Methode der Finiten Elemente — Übungsblatt 7

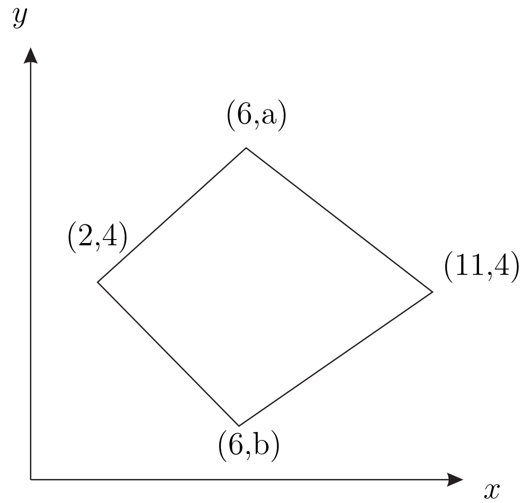
Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Elementsteifigkeitsmatrix für das lineare Stabelement mit Hilfe des isoparametrischen Ansatzes

$$h_1 = \frac{1}{2}(1+r) \qquad h_2 = \frac{1}{2}(1-r)$$

Aufgabe 2

Gegeben ist das skizzierte ebene, isoparametrische 4-Knoten-Element mit bilinearen Formfunktionen



a) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix J in Abhängikeit der natürlichen Koordinaten r, s für a=5 und b=0.

b) Welche geometrischen Eigenschaften müsste das 4-Knoten-Element besitzen, damit die Determinante der Jacobi-Matrix konstant ist?

c) Zeichnen Sie ein 2-D Element mit bilinearem Ansatz, für das die isoparametrische Abbildung nicht definiert ist.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie durch *numerische* Integration das Integral

$$I = \int_{-1}^{1} 0.5x + 5x^4 \, dx$$

a) Nennen Sie mindestens einen Vorteil der numerischen Integration im Vergleich zur analytischen Integration.

   Im folgenden soll das Gauß-Verfahren verwendet werden:

b) Wie viele Integrationspunkte benötigen Sie zur exakten Integration?

c) Berechnen Sie numerisch der Wert I für das Integral. Achten Sie dabei auf eine klare Erkennbarkeit der Verwendung eines numerischen Integrationsverfahrens. Dokumentieren Sie den *kompletten* Rechenweg auf dem Lösungsblatt.

Aufgabe 4

Leiten Sie die Galerkin-Formulierung für die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} \varrho c_v \dot{\Theta} - \kappa \operatorname{div} \operatorname{grad} \Theta &= \varrho r && \text{in } v \\ \Theta &= \bar{\Theta} && \text{auf } s_\Theta \\ \vec{q} &= \bar{\vec{q}} && \text{auf } s_q \end{aligned}$$

her. Verwenden Sie dabei das Fourie'sche Wärmeleitungsgesetz.

$$\vec{q} = -\kappa \operatorname{grad} \Theta$$