \rightarrow 0} J(t)$ die spontane Nachgiebigkeit ist.

Bei fraktionalen Modellen stammen die Kriech- und Relaxationsfunktionen hingegen aus der Klasse der Mittag-Leffler-Funktionen, was auf kontinuierliche Spektren der Kriech- und Relaxationszeiten führt. Abbildung 3 zeigt exemplarisch den Einfluss des Parameters ν auf die Spannungsrelaxation.

5.2 Frequenzbereich

Setzt man sinusförmige Spannungs- und Dehnungsverläufe voraus, kann man den komplexen Modul

$$E^* = E' + iE'' \quad (31)$$

mit E' als dem Speichermodul, E'' als dem Verlustmodul und i als der imaginären Einheit einführen. Dem elastisch-viskoelastischen Korrespondenzprinzip folgend, ergibt sich für die komplexen Amplituden der Spannungen σ^* und Dehnungen ε^* die Beziehung

$$\sigma^*(\omega) = E^*(\omega) \varepsilon^*(\omega) \quad . \quad (32)$$

Für das fraktionale 3-Parameter-Modell (25) kann mit Hilfe von Beziehung (16) der komplexe Modul zu

$$E^*(\omega) = \frac{c + b(i\omega)^{\nu}}{1 + a(i\omega)^{\nu}} \quad (33)$$

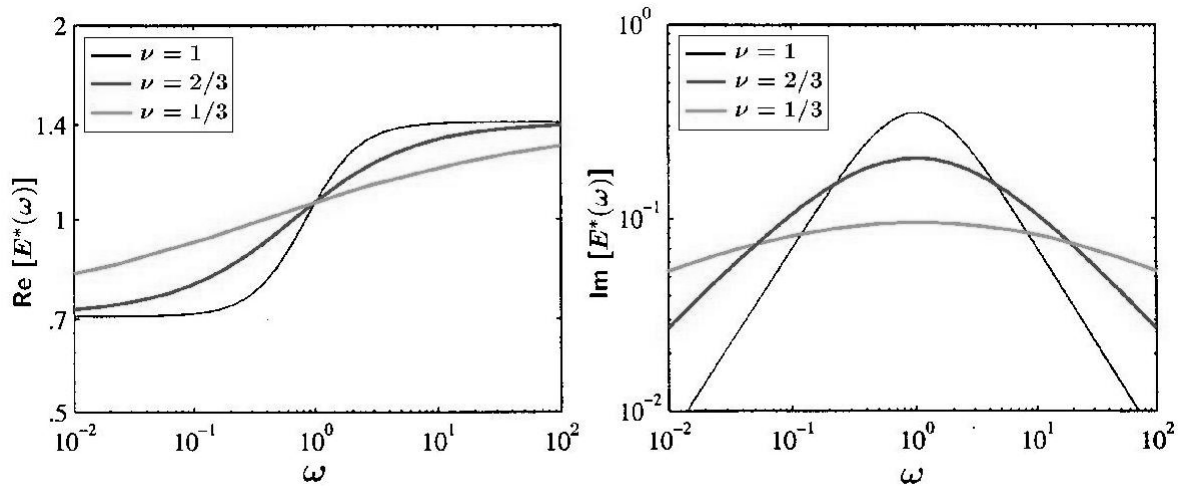


Abbildung 4: Einfluss des Parameters ν auf den komplexen Modul

bestimmt werden. Interessanterweise entspricht (33) der sogenannten Cole-Cole-Relaxation, die Cole und Cole (1941) auf phänomenologischem Weg bei der Untersuchung der frequenzabhängigen dielektrischen Permeabilität eingeführt haben.

Der Einfluss des fraktionalen Parameters ν auf die Frequenzabhängigkeit des komplexen Moduls wird in Abbildung 4 veranschaulicht.

