Universität Stuttgart

INSTITUT FÜR MECHANIK

Prüfung in

Methode der finiten Elemente

Name, Vorname: ______________________

Matrikelnummer: ____________ Studiengang: ____________ Wiederholer ☐

Email: ______________________

Unterschrift: ______________________

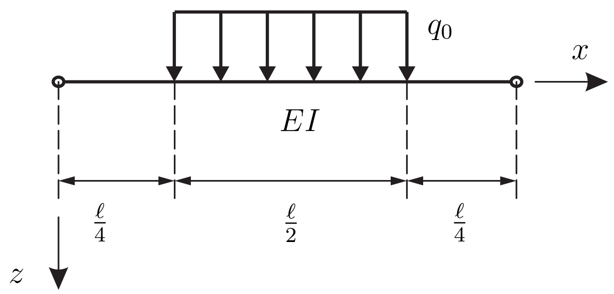
Hauptfach: ______________________

Bitte beachten Sie Folgendes:

1. Es sind alle Blätter der Aufgabenstellung (Seiten 1-8) abzugeben.
2. Ergebnisse können nur gewertet werden, wenn sie auf den Seiten 6-8 eingetragen wurden.
3. Verwenden Sie die Blätter der Aufgabenstellungen nicht zur Ausarbeitung.
4. Verwenden Sie auf den Seiten 6-8 keine rote Farbe.
5. Beschreiben Sie die Blätter nur einseitig und schreiben Sie auf das Deckblatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
6. Zugelassene Hilfsmittel:
   - 4 von Hand einseitig beschriebene Seiten Formelsammlung
   - nicht programmierbarer Taschenrechner

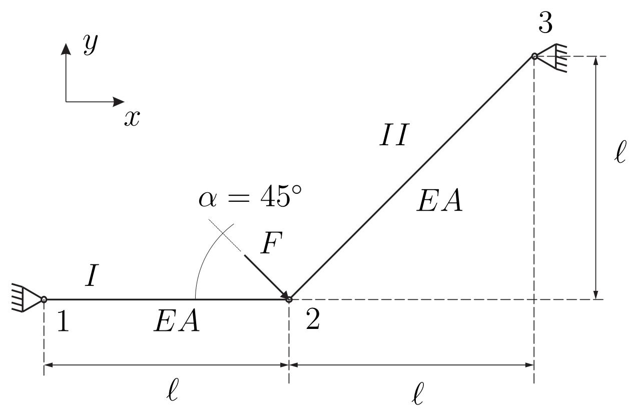
Wird vom Prüfer ausgefüllt	
Aufgabe 1	Punkte:
Aufgabe 2	Punkte:
Aufgabe 3	Punkte:
Aufgabe 4	Punkte:
Aufgabe 5	Punkte:
Aufgabe 6	Punkte:
Aufgabe 7	Punkte:
Gesamt	Punkte: Note:

Aufgabe 1 (3 Punkte)
Gegeben ist ein Euler-Bernoulli-Balkenelement mit einer konstanten Streckenlast der Amplitude q_0 im Bereich $\frac{1}{4}l \leq x \leq \frac{3}{4}l$ (siehe Skizze).



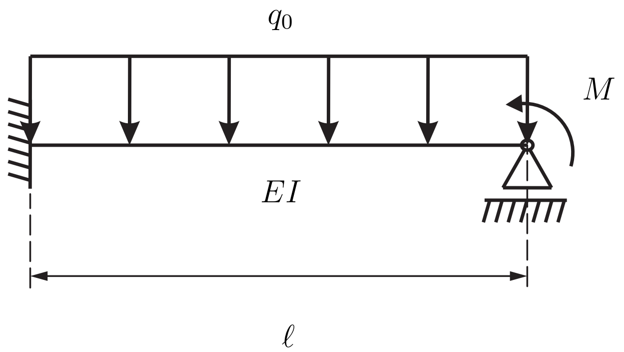
Wie lautet die 3. Komponente des äquivalenten Knotenlastvektors für die gegebene Streckenlast?

Aufgabe 2 (11 Punkte)
Das skizzierte Tragwerk, bestehend aus den Elementen I und II (Längssteifigkeit jeweils EA), ist mit einer Kraft F belastet.



