Universität Stuttgart

INSTITUT FÜR MECHANIK

19. April 2011

Diplomprüfung Methode der Finiten Elemente in Statik und Dynamik Wintersemester 2010/2011

Name: Musterlösung	Vorname:	
Matrikelnummer:	Studiengang:	Fachsemester: ....
E-Mail-Adresse:		

Bitte beachten Sie die folgenden Punkte:

- Die Prüfung besteht aus 6 Aufgaben. Bitte überprüfen Sie die Vollständigkeit Ihrer Prüfung. Alle 6 Aufgaben sind zu bearbeiten.
- Verwenden Sie in Ihrer Ausarbeitung keine rote Farbe.
- Schreiben Sie Ihre Ergebnisse nur in die dafür vorgesehenen Lösungsrahmen.
- Entfernen Sie keinesfalls die Klammer, welche die Blätter zusammenhält.
- Als Hilfsmittel zugelassen sind nur höchstens **vier** Seiten DIN A4 **handgeschriebene** Formelsammlung sowie ein nicht programmierbarer Taschenrechner. Werden unerlaubte Hilfsmittel bei Ihnen festgestellt, wird dies als Täuschungsversuch betrachtet, der zum Ausschluss von der weiteren Teilnahme an der Prüfung führt. In diesem Fall wird die Prüfung als nicht bestanden (Note 5.0) gewertet.
- Geben Sie am Ende der Prüfung nur die ausgefüllten Aufgabenblätter und keine weiteren Blätter ab.

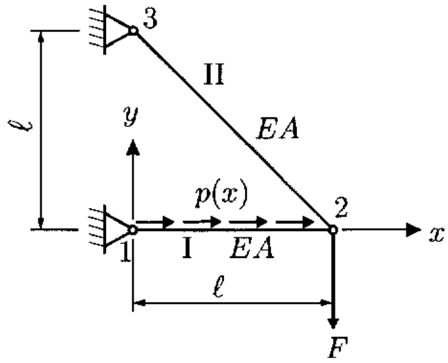
Viel Erfolg!

Zur Kenntnis genommen: ....
(Unterschrift)

Σ 43	

Aufgabe 1 (9 Punkte)

Der skizzierte Stabzweischlag, bestehend aus den Elementen I (Länge ℓ, Längssteifigkeit EA) und II (Länge $\sqrt{2}\ell$, Längssteifigkeit EA), wird wie skizziert durch eine Kraft F sowie eine Linienlast $p(x)$ am Stab I belastet. Der Verlauf der Linienlast ist dabei gegeben durch $p(x) = p_0 \frac{x}{\ell}$. Die Knotennummerierung ist in der Skizze angegeben. Knoten 1 und Knoten 3 sind fest gelagert.



Geben Sie die Gesamtsteifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}$ bzgl. des Knotenverschiebungsvektors $\boldsymbol{u} = [u_{1x}\ u_{1y}\ u_{2x}\ u_{2y}\ u_{3x}\ u_{3y}]^{\mathrm{T}}$ an:

$$\boldsymbol{K} = \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & & -1 & & & \\ & & & & & \\ -1 & & 1+\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ & & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ & & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ & & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Vervollständigen Sie den Knotenlastvektor $\boldsymbol{f}$ bzgl. des Gleichungssystems $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ unter Verwendung der gegebenen Größen:

$$\boldsymbol{f} = [\ F_{1x} + \frac{1}{6} p_0 \ell \ |\ F_{1y}\ |\ \frac{1}{3} p_0 \ell\ |\ -F\ |\ F_{3x}\ |\ F_{3y}\ ]^{\mathrm{T}}$$

Geben Sie die wesentlichen Randbedingungen an:

$$u_{1x} = u_{1y} = u_{3x} = u_{3y} = 0$$

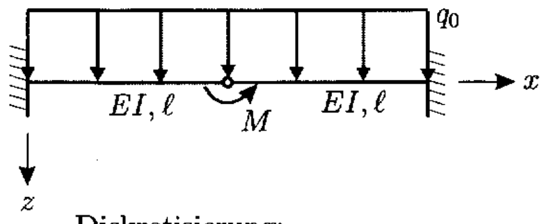
Wie lauten die Verschiebungen u_{2x} und u_{2y} des Knotens 2?