6 Parameteridentifikation

Mit Hilfe des in Abbildung 5 dargestellten Versuchsaufbaus wurde das Ausschwingverhalten von balkenförmige Materialproben aus Delrin (Thermoplast, Fa. Du Pont) bei 23°C gemessen. Durch unterschiedliche freie Längen der Proben sowie unterschiedliche Materialdicken (2 mm und 4 mm) wurde der Frequenzbereich von ca. 50 Hz bis 500 Hz abgedeckt. Aus den aufgenommenen Ausschwingkurven wurde die jeweilige Frequenz ermittelt und eine Exponentialfunktion als Einhüllende der Schwingung identifiziert.

Zur Ermittlung des Speichermoduls E' wurde die Beziehung des ungedämpften Balkens

$$f = \frac{1,875^2}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (34)$$

bei fester Einspannung benutzt, wobei l die freie Länge des Balkens, A seine Querschnittsfläche, I sein Flächenträgheitsmoment und ρ die Dichte des Materials ist. Mit Hilfe der gemessenen Frequenz f kann aus (34) der Elastizitätsmodul E bestimmt werden, der gleich dem Speichermodul E' gesetzt wird. Diese Näherung erzeugt einen Fehler bei der Berechnung des Speichermoduls, der bei diesem schwach gedämpften Material deutlich kleiner 1% ist. Die Einhüllende der Schwingung lässt sich in der Form

$$x = x_0 e^{-\delta t} \quad (35)$$

darstellen, wobei δ die Abklingkonstante der Schwingung ist, mit deren Hilfe der Verlustmodul über die Beziehung

$$\frac{E''(\omega)}{E'(\omega)} = \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2} \quad (36)$$

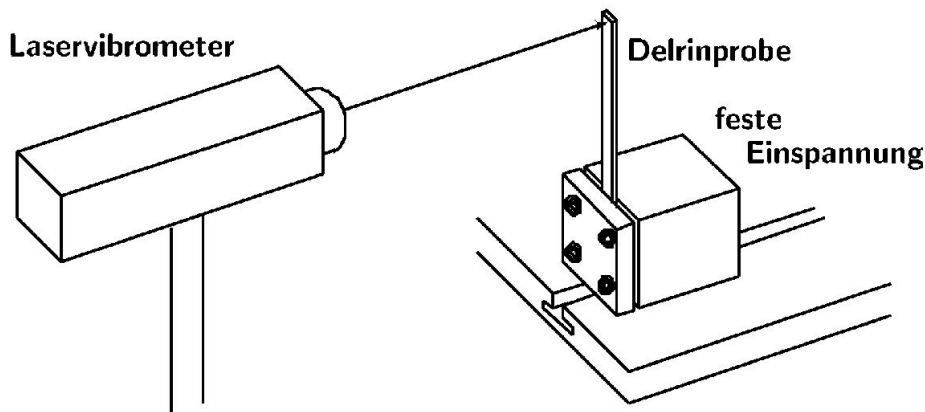


Abbildung 5: Versuchsaubau

berechnet werden kann. Dabei kann näherungsweise die ungedämpfte Eigenfrequenz ω_0 der gemessenen Frequenz gleichgesetzt werden, was wiederum auf Fehler kleiner 1% führt. Alle Messungen wurden mit 3 verschiedenen Proben durchgeführt und jeweils fünf Mal wiederholt. Die für jede Einspannlänge gemittelten Ergebnisse sind in Abbildung 6 dargestellt. Mit Hilfe der Methode der kleinsten Fehlerquadrate wurden die Materialparameter eines 3-Parameter-Modells ($\nu = 1$) sowie eines fraktionalen 3-Parameter-Modells mit $\nu = 1/2$ aus den Messdaten ermittelt. Die Ergebnisse dieser Parameteridentifikationen sind in Tabelle 1 angegeben. Zum Vergleich mit den Messergebnissen ist Abbildung 6 zusätzlich der Verlauf des komplexen Moduls für beide Modelle eingetragen. Während der Speichermodul von beiden Modellen relativ gut approximiert wird, zeigen sich bei der Adaption an den gemessenen Verlustmodul deutliche Unterschiede. Das fraktionale 3-Parameter-Modell ist wesentlich besser in der Lage, das Dämpfungsverhalten des Materials über einen größeren Frequenzbereich abzubilden, typischerweise über 5 – 6 Dekaden (siehe z.B. Bagley und Torvik, 1984).