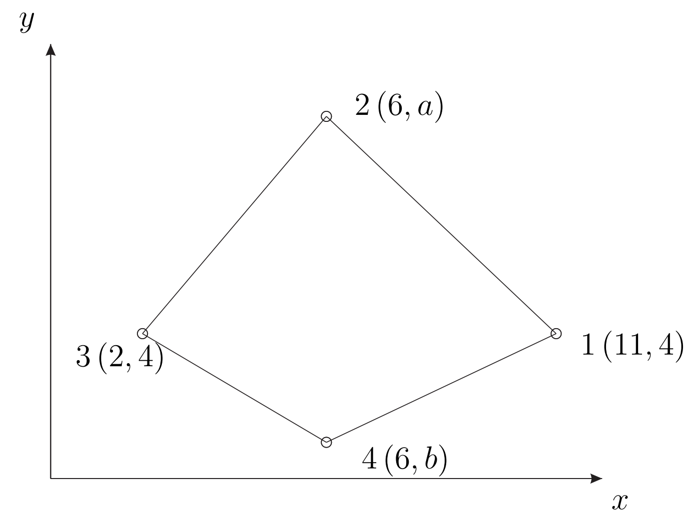
a) Berechnen Sie die Knotenverschiebungen von Knoten 2 für das gegebene Tragwerk.
b) Bestimmen Sie die gesamten auftretenden Lagerreaktionen im Tragwerk.
c) Berechnen Sie die Spannungsverteilung in Stab I und Stab II für das gegebene Tragwerk.
d) Wie lautet die konsistente Elementmassenmatrix von Stab I im gegebenen Tragwerk bei konstanter Dichte ρ? (Achtung: 2D)

Aufgabe 3 (6 Punkte)
Ein Balken (Länge ℓ, Biegesteifigkeit EI) wird durch ein Euler-Bernoulli-Balkenelement diskretisiert und ist an seinem linken Ende starr eingespannt. Das rechte Ende des Balkens wird durch ein Loslager geführt. Die Belastung erfolgt durch ein Moment M, welches am rechten Balkenende eingeleitet wird, sowie durch eine konstante Streckenlast der Größe q_0.



a) Geben Sie alle Knotenverschiebungen und Knotenverdrehungen für die gegebene Belastung an.
b) Berechnen Sie für die gegebene Belastung die Reaktionskraft in vertikaler Richtung an der starren Einspannung.
c) Bestimmen Sie die Biegelinie des Balkens aus dem Finite Elemente Ansatz (die Ergebnisse aus Teil *(a)* müssen nicht eingesetzt werden).

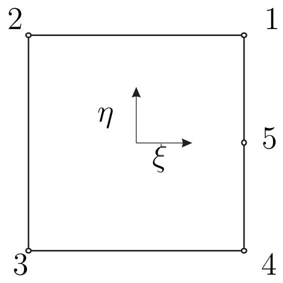
Aufgabe 4 (6 Punkte)
Gegeben ist das skizzierte ebene, isoparametrische 4-Knoten-Element mit bilinearen Formfunktionen.



a) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix $\boldsymbol{J}$ in Abhängigkeit der natürlichen Koordinaten r, s für $a = 5$ und $b = 0$.
b) Welche geometrische Eigenschaft müsste das 4-Knoten-Element besitzen, damit die Determinante der Jacobi-Matrix konstant wird?
c) Zeichnen Sie ein 2D-Element mit bilinearem Ansatz, für das die isoparametrische Abbildung nicht definiert ist.

Aufgabe 5 (7 Punkte)

Für die Diskretisierung von Übergangsbereichen in Finite-Elemente-Netzen können so genannte Übergangselemente eingesetzt werden. Während lineare, quadratische oder kubische Rechteckelemente auf allen Seiten die gleiche Anzahl an Knoten besitzen, ist dies für Übergangselemente nicht der Fall.



Für das abgebildete 5-Knoten-Element wird ein gemischter Verschiebungsansatz

$$w(\xi,\eta,t) = \boldsymbol{H}(\xi,\eta)\,\boldsymbol{w}(t)$$

mit den Formfunktionen

$$\begin{aligned}
h_1(\xi,\eta) &= -\frac{1}{4}(1-2\eta-\xi)(1+\eta)\\
h_2(\xi,\eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)\\
h_3(\xi,\eta) &= \dots\\
h_4(\xi,\eta) &= -\frac{1}{4}(1+2\eta-\xi)(1-\eta)\\
h_5(\xi,\eta) &= \dots
\end{aligned}$$

gewählt.