$u_{2x} = \frac{1}{3} p_0 \ell^2 \frac{1}{EA} - \frac{F\ell}{EA}$ | $u_{2y} = \frac{1}{3} p_0 \ell^2 \frac{1}{EA} - \frac{F\ell}{EA}\left(1 + 2\sqrt{2}\right)$

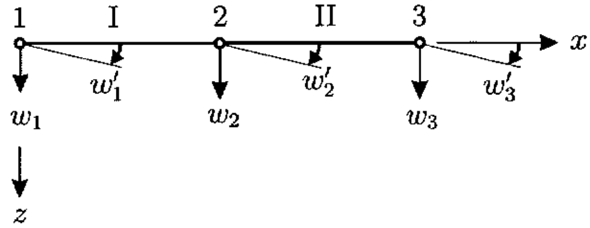
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Aufgabe 2 (7 Punkte)

Zwei schubstarre Balkenelemente (jeweils Länge ℓ, Biegesteifigkeit EI) sind wie skizziert verbunden und an den Enden starr eingespannt. Die Belastung erfolgt durch ein Moment M, welches zwischen den Balken eingeleitet wird, sowie durch eine konstante Streckenlast der Größe q_0. Die Diskretisierung mit der entsprechenden Element- und Knotennummerierung ist in der Skizze angegeben.



Diskretisierung:



Vervollständigen Sie das Gleichungssystem $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ mit $\boldsymbol{u} = [w_1\ w_1'\ w_2\ w_2'\ w_3\ w_3']^{\mathrm{T}}$:

$$\frac{EI}{\ell^3}\underbrace{\begin{bmatrix} 12 & 6\ell & -12 & 6\ell & & \\ 6\ell & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 & & \\ -12 & -6\ell & 24 & 0 & -12 & 6\ell \\ 6\ell & 2\ell^2 & 0 & 8\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 \\ & & -12 & -6\ell & 12 & -6\ell \\ & & 6\ell & 2\ell^2 & -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} w_1 \\ w_1' \\ w_2 \\ w_2' \\ w_3 \\ w_3' \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{u}} = \underbrace{\begin{bmatrix} F_{1z} + \frac{q_0\ell}{2} \\ M_{1z} + \frac{q_0\ell^2}{12} \\ q_0\ell \\ -M \\ F_{3z} + \frac{q_0\ell}{2} \\ M_{3z} - \frac{q_0\ell^2}{12} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{f}}$$

Wie lauten die wesentlichen Randbedingungen:

$$w_1 = w_1' = w_3 = w_3' = 0$$

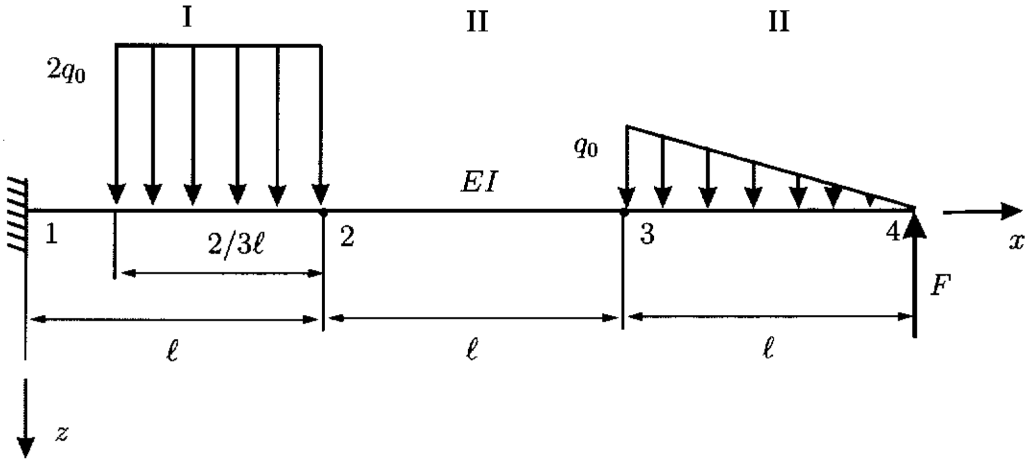
Berechnen Sie die Durchbiegung am Knoten 2:

$$w_2 = \frac{q_0\ell^4}{24EI}$$

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Aufgabe 3 (7 Punkte)

Ein Balken (Länge 3ℓ, Querschnitt bh, Biegesteifigkeit EI) wird durch drei Timoshenko-Balkenelemente (schubweiche Balkenelemente) diskretisiert und ist am linken Ende starr eingespannt. Die Belastung erfolgt wie skizziert durch eine konstante Streckenlast $2q_0$ sowie eine linear veränderliche Streckenlast mit maximaler Amplitude q_0. Am rechten Ende ist der Balken zusätzlich durch eine Kraft F belastet.



Berechnen Sie aus der gegebenen *Streckenlast* die äquivalenten Knotenlastvektoren mit linearen Formfunktionen für den Balken I sowie den Balken III (jeweils in lokalen Koordinaten des Balkens).