	3-Parameter-Modell	frakt. 3-Parameter-Modell
ν	1	0,5
a	$9,218 \cdot 10^{-4} \text{ s}$	$0,02838 \text{ s}^\nu$
b	$99,31 \text{ Ns/mm}^2$	$90,31 \text{ Ns}^\nu / \text{mm}^2$
c	$3035,8 \text{ N/mm}^2$	$2981,6 \text{ N/mm}^2$

Tabelle1: Identifizierte Materialparameter

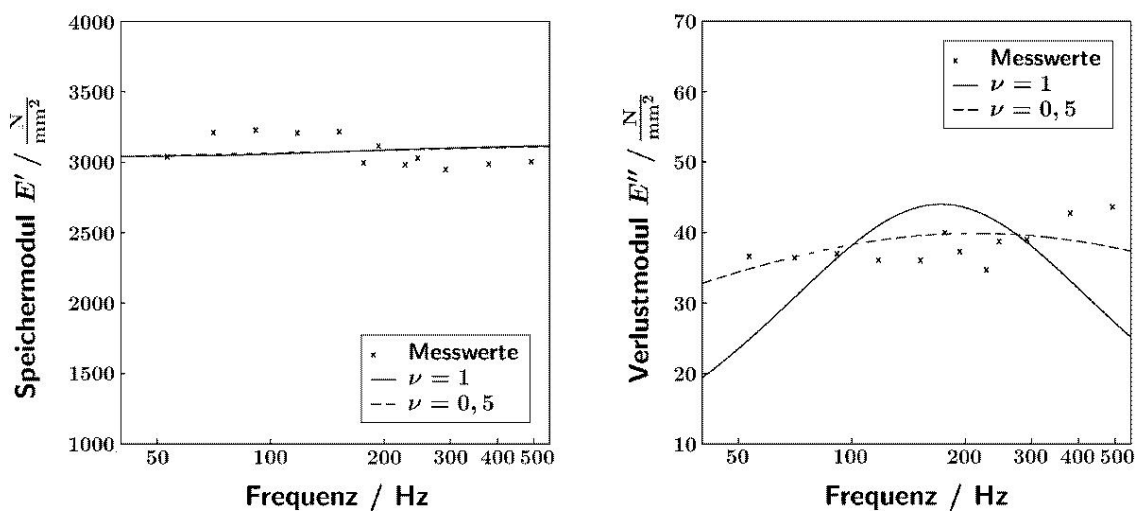


Abbildung 6: Komplexer Modul von Delrin; Messwerte und Parameteridentifikation

7 FE Implementation und Vergleichsrechnung

Die Implementierung von Stoffgesetzen mit fraktionalen Ableitungen in FE-Codes ist möglich, indem das Stoffgesetz mit Hilfe der Grünwald-Formulierung (10) nach dem aktuellen Spannungszustand $\bar{\sigma}(t)$ aufgelöst und in die FE-Bewegungsgleichung

$$\int_R \bar{B}^T \bar{\sigma}(t) dR + \bar{M} \ddot{\bar{u}}(t) = \bar{r}(t) \quad (37)$$

eingesetzt wird. Dabei bezeichnet \bar{B} die Verzerrungs-Verschiebungs-Transformationsmatrix, \bar{M} ist die Massenmatrix, \bar{u} der Vektor der Knotenverschiebungen, \bar{r} der Vektor der äußeren Lasten und R das Gebiet, in dem die finiten Elemente definiert sind. Eine Lösung der Bewegungsgleichung ist dann sowohl mit impliziten als auch mit expliziten Integrationsverfahren möglich. Eine ausführliche Darstellung der Implementierung von fraktionalen Stoffgesetzen in FE-Codes ist bei Padovan (1987) oder Schmidt und Gaul (2001) gegeben. Die Implementation dieses Konzepts in das FE-Programm MARC wurde für dreidimensionale Volumenelemente realisiert.