Die Elementmassenmatrix $\boldsymbol{M}$ für das eingesetzte Rechteckelement ist als

$$\boldsymbol{M} = \frac{\rho\,\ell^2\,t}{4}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{H}\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

definiert (Dichte ρ, Länge ℓ, Dicke t).

a) Bestimmen Sie die fehlenden Formfunktionen $h_3(\xi,\eta)$ und $h_5(\xi,\eta)$.

b) Wie viele Zeilen und Spalten hat die Elementmassenmatrix $\boldsymbol{M}$?

c) Ist die **Steifigkeitsmatrix** des Rechteckelements positiv semidefinit? Begründen Sie Ihre Antwort.

d) Formulieren Sie in Worten einen Vorschlag zur Gestaltung des Übergangsbereichs ohne Verwendung eines speziellen Übergangselements.

Aufgabe 6 (4 Punkte)
Berechnen Sie durch *numerische* Integration das Integral

$$I = \int_{-1}^{1} (0.5\,x \;+ 5\,x^{4})\,\mathrm{d}x$$

a) Nennen Sie mindestens einen Vorteil der numerischen Integration im Vergleich zur analytischen Integration.

Im Folgenden soll das Gauß-Verfahren verwendet werden:

b) Wie viele Integrationspunkte benötigen Sie zur exakten Integration?

c) Berechnen Sie numerisch den Wert I für das Integral. Achten Sie dabei auf eine klare Erkennbarkeit der Verwendung eines numerischen Integrationsverfahrens. Dokumentieren Sie den *kompletten* Rechenweg auf dem Lösungsblatt.

Aufgabe 7 (11 Punkte)
Die transiente Wärmeleitung durch eine Wand wird als eindimensionales Problem (Dichte ρ, Wärmekapazität c, Leitfähigkeit k) mit $(\rho, c) = const.$ für die Temperatur $T(x,t)$ beschrieben durch

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial T}{\partial x}\right) = 0 \qquad \text{für } \; 0 < x < L, \;\; 0 < t \leq t_e \tag{1}$$

mit den Randbedingungen

$$T(x=0,t) = g(t) \tag{2}$$

$$-k\frac{\partial T}{\partial x}(x=L,t) = h(t) \tag{3}$$

$$T(x,t=0) = T_0(x) \tag{4}$$

a) Wie lautet das Fouriersche Wärmeleitungsgesetz?

b) Welchen mathematischen Typ haben die Randbedingungen (2) bis (4)?

c) Leiten Sie die diskrete Form des Problems mit Hilfe des Galerkin-Verfahrens durch räumliche Approximation der Form

$$T(x,t) = \mathbf{H}(x)\mathbf{T}(t) \tag{5}$$

ab, d.h. geben Sie Ausdrücke der Matrizen **C**, **K** und den Vektor **Q** in der Beziehung

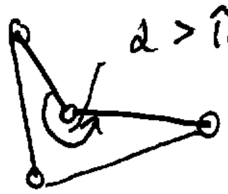
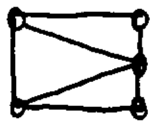
$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{T}} + \mathbf{K}\mathbf{T} = \mathbf{Q} \tag{6}$$

an. (Vorgehen: gewichtetes Residuum, partielle Integration, Diskretisierung)

d) Es sollen Wärmeleitungsberechnungen mit einem FEM Netz mit zwei gleich großen Elementen der Länge ℓ und linearen Formfunktionen durchgeführt werden. Wie lautet die zugehörige 3x3 Wärmekapazitätsmatrix **C** für das Gesamtsystem?