$\boldsymbol{f}_{e,v,\mathrm{I}} = [\ \frac{4}{5}q_0\ell \ \vdots\ 0 \ \vdots\ \frac{\ell}{5}q_0\ell \ \vdots\ 0 \quad]^{\mathrm{T}}$ $\quad$ $\boldsymbol{f}_{e,v,\mathrm{III}} = [\ \frac{q_0\ell}{3} \ \vdots\ 0 \ \vdots\ \frac{q_0\ell}{6} \ \vdots\ 0 \quad]^{\mathrm{T}}$

Im Folgenden sind die äquivalenten Knotenlastvektoren für den Balken I und den Balken III gegeben durch $\boldsymbol{f}_{e,v,\mathrm{I}} = q_0\ \ell\ [a \quad 0 \quad b \quad 0]^T$ und $\boldsymbol{f}_{e,v,\mathrm{III}} = q_0\ \ell\ [c \quad 0 \quad d \quad 0]^T$, wobei a, b, c und d konstante Koeffizienten sind. Geben Sie die *gesamte* Knotenbelastung *in Abhängigkeit von* a, b, c, d, q_0, ℓ, F an. Die Lagerreaktionskräfte müssen nicht berücksichtigt werden.

$\boldsymbol{f}_{\text{gesamt}} = q_0\ell\ [\ a \ \vdots\ 0 \ \vdots\ b \ \vdots\ 0 \ \vdots\ c \ \vdots\ 0 \ \vdots\ d - \frac{F}{q_0\ell} \ \vdots\ 0 \quad]^{\mathrm{T}}$

Bei schubweichen Balken mit linearen Formfunktionen kann das Problem der Schubversteifung auftreten. Bei welcher Diskretisierung des gegebenen Balkens tritt die *größte* Schubversteifung auf?

- [x] Diskretisierung durch ein Element
- [ ] Diskretisierung durch zwei Elemente
- [ ] Diskretisierung durch drei Elemente
- [ ] Diskretisierung durch vier Elemente

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

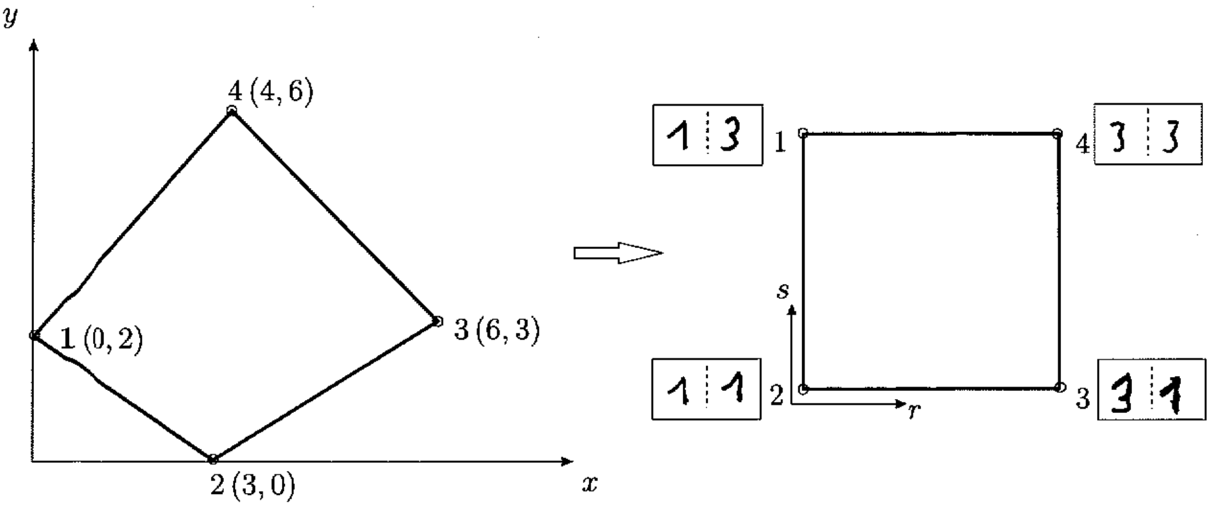
Aufgabe 4 (7 Punkte)

Gegeben ist das skizzierte ebene, isoparametrische 4-Knoten-Element mit bilinearen Formfunktionen:

$$h_1(r,s) = -\frac{1}{4}(r-3)(s-1)\ ,\quad h_2(r,s) = \frac{1}{4}(r-3)(s-3)\ ,$$

$$h_3(r,s) = -\frac{1}{4}(r-1)(s-3)\ ,\quad h_4(r,s) = \frac{1}{4}(r-1)(s-1)\ .$$

Mit Hilfe dieser Formfunktionen wird das skizzierte Element in ein quadratisches Referenzelement transformiert. Bestimmen Sie die Koordinaten des Referenzelementes in natürlichen Koordinaten r, s und tragen Sie diese in die unten stehende Skizze ein.



Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix $\boldsymbol{J}$ in Abhängigkeit der natürlichen Koordinaten r, s.

$$J = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} s+5 & s+5 \\ r-7 & r+3 \end{bmatrix}$$

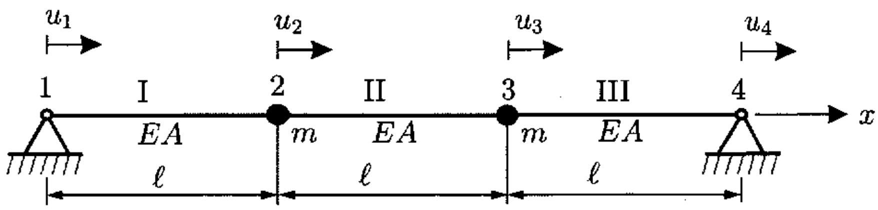
Im Folgenden sind die Jacobi-Matrix $\boldsymbol{J}$, die Elementdicke t sowie die Elementdichte ρ gegeben. Formulieren Sie das Doppelintegral für den Matrixeintrag M_{23} der Elementmassenmatrix in Abhängigkeit der natürlichen Koordinaten r, s.

$$M_{23} = \int_r \int_s \rho t \frac{1}{4}(r-3)(s-3)\left(-\frac{1}{4}\right)(r-1)(s-3) \det J \, ds \, dr$$

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Drei *masselose* Stabelemente I, II und III (jeweils Länge ℓ, Längssteifigkeit EA) sind durch zwei Punktmassen m verbunden und wie skizziert gelagert. Die Knotennummerierung ist in der Skizze angegeben. Der Knotenverschiebungsvektor lautet $\boldsymbol{u} = [u_1 \;\; u_2 \;\; u_3 \;\; u_4]^{\mathrm{T}}$.



Geben Sie die Gesamtsteifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}$ vor Einbau der Randbedingungen an:

$$\boldsymbol{K} = \frac{EA}{\ell}\begin{bmatrix} 1 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & -1 & 2 & -1 \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Wie lautet die Gesamtmassenmatrix $\boldsymbol{M}$ vor Einbau der Randbedingungen?

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} & & & \\ & m & & \\ & & m & \\ & & & \end{bmatrix}$$

Geben Sie die wesentlichen Randbedingungen an:

$$u_1 = u_4 = 0$$

Wie lauten die ersten beiden Eigenkreisfrequenzen $\omega_{0,1}$ und $\omega_{0,2}$ der freien Schwingung?

$\omega_{0,1} = \sqrt{\frac{EA}{m\ell}}$	$\omega_{0,2} = \sqrt{3}\,\sqrt{\frac{EA}{m\ell}}$

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Aufgabe 6 (5 Punkte)

Im Folgenden soll das gegebene Integral I ausgewertet werden:

$I = \int_{-2}^{2} (x^4 + x - 3)\,\mathrm{d}x.$

Berechnen Sie das Integral zunächst analytisch.

$I_{\text{analytisch}} =$ 0,8

Nun soll das Gauß-Verfahren verwendet werden: Wie viele Integrationspunkte benötigen Sie zur exakten Integration?

3

Berechnen Sie numerisch den Wert I für das Integral. Achten Sie dabei auf eine klare Erkennbarkeit der Verwendung eines numerischen Integrationsverfahrens. Dokumentieren Sie den *kompletten* Rechenweg auf dem Lösungsblatt.

$I_{\text{numerisch}} = \sum_{i=1}^{3} 2 w_i \left((2 r_i)^4 + 2 r_i - 3 \right)$

$= 2 \cdot \frac{5}{9} \left(\left(2\sqrt{-\frac{3}{5}} \right)^4 + 2\sqrt{-\frac{3}{5}} - 3 \right)$

$+ 2 \cdot \frac{8}{9} (-3) + 2 \frac{5}{9} \left(\left(2\sqrt{\frac{3}{5}} \right)^4 + 2\sqrt{\frac{3}{5}} - 3 \right)$

$= \ldots = 0{,}8$

Schließlich soll das Integral $I = \int_{-2}^{2} (x^4 + x - 3\cos(x))\,\mathrm{d}x$ betrachtet werden. Wie viele Integrationspunkte benötigen Sie zur exakten Integration?

- [ ] $n = 2$
- [ ] $n = 3$
- [ ] $n = 4$
- [x] $n = \infty$