Eine numerische Überprüfung der Parameteridentifikation sowie der Implementation fraktionaler Stoffgesetze in die FE-Methode wurde durch Nachrechnen eines der Ausschwingversuche vorgenommen. Dazu wurde ein eingespannter Delrinbalken als dreidimensionales Modell diskretisiert (siehe Abbildung 7). Zur transienten Berechnung der Struktur wurden die aus den Experimenten identifizierten Parameter (siehe Tabelle 1) verwendet. Die feste Einspannung des Balkens wurde durch Verschiebungsrandbedingungen modelliert, während für die Anfangsauslenkung Krafrandbedingungen für das rechte Balkenende definiert wurden. Die Zeitintegration erfolgte mit dem Newmark-Verfahren, wobei die Newmarkschen Parameter auf $\delta = 1/2$ und $\alpha = 1/4$ gesetzt wurden, um numerische Dämpfung zu unterbinden.

Als Ergebnis der Berechnung ergibt sich eine Ausschwingkurve, die mit der aus dem entsprechenden Experiment gewonnenen Kurve in Abbildung 8 verglichen wird. Aus den jeweiligen Ausschwingkurven wurden die komplexen Moduli bestimmt, die in Tabelle 2 miteinander verglichen werden. Die moderaten Abweichungen zwischen Experiment und Berechnung bestätigen einerseits das Verfahren zur Identifikation der Materialparameter und deuten andererseits auf eine korrekte Implementierung der fraktionalen Stoffgesetze in das FE-Programm hin.

Die Abweichungen im Imaginärteil des komplexen Moduls von etwa 7% sind v.a. darauf zurückzuführen, dass bei der Berechnung durch die Anfangsbedingungen zunächst keine monofrequente Schwingung angeregt wird, was sich im unsteten Amplitudenverlauf der berechneten Schwingungsmaxima niederschlägt (siehe Abbildung 8). Zur Bestimmung des Imaginärteils des komplexen Moduls wird jedoch in den Verlauf dieser Maxima eine Exponentialfunktion eingepasst, wodurch der Fehler verursacht wird.