Musterlösung

Aufgabe	Beschreibung	Ergebnis	Punkte
Aufgabe 1: Balken mit Streckenlast			
1)	3. Komponente äquivalenter Knotenlastvektor	3. Komponente von $f_{e,v} = \frac{1}{4} q_0 l$	3
Aufgabe 2: Tragwerk			
2a)	Knotenverschiebungen Knoten 2	$u_2 = \sqrt{2}\, \frac{Fl}{EA}$ $\quad v_2 = (-2-\sqrt{2}) \frac{Fl}{EA}$	4
2b)	gesamte Lagerreaktionen	$F_{1x} = -\sqrt{2} F$ $\quad F_{3x} = \frac{\sqrt{2}}{2} F$ $F_{1y} = 0$ $\quad F_{3y} = \frac{\sqrt{2}}{2} F$	4
2c)	Spannungsverteilungen Stab I, Stab II	$\sigma_I = \sqrt{2}\, \frac{F}{A}$ $\quad \sigma_{II} = \frac{F}{A}$	2
2d)	konsistente Massenmatrix, Stab I	$\underline{\underline{M}}_I = \frac{\rho A l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$	1
Aufgabe 3: Balken mit Moment			
3a)	ALLE Knotenverschiebungen und -verdrehungen	$w_1 = w_1' = w_2 = 0$ $w_2' = -\frac{Ml}{4EI} - \frac{q_0 l^3}{48EI}$	3
3b)	Reaktionskraft	$F_{1z} = -\frac{3M}{2l} - \frac{5 q_0 l}{8}$	2
3c)	Biegelinie	$w(x) = h_4 \cdot w_2' = (-\xi^2 + \xi^3)\, l\, w_2'$ $= \left(-\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right)^3\right) \cdot l \cdot w_2'$	1

Aufgabe	Beschreibung	Ergebnis	Punkte
Aufgabe 4: Isoparametrisches 4-Knoten-Element			
4a)	Jacobi-Matrix	$\underline{\underline{J}} = \begin{bmatrix} \frac{9+s}{4} & \frac{-5+3s}{4} \\ \frac{9+r}{4} & \frac{3r+5}{4} \end{bmatrix}$	4
4b)	geometrische Eigenschaft	Symmetrie, Punktsymmetrie	1
4c)	2D Element	$\alpha > \pi$ 	1
Aufgabe 5: Übergangselement			
5a)	Ansatzfunktionen	$h_3 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$ $h_5 = (1-\eta^2)\cdot\frac{1}{2}(1+\xi)$	2
5b)	Zeilen, Spalten von **M**	10 x 10	1
5c)	Eigenschaften Steifigkeitsmatrix	positiv-semidefinit; Eigenwerte = 0 für Starrkörperbew.	2
5d)	Vorschlag Gestaltung Übergangsbereich	Dreieckselemente 	2

Aufgabe	Beschreibung	Ergebnis	Punkte
Aufgabe 6: numerische Integration			
6a)	Vorteil numerische Integration	Integral lösbar, auch wenn keine analyt. Lsg vorliegt; geeignetes Verfahren für Rechner	1
6b)	Integrationspunkte für exakten Lösung	$n = 3$ Integrationspunkte	1
6c)	Wert I, inkl. Rechenweg, **numerisch**	$r_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}},\ r_2 = 0,\ r_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}$ $w_1 = \frac{5}{9},\ w_2 = \frac{8}{9},\ w_3 = \frac{5}{9}$ $I = \sum_{i=1}^{3} (0{,}5 r_i + 5 r_i^4) w_i = 2$	2
Aufgabe 7: transiente Wärmeleitung			
7a)	Wärmeleitungsgesetz	$q = -k \nabla T = -k \frac{\partial T}{\partial x}$	1
7b)	mathem. Typ. RB	(2): Dirichlet (3): Neumann (4): Dirichlet (Anfangsbedingung)	3
7c)	C, K, Q	$\underline{\underline{C}} = \int_0^L \underline{\underline{H}}^T \rho c \underline{\underline{H}}\, dx$ $\quad \underline{\underline{Q}} = -h(t)\underline{\underline{H}}(L) + \underline{\underline{H}}(0)\, q(0,t)$ $\underline{\underline{K}} = \int_0^L \left(\frac{\partial \underline{\underline{H}}}{\partial x}\right)^T k \frac{\partial \underline{\underline{H}}}{\partial x}\, dx$	5
7d)	C für 2 Elemente	$\underline{\underline{C}} = \frac{\rho c L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	2