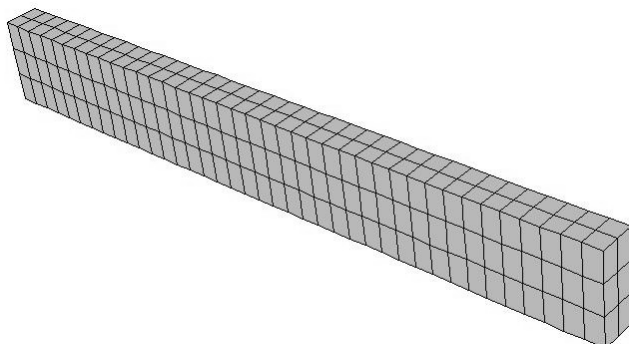


Abbildung 7: FE-Modell eines Delrinbalkens

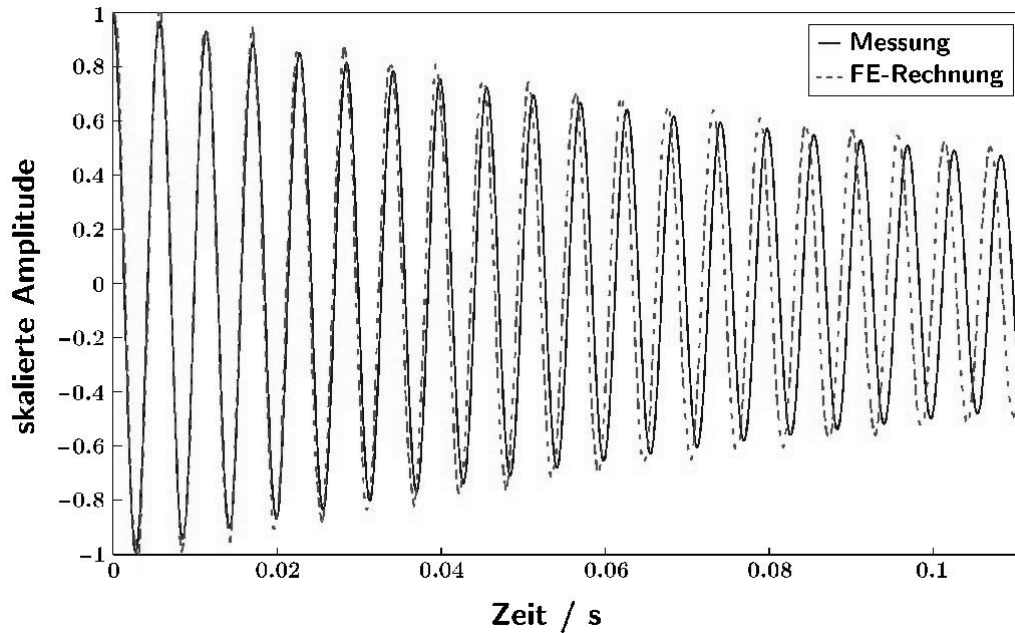


Abbildung 8: Vergleich Ausschwingversuch Experiment und FE-Rechnung

Ein ähnliches Problem ergibt sich auch bei der Messung der Ausschwingkurven. Da diese höherfrequenten Störungen jedoch relativ schnell abklingen, wurde ein nahezu vollständig monofrequentes Signal zur Bestimmung des komplexen Moduls erzeugt, indem die ersten 20 gemessenen Schwingungen übersprungen wurden.

Durch analoges Vorgehen bei den Berechnungsergebnissen könnten die höherfrequenten Störungen ebenfalls minimiert werden, doch wurde die Berechnung wegen der hohen Rechenkosten und des großen Speicherbedarfs auf gut 600 Zeitinkremente begrenzt, mit denen nur etwa 20 Schwingungen berechnet wurden.

	Frequenz	Speichermodul	Verlustmodul
Messung	175,9 Hz	2977 N/mm ²	36,1 N/mm ²
FE-Berechnung	177,6 Hz	3037 N/mm ²	33,4 N/mm ²
relativer Fehler	1,0 %	2,0 %	7,4 %

Tabelle 2: Vergleich der Messergebnisse mit der FE-Berechnung

8 Zusammenfassung

Mit Hilfe des Konzepts der fraktionalen Ableitungen lässt sich eine neues rheologisches Element definieren, das zwischen den klassischen Elementen der linearen Viskoelastizität, der Feder und dem Dämpfer, approximiert. Mit Hilfe dieses neuen Elements können fraktionale Stoffgesetze hergeleitet werden, die mit wenigen Parametern auskommen und sich gut an gemessene Daten anpassen lassen. Eine Verbindung des fraktionalen 3-Parameter-Modells zur Cole-Cole-Relaxation wurde dargelegt und die 4 Materialparameter für das Polymer Delrin mit Hilfe von Ausschwingversuchen ermittelt. Eine Implementation fraktionaler Stoffgesetze in die FE-Methode wurde vorgenommen und einer der Ausschwingversuche nachgerechnet. Die gute Übereinstimmung der Ergebnisse der FE-Berechnung mit der Messung bestätigt sowohl das methodische Vorgehen zur Parameteridentifikation als auch die korrekte Implementation in die FE-Methode.

Danksagung

Die Autoren danken Herrn Class, Firma Du Pont, für die Zusammenarbeit. Unser Dank gilt darüber hinaus der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) für die Förderung dieser Untersuchungen im Rahmen des SFB 543 „ultraschallbeeinflusstes Umformen metallischer Werkstoffe“.

Literatur

- Bagley, R.L., 1989. Power law and fractional calculus model of viscoelasticity. *AIAA Journal* 27(10): 1412-1417.
- Bagley, R.L. & Torvik, P.J., 1983. A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity. *Journal of Applied Rheology* 27(3): 201-210.
- Bagley, R.L. & Torvik, P.J., 1984. On the appearance of the fractional derivative in the behavior of real materials. *Journal of Applied Mechanics* 51: 294-298.
- Bagley, R.L. & Torvik, P.J., 1986. On the fractional calculus model of viscoelastic behavior. *Journal of Rheology* 30(1): 133-155.
- Bathe, K.-J., 1990. *Finite-Elemente-Methoden*. Springer Verlag, Berlin.
- Caputo, M. & Mainardi, F., 1971. Linear models of dissipation in anelastic solids. *Rivista del Nuovo Cimento* 1(2): 161-198.
- Cole, K.S. & Cole, R.H., 1941. Dispersion and absorption in dielectrics. *Journal of Chemical Physics* 9: 341-352.
- Ferry, J.D., Landel, R.F. & Williams, M.L., 1955. Extensions to the Rouse Theory of viscoelastic properties to undiluted linear polymers. *Journal of Applied Physics* 26(4): 359-362.
- Gaul, L., 1999. The influence of damping on waves and vibrations. *Mechanical Systems and Signal Processing* 13(1): 1-30.
- Gaul, L. & Schanz, M., 1999. A comparative study of three boundary element approaches to calculate the transient response of viscoelastic solids with unbounded domains. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 179: 111-123.
- Gemant, A., 1936. A method of analyzing experimental results obtained from elasto-viscous bodies. *Physics* 7: 311-317.
- Gemant, A., 1938. On fractional differentials. *The Philosophical Magazine* 25: 540-549.
- Grünwald, A.K., 1867. Über „begrenzte“ Deviationen und deren Anwendung. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik* 12: 441-480.
- Koeller, R.C., 1984. Applications of fractional calculus to the theory of viscoelasticity. *Journal of Applied Mechanics* 51: 299-307.
- Oldham, K.B. & Spanier, J., 1974. *The Fractional Calculus*. Academic Press, New York.
- Padovan, J., 1987. Computational algorithms for FE formulations involving fractional operators. *Computational Mechanics* 2: 271-287.
- Podlubny, I., 1999. *Fractional Differential Equations*. Academic Press, New York.
- Rouse, P.E. Jr., 1953. The theory of linear viscoelastic properties of dilute solutions of coiling polymers. *The Journal of Chemical Physics* 21(7): 1272-1280.
- Schmidt, A., Oexl, S. & Gaul, L., 2000. Modellierung des viskoelastischen Materialverhaltens von Kunststoffen mit fraktionalem Zeitableitungen. In *18. CAD-FEM User's Meeting, Friedrichshafen 20.-22. September*. CAD-FEM GmbH, Grafing.
- Schmidt, A. & Gaul, L., 2001. Finite Element formulation of viscoelastic constitutive equations using fractional time derivatives. *Journal of Vibration and Control* (to appear).
- Scott-Blair, G.W. & Caffyn, J.E., 1949. An application of the theory of quasi-properties to the treatment of anomalous stress-strain relations. *The Philosophical Magazine* 40: 80-94.
- Zimm, B.H., 1956. Dynamics of polymer molecules in dilute solutions: viscoelasticity, flow birefringence and dielectric loss. *The Journal of Chemical Physics* 24(2): 269-